Universidad de Deusto
Biblioteca

Christ. Clavius
in Libris posteriores
Analyt.
1589.

Universidad de Deusto
Biblioteca

DOM. SCRIPT. PROV. GERM. S. J.
IHS

Bibliotheca
Sigilli Philosophiae
Sant. S. J.

Universidad de Deusto
Biblioteca

Ex Libris
F. Jos. Pütz.

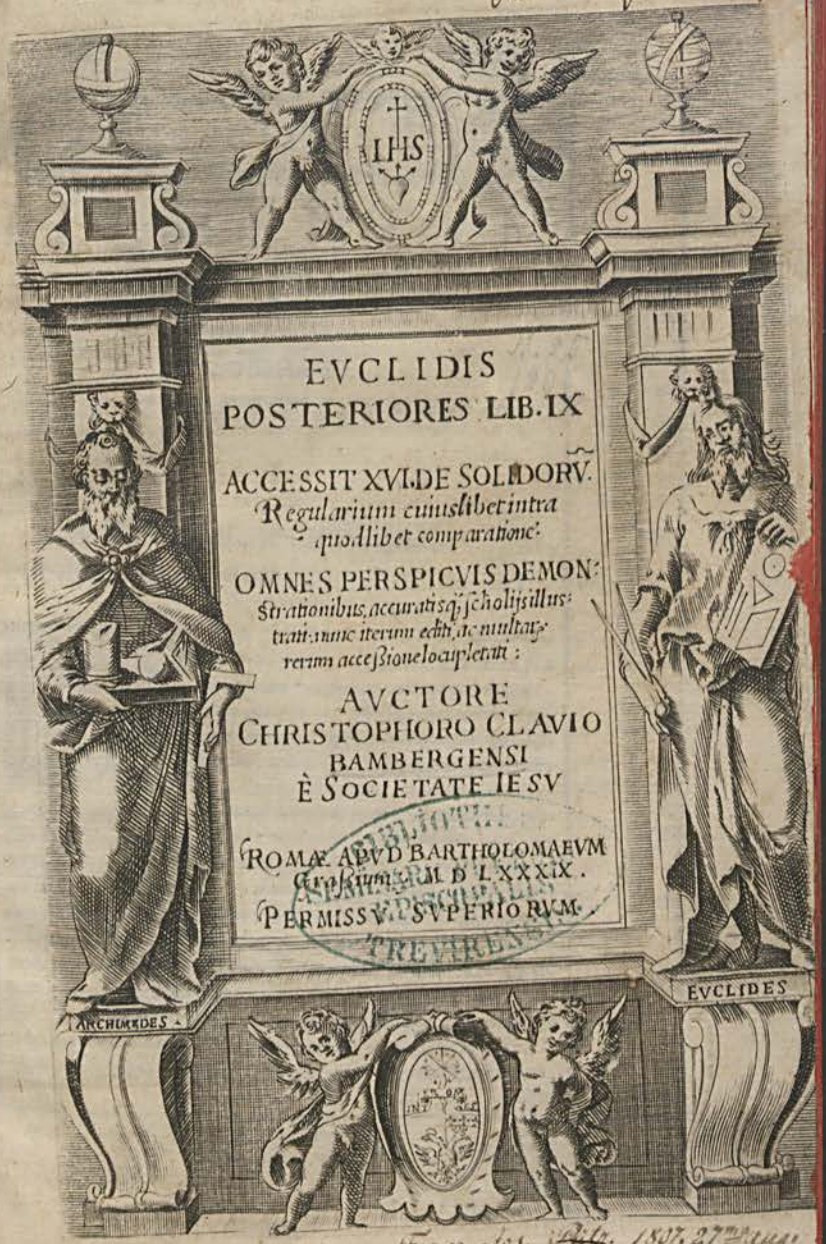
a Jos. Geul mihi Dono datus 27ma Aug.
1807

Der erste Band, welcher aus 6 Büchern besteht, und von der ebenen Geometrie handelt, fehlt mir.

Bibliotheca
Facult. Philosophiae
Prov. Cast. Orient. S. I.

H. Ph. W. P.

Collegij Societatis Jesu Dusseldorpij



EVCLIDIS
POSTERIORES LIB. IX

ACCESSIT XVI. DE SOLIDORV.
Regularium cuiuslibet intra
quodlibet comparatione:

OMNES PERSPICVIS DEMON:
strationibus, accuratisq; scholijs illus:
trati: nunc iterum editi, ac multarum
rerum accessione locupletati:

AVCTORE
CHRISTOPHORO CLAVIO
BAMBERGENSI
È SOCIETATE IESV

ROMÆ APVD BARTHOLOMAEVM
Grassium. M. D. LXXXIX.
PERMISSV SVPERIORVM.

BIBLIOTH. SEMINARII ARCHIEPISCOPALIS TREVIRENSIS

Fran. Jos. Pütz. 1807. 27ma Aug.

EVCLIDIS ELEMENTVM SEPTIMVM.

DEFINITIONES.

I.

VNITAS est, secundū quam vnumquodq; eorum, quæ sunt, vnum dicitur.

HACTENVS egit Euclides de priori Geometriæ parte, ea scilicet, quæ circa plana versatur; restabat altera solidorum. Verum ante ei necesse fuit de lineis commensurabilibus, & incommensurabilibus disserere, quod ad proprietates corporum plurimorum, eorumque maxime, quæ regularia nominantur, demonstrandas, atque vt oportet, explicandas, harum cognitio linearum requiratur, idque adeo, vt absque eis solidorum tractatio imperfecta sit, neque suis numeris absoluta. Huc accedit, quod absque eisdem lineis plurima latera tam planorum, quam solidorum, si Geometriæ Theoria in opus conferatur, atq; vsum, neq; exprimi queät, neq; intelligi. Nam non rarò pleraque laterum sunt illæ lineæ, quæ a Græcis ἄλογοι, a Latinis Irrationales appellantur: Vel, si non sunt Irrationales, longitudine certè inter se sunt incommensurabiles, atque adeo sub mensuram numerorum non cadunt. Et quia earundem linearum explicatio,

Elementum primum — 6tum

BIBLIOTHECA SEMINARII PETROVICI EPISCOPALIS TREVIENSIS

atque intelligentia cum numeris est implicata, & coniuncta, vt absque his nullo modo cognoscantur; oportuit etiam numerorum explanationem, vt doctrinæ suus ordo, ratioq; constaret, lineis illis anteponi. Quare hoc libro septimo, & duobus insequentibus, circa numerorum proprietates, affectionesque, quantum ea rei Geometricæ inseruiunt, occupatur, vt in decimo deinde facilius, ac plenius demonstrationes linearum commensurabilium, & incommensurabilium exequatur.

INCIPIENS igitur more suo a principijs, definit initio vnitatem, docetque eam esse, secundum quam vnumquodque eorum, quæ sunt, vnum esse dicitur. Nam secundum vnitatem vnum lapidem, vnum animal, vnum corpus, &c. dicere solemus. Cæterum vnitas in numeris nullam suscipit diuisionem, quemadmodum nec punctum in magnitudinibus, vt in primo lib. docuimus.

II.

NVMERVS autem, ex vnitatibus composita multitudo.

CVM numerus sit multitudo quædam ex vnitatibus cõposita, manifestum est, numerum quemlibet tot habere partes, quot sunt vnitates eum constituentes: Ita vt vnitas sit pars cuiusuis numeri denominata ab ipso numero, cuius est pars. Vt numerus 8. compositus ex octo vnitatibus, diuiditur in totidẽ partes, nimirum in 8. vnitates, quarum quælibet octaua pars dicitur octonarij. Sic quoque numerus 100. ex centum vnitatibus compositus, in totidem distribuitur, quarum quælibet centesima ipsius pars est, &c.

EX his sequitur, omnes numeros, quotcunque sint, inter se commensurabiles esse, cum eos vna eademque mensura, nimirum vnitas, vt dictum est, metiatur: Id quod omnibus magnitudinibus nulla potest ratione conuenire, cum plurimæ earum mensuram communem non habeant, sed prorsus sint incommensurabiles, vt clarissime lib. 10. ostendetur.

PARS

III.

PARS est numerus numeri, minor maioris, cum minor metitur maiorem.

NON est dissimilis hæc definitio illi, qua Euclides lib. 5. partem quantitatis continuæ exposuit. Sicut enim ibi, ita & hic partem duntaxat aliquotam definit, cum hæc solum proprie dicatur metiri totum, vt ibidem latius explicauimus. Itaque numerus 6. dicetur pars omnium horum numerorum 12. 18. 24. 30. 60. 630. &c. quia ille singulos hos metitur. Similiter huius numeri 576. partes erunt omnes hi numeri 3. 4. 6. 8. cum illum singuli hi metiantur, vt perspicuum est.

OMNIS autem pars ab eo numero nomen sibi sumit, per quem ipsa numerum, cuius pars est, metitur; vt 6. pars huius numeri 42. nomen trahit a 7. cum 6. metiatur 42. per 7. Itaq; 6. erit septima pars numeri 42. & in reliquis eodem modo.

IIII.

PARTES autem, cum non metitur.

VVLT Euclides, numerum minorem maioris numeri, quem non metitur, non partem, sed partes appellari: cuiusmodi est numerus 5. si conferatur cum hoc numero 18. Quamuis enim, cum eum non metiatur, nisi per suas vnitates, pars ipsius dici non debeat; apte tamen congruenterque partes poterit appellari, quod quinque contineat vnitates, quarum quælibet decimaoctaua pars est numeri 18. Vnde numerum 5. dicemus quinque partes decimasoctauas numeri 18. Ex quibus liquido constat, Euclidem nomine partis intellexisse partem aliquotam tantum, non autem & aliquantam, vt uolunt nonnulli; alioquin superuacanea esset hæc definitio quarta, quæ partem aliquantam comprehendit.

CÆTERVM partes quæcunque nomen accipiunt a duobus illis numeris, per quos communis duorum numerorum mensura vtrumque eorum metitur, & eum scilicet, qui partes

dicitur, & eum, cuius ille partes appellatur: Ita vt si communis duorum numerorum mensura metiatur minorem per 3. & maiorem per 5. dicatur minor maioris tres quintæ. Tales partes sunt 6. huius numeri 10. Nam communis eorum mensura 2. metitur 6. per 3. & 10. per 5. Eadem ratione eundem numerum 6. dicemus sex decimas eiusdem numeri 10. cum vnitas, eorum communis mensura, illum metiatur per 6. hunc vero per 10. Idem iudicium habeto & de reliquis.

QVOD si roges, cur Euclides hoc loco non solum eum numerum minorem definiat, qui maioris pars est, verum etiã illum, qui partes: non autem idipsum quinto lib. in magnitudinibus præstiterit; Neque enim magnitudinem illam minorem, quæ maiorem non metitur, partes appellauit; sed tantũ eam, quæ maiorem metitur, partem. Respondemus, huius rei causam esse, quod omnis numerus minor cuiuslibet maioris aut pars est, aut partes, vt propos. 4. huius lib. ostendetur; pars quidem, cum ipsum metitur, partes vero, cum non metitur. At in magnitudinibus longe aliter se res habet. Non enim, propositis duabus magnitudinibus inæqualibus, necessario minor aut pars, aut partes est maioris, cum eæ per & pe sint incommensurabiles, vt aperte liber decimus demonstrabit, atque adeo minor nullo modo contineat plures partes maioris. Nam solum in magnitudinibus commensurabilibus, minor maioris partes plures comprehendit, si illum non metiatur. Recte igitur Euclides quinto lib. partem duntaxat in magnitudinibus, hic autem in numeris & partem, & partes explicauit.

V.

MVLTIPLEX vero maior minoris, cum maiorem metitur minor.

QVEMADMODVM ille solum numerus minor, maioris pars dicitur, qui maiorem metitur, ita quoq; ille tantummodo numerus maior, minoris appellatur multiplex, quẽ minor metitur; adeo vt numerus maior, cuius minor est pars, sit vicissim minoris multiplex. Vt numerus 6. pars est numeri 30. & hic illius multiplex est, &c. Si vero maiorem minor non

non metiatur, nullo modo erit maior minoris multiplex. Si enim maior minoris multiplex esset, metiretur minor maiorem, per hanc definitionem. Et vicissim, si maior minoris non fuerit multiplex, minor maiorem non metietur. Nam si metiretur minor maiorem, esset per hanc defin. maior minoris multiplex.

VI.

PAR numerus est, qui bifariam diuiditur.

Vt omnes hi numeri 4. 10. 40. 100. 1000. pares vocantur, quoniam diuiduntur bifariam, siue in duas partes æquales, cum eorum dimidia sint 2. 5. 20. 50. 500.

VII.

IMPAR vero, qui bifariam non diuiditur. Vel, qui vnitate differt a pari.

OMNES hi numeri 5. 11. 15. 37. 101. 1001. impares nominantur, quia bifariam diuidi nequeunt. Vel certe, quia vnitate differunt ab his paribus 4. 10 14. 36. 100. 1000. vel etiam ab his 6. 12. 16. 38. 102. 1002. Ex hoc autem loco perspicue colligi potest, vnitatem in numeris prorsus esse indiuiduam. Si enim diuideretur, omnis numerus impar haberet dimidium; atque adeo bifariam diuidi posset. Nam huius imparis 11. dimidia pars essent quinque vnitates & semis: cuius contrarium Euclides hac definitione docuit.

VIII.

PARITER par numerus est, quem par numerus metitur per numerum parẽ.

QVIA numerus par est, qui bifariam diuiditur, sit vt quemlibet parem aliquis numerus par, saltem binarius, metiatur. Numerus igitur ille par, quem par numerus metitur per numerum parem, pariter par nominatur. Cuiusmodi est numerus hic par 32. Metitur enim ipsum par numerus 8. per numerum parem 4. Ita quoque par numerus 24. pariter par nuncupabitur, cum eum par numerus 4. metiatur per numerum parem 6. &c.

IX.

PARITER autem impar est, quem par numerus metitur per numerum imparem.

QVOD si numerum parem metiatur numerus par per imparem numerum, vocabitur is pariter impar. Qualis est par numerus 30. Metitur enim eum numerus par 2. per imparem numerum 15. Sic quoq; par numerus 6. metitur eundem per numerum imparem 5. &c.

CÆTERVM si rectè duæ proximæ definitiones expendantur, perspicuum erit, fieri posse, vt vnus idemque numerus par, sit & pariter par, & pariter impar. Nam par numerus 24. cum eum metiatur par numerus 6. per numerum parem 4. pariter par erit. Rursus quia eundem numerus par 8. metitur per numerum imparem 3. pariter quoque impar vocabitur. Vnde interpretes nonnulli, existimantes hoc esse absurdũ, vt excluderent numeros eiusmodi pares, qui & pariter pares, & pariter impares videntur esse, addiderunt vtrique definitioni particulam, tantum, ita vt numerus pariter par, secundum eos, sit, quem par numerus metitur per numerum parem tantum; Pariter autem impar, quem par numerus metitur per numerum imparem tantum. Ita enim fit, vt propositus numerus par 24. neq; pariter par sit, cum eum non tantum metiatur par 6. per parem 4. sed etiam par 8. per imparẽ 3. Neq; pariter impar, quod eum metiatur non tantum, vt dictum est, par 8. per imparem 3. verum etiam par 6. per parem 4. Sed apte

apte vocari poterit pariter par, & pariter impar. Participat enim quodammodo naturam vtriusque, vt constat. Itaque tria constituentur genera numeri paris inter se maxime diuersa: Pariter par; pariter impar; pariter par & pariter impar, qui a quibusdam, pariter par & impariter appellatur. Verùntamen hæc omnia vera quidem sunt, & ex sententia Pythagoreorum, Nicomachi, Boetij, & aliorum rectè explicata, sed aliena prorsus ab Euclidis instituto, vt perspicuum est & ex definitionibus traditis, in quibus non reperitur dictio ista, tantum, quam illi apponunt, & ex propos. 32. 33. 34. lib. 9. vbi manifestè omnem numerum parem, quem aliquis par per parem metitur, pariter parem appellat; illum vero, quem aliquis par metitur per imparem, pariter imparem; eum deniq;, quem par numerus metitur & per parem numerum, & per imparem, vocat pariter parem, & pariter imparem; demonstratque omnes numeros a binario duplos, quales sunt 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. &c. esse pariter pares tantum, hoc est, pares numeros eos metiri per pares numeros tantum; Numeros vero, qui dimidios impares habent, esse pariter impares tantum, id est, pares numeros eos metiri per numeros impares duntaxt, cuiusmodi sunt 6. 10. 14. 18. 22. &c. Numeros denique, qui nec a binario dupli sunt, nec dimidios habent impares, pariter pares esse, & pariter impares, vt sunt 12. 20. 24. 28. 36. &c. Itaque vult Euclides in demonstrationibus illarũ propositionum, hos postremos numeros, aliosque similes, vere esse, secundum traditas definitiones, pariter pares; rursus eosdem dici rectè pariter impares, quanquam nec tantum pariter pares, nec tantum pariter impares illi sint. Sed hæc planius ex lib. 9. intelligentur.

X.

IMPARITER vero impar numerus est, quem impar numerus metitur per numerum imparem.

VT hic numerus impar 15. impariter impar dicitur, quoniam numerus impar 3. eum metitur per 5. numerum imparem. Sic quoq; hi numeri impares 9. 21. 25. 27. 33. 35. 39. 135. 2025. & alij infiniti, impariter impares nominantur.

PRIMVS

XI.

PRIMVS numerus est, quem vnitas sola metitur.

QVOD si numerum quempiam nullus numerus, sed sola vnitas metiatur, ita vt neque pariter par, neque pariter impar, neque impariter impar possit dici, appellabitur numerus Primus; quales sunt omnes isti 2.3.5.7.11.13.17.19.23.29.31. &c. Nam eos sola vnitas metitur.

XII.

PRIMI inter se numeri sunt, quos sola vnitas, communis mensura, metitur.

SICVT numerus ille, quem sola vnitas metitur; Primus dicitur; ita quoque duo, tres, quatuor, vel etiam plures numeri, quos præter vnitatẽ, nullus numerus, tanquam mensura communis metitur, quamuis singuli illorum habeant numeros, qui eos, præter vnitatem metiantur, appellantur inter se primi. Vt 15.8. sunt numeri inter se primi, quia sola vnitas, mensura communis illos metitur: quamuis enim priorem metiantur hi numeri 3. & 5. posteriorem vero isti 2.4. tamen nullus istorum vtrumque metitur, sed sola vnitas vtriusque est communis mensura. Sic etiam hi numeri 7.10.15. primi inter se dicentur, quod præter vnitatem, nullum habeant numerum, mensuram communem, quamquam postremi duo habeant communem mensuram hunc numerum 5. Denique vnitas, & quinis numerus, dici possunt, licet improprie, numeri inter se primi: quia sola vnitas vnitatem, & numerũ quemuis metitur, tanquam mensura communis.

XIIII.

COMPOSITVS numerus est, quẽ numerus quispiam metitur.

NVMERVM, quem præter vnitatem aliquis alius numerus metitur, appellant Geometræ compositum, cuiusmodi est hic 15. Nam eum vterque horum numerorum 3.5. metitur. Perspicuum autem est, omnes numeros pares, dempto binario, esse compositos, cum eos omnes binarius metiatur. Ex quo fit, omnes numeros primos, præter binarium, esse impares, quandoquidem ex paribus, solus binarius primus est, vt diximus.

XIIII.

COMPOSITI autem inter se numeri sunt, quos numerus aliquis, communis mensura, metitur.

DVO numeri, vel plures, quos præter vnitatem, aliquis alius numerus, tanquam mensura communis, metitur, dicuntur inter se compositi, licet non quilibet sit compositus numerus; quemadmodum & numerus ille, quem præter vnitatem, numerus quispiam metitur, compositus nominatur. Vt hi numeri 15.24. compositi inter se sunt, quia eos hic numerus 3. tanquam communis mensura, metitur. Ita etiam inter se compositi erunt hi numeri 7.21.35. Nam primus eorum & se ipsum, & reliquos duos metitur, licet per se sumptus, Primus vocetur.

XV.

NVMERVS numerum multiplicare dicitur, cum toties compositus fuerit is, qui multiplicatur, quot sunt in ipso multiplicãte vnitates, & procreatus fuerit aliquis.

VT numerus 6. multiplicare dicetur numerum 8. quando numerus

numerus 8. sexie fuerit compositus, toties nimirum, quot sunt in multiplicante 6. vnitates, procreatusq; fuerit numerus 48. Ita quoque vicissim numerus 8. multiplicare dicetur numerum 6. si numerum 6. octies sumpserimus, toties scilicet, quot vnitates in multiplicante 8. continentur, procreauerimusque eundem numerum 48. Eadem denique ratione hi numeri 100. 1000. 20. &c. dicentur multiplicare numerum 456. cum hic sumptus fuerit centies, millies, aut vicies, &c. genitique fuerint hi numeri 45600. 456000. 9120. &c. Itaque numerus aliquis dicetur produci, gigni, procreariue ex duobus numeris, quando altero alterum multiplicante, productus fuerit. Vt numerus 63. gigni dicitur ex his numeris 7. 9. quia procreatur ex multiplicatione numeri 7. in numerum 9. vel e contrario. Et sic de reliquis.

SEQVITVR ex his, productum ex multiplicatione numerum eandem habere proportionem ad alterutrum multiplicantium, quam alter multiplicantium habet ad vnitatem. Cum enim ex definitione Euclidis, alteruter multiplicantium toties componendus sit, vt faciat productum, quoties in altero multiplicantium est vnitas; continebit numerus productus toties alterutrum multiplicantium, quoties alter multiplicantium vnitatem continet: ac proinde eandem habebit proportionem numerus productus ad alterutrum multiplicantium, quam alter multiplicantium ad vnitatem habet. Itaque Multiplicatio siue ductus vnius numeri in alium ita quoque describi poterit.

MVLTIPLICATIO numeri in numerum, est inuētio numeri, qui ad alterutrum multiplicantium eandem proportionem habet, quā alter multiplicantium ad unitatem.

SIC vides, ex multiplicatione, siue ductu 6. in 8. gigni numerum 48. qui ita se habet ad 6. vt 8. ad 1. Vel ita ad 8. vt 6. ad 1.

HVIC definitioni addenda est hæc alia docens, quid sit numerum diuidere numerum: quippe quæ necessaria omnino sit ad ea, quæ nos in ijs, quæ sequuntur, sumus demonstraturi.

NVME-

NVMERVS numerū diuidere dicitur, cū numerus acceptus fuerit, qui suis unitatibus indicat, quoties diuidēs numer⁹ in diuiso cōtinetur.

VT numerus 6. diuidere dicetur numerum 48. cum sumptus fuerit numerus 8. qui octo suis vnitatibus indicat, diuidentem numerum 6. in diuiso 48. contineri octies. Ita quoque vicissim numerus 8. diuidere dicetur eundem numerum 48. si acceptus fuerit numerus 6. qui sex suis vnitatibus indicat, diuidentem numerum 8. in diuiso 48. contineri sexies.

HINC fit, numerum ex diuisione procreatum eandem habere proportionem ad vnitatem, quam numerus diuisus habet ad diuidentem. Cum enim, vt in definitione diximus, procreatus numerus suis vnitatibus indicare debeat, quoties diuidens numerus in diuiso contineatur; continebit numerus productus vnitatem toties, quoties numerus diuisus diuidentem continet: ac proinde eandem proportionem habebit numerus ex diuisione genitus ad vnitatem, quam diuisus numerus ad diuidentem. Itaque Diuisio vnius numeri per alium ita quoque poterit describi.

DIVISIO numeri per numerum, est inuentio numeri, qui ad unitatem habet eandem proportionē, quam numerus diuisus ad diuidentē.

ITA vides ex diuisione numeri 48. per 6. procreari numerum 8. qui ita se habet ad 1. vt 48. ad 6. Item ex diuisione eiusdem numeri 48. per 8. produci numerum 6. qui ita se habet ad 1. vt 48. ad 8.

EX his quoque efficitur, diuiso numero per numerum, diuisum numerum gigni ex multiplicatione numeri per diuisionem inuenti in numerum diuidentem. Diuiso enim numero A, per B, procreetur numerus C. Dico numerum A, gigni ex ductu numeri C, in numerum B. Quoniam enim ex defin. multiplicationis, numerus ex C, in B, procreatus ita se habet ad B, vt C, ad vnitatē D: Ex definitione autē diuisionis, ita quoq; se habet A, ad B, vt C, ad vnitatē D; perspicuū est, numerū ex C, in B, genitum esse numerum A; cum tam ille genitus, q̄ A, eandē proportionē habeat ad B, quā C, ad D, vnitatē.

A, 48. B, 8. C, 6. D, 1.

HÆC

HÆC omnia conueniunt quoque numeris fractis, & integris cum fractis: Id est, Numerus fractus numerum fractũ, vel integer fractum, vel fractus integrum (siue fracti adhæreant integris, siue non) multiplicare dicitur, cum toties compositus fuerit is, qui multiplicatur, quot sunt in ipso multiplicante vnitates, & procreatus fuerit aliquis: Diuidere autem, cum numerus acceptus fuerit, qui indicet, quoties diuidens in diuiso continetur: Ita vt in multiplicatione inueniatur quoque numerus, qui ad alterutrum multiplicantium eandem proportionem habet, quam alter multiplicantium ad vnitatem: In diuisione autem procreetur numerus, qui ad vnitatem eandem proportionem habet, quam numerus diuisus ad diuidentem. Vt numerus $\frac{1}{2}$. multiplicare dicitur numerum 20. quando numerus 20. toties fuerit compositus, quot sunt in $\frac{1}{2}$. vnitates, procreatusq; fuerit numerus 10. Quia enim vnitas per sui semissem duntaxat est in $\frac{1}{2}$. sumendus est numerus 20. per semissem quoq; sui, quæ est 10. Ita quoque vicissim numerus 20. multiplicare dicetur numerum $\frac{1}{2}$. si $\frac{1}{2}$ sumptus fuerit vicies, toties scilicet, quoties vnitas est in 20. productusq; fuerit idem numerus 10. Vbi vides eandem esse proportionem procreati numeri 10. ad $\frac{1}{2}$. quam habet alter numerus multiplicans 20. ad 1. Vel ita esse 10. ad 20. vt $\frac{1}{2}$. ad 1. Sic etiam $\frac{1}{2}$. & $\frac{1}{3}$. se mutuò multiplicare dicentur, quando $\frac{1}{2}$. sumptus fuerit per tertiam sui partem, quemadmodum $\frac{1}{3}$. tertiam partem vnitatis tantum continet: Vel quando $\frac{1}{3}$. sumptus fuerit per sui semissem, quia & $\frac{1}{2}$. semissem tantum continet vnitatis. Vtroque autem modo procreabitur $\frac{1}{6}$. qui numerus tertia pars est numeri $\frac{1}{2}$. siue $\frac{3}{6}$. & semissis numeri $\frac{1}{3}$. siue $\frac{2}{6}$. Quo pacto autem multiplicatio in numeris fractis facienda sit, in Arithmetica docuimus, demonstrabimusq; ad finem lib. 9.

RVRSVS numerus $\frac{1}{2}$. diuidere dicetur numerum 10. cum sumptus fuerit numerus 20. indicans, diuidentem numerum $\frac{1}{2}$. vicies contineri in diuiso numero 10. ita vt eadem proportio sit procreati numeri 20. ad 1. quæ numeri diuisi 10. ad diuidentem $\frac{1}{2}$. Sic quoque $\frac{1}{2}$. diuidere dicetur $\frac{1}{6}$. quando sumptus fuerit numerus $\frac{1}{3}$. indicans, diuidentem numerum $\frac{1}{2}$. non totum contineri in diuiso $\frac{1}{6}$ sed tertiam eius partem. Nam cum numerus $\frac{1}{2}$. idem sit qui $\frac{3}{6}$. liquidò constat tertiam

tertiam huius partem, nimirum $\frac{1}{6}$. contineri in $\frac{1}{6}$. Cæterum quo pacto fiat diuisio in numeris fractis, tradidimus in Arithmetica, & ad finem lib. 9. demonstrabimus, vbi omnia hæc, quæ de multiplicatione, diuisioneq; fractorum diximus, planiora fient.

XVI.

CVM autem duo numeri mutùo se se multiplicantes aliquem fecerint, qui factus erit, planus appellabitur. Qui vero numeri mutuo se se multiplicarint, latera illius dicentur.

OMNIS numerus procreatus ex multiplicatione mutua duorum numerorum, planus appellatur, quia secundum suas vnitates in longum, & latum dispositas parallelogrammum rectangulum refert, cuius latera sunt duo numeri multiplicantes, qui idcirco latera numeri procreati uocantur, & ipsum cõtineant, non secus, ac rectæ lineæ angulum rectũ ambientes, parallelogrammum rectangulum continere dicuntur, vt latius lib. 2. explicauimus. Vt numerus 24. productus ex multiplicatione mutua numerorum 4. & 6. planus appellatur, lateraque eius sunt 4. & 6. quia eius vnitates in longum, & latum dispositæ, prout latera exigunt, referunt parallelogrammum rectangulum, cuius vnum latus sex vnitates, alterum vero 4. complectitur. Eodem modo numerus 64. genitus ex mutua multiplicatione numerorum 8. & 8. planus dicitur, eiusque latera 8. & 8.

CÆTERVM cum infinita sint genera numerorum planorum apud Arithmeticos, quemadmodum & figuræ planæ apud Geometras: Euclides solum definit planũ quadrangulare rectangulum, qui videlicet sub duobus numeris, ex quorum

quorum mutua multiplicatione gignitur, continetur; quoniam de hoc solo in hisce libris numerorum disputat, quòd omni ex parte quadrato Geometrico, & figuræ alterapte longiori, similes sint, & æquales, siue ambitũ, siue aream, capacitatemue spectes. Nihil autem dicit de numeris triangularibus, pentagonis, hexagonis, &c. quia hi, licet conueniant triangulo Geometrico, pentagono, hexagono, &c. qđ ad ambitũ spectat: tamẽ si aream, seu capacitatem consideres, ab ijsdem multum discrepant. Id quod perspicuum est cuilibet, qui diligenter hos Euclidis libros, & Arithmeticam Iordani perlegerit.

POTEST autem vnus, idemque numerus planus plura habere latera, cum ex pluribus multiplicationibus procreari possit, vt numerus 24. non solum latera habet 4. & 6. verum etiam 3. & 8. nec non 2. & 12. quia tam ex multiplicatione 3. in 8. quam 2. in 12. producitur, quemadmodum & idem ex multiplicatione 4. in 6. est genitus. Ita quoque numerus planus 100. latera habet 5. & 20: 4. & 25: 2. & 50: 10. & 10. quod ex his omnibus numeris, si bini inter se multiplicentur, gignatur.

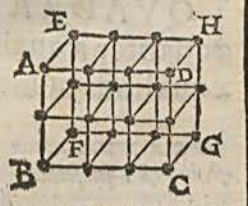
QVIA vero omnem numerum planum metiuntur duo numeri multiplicantes se mutuo, quòd quilibet eorum toties sumptus, quot sunt in altero vnitates, ipsum procreet, liquido constat, omnem planum numerum esse compositum: Quod etiam de numero solido, qui iamiam definietur, dici potest. Verum est, vnitatem aliquando dici posse numerum planum, quamuis improprie; quia eius latera sunt duæ vnitates, quæ multiplicatæ mutuo ipsam vnitatem producunt.

XVII.

CVM vero tres numeri mutuo se se multiplicantes aliquem fecerint, qui procreatus erit, solidus appellabitur: Qui autem numeri mutuo se se multiplicarint, latera illius dicentur.

VT quia tres hi numeri 2. 3. 4. mutuo sese multiplicantes, producunt

producunt 24. Nam ex 2. in 3. procreatur numerus 6. & ex 6. in 4. fit 24. Vel ex 2. in 4. gignitur numerus 8. & ex 8. in 3. efficitur 24. Vel denique ex 3. in 4. producitur numerus 12. & ex 12. in 2. generatur 24. appellabitur numerus 24. solidus, numeri vero 2. 3. 4. dicentur latera illius, quia eius vnitates in longum, latum atque profundum dispositæ referunt figuram quandam solidam, quæ Parallelepipedum nuncupatur, vt lib. 11. explicabimus, cuius omnes tres dimensiones exprimunt tres numeri se mutuo multiplicãtes; vnus quidem longitudinem, alius vero latitudinem, & altitudinem reliquus. Nam si primũ multiplicetur numerus 2. in 4. efficietur numerus 8. basis solidi numeri longa quatuor unitates, & lata duas: Et si hæc basis in 3. multiplicetur, hoc est, si accipiatur ter, exurget totus numerus solidus 24. altitudinem habens trium vnitatum. At si numerus 2. in 3. multiplicetur, habebitur basis 6. vnitatum, quæ multiplicata in 4. facit totum solidum numerum 24. in altitudine habens 4. vnitates. Si denique numerus 3. multiplicetur in 4. procreabitur numerus 12. pro base, quæ bis sumpta faciet numerum eundem solidum 24. cuius altitudo continet duas vnitates. Quæ omnia perspicua sunt in figura proposita. Si enim basis sit B C G F, octo vnitatum, cuius longitudo B C, quatuor vnitates, & B F, latitudo, duas complectitur; superponentur ei duæ aliæ bases similes, & æquales, vt totus numerus solidus contineat 24. vnitates, eiusque altitudo B A, vnitates tres. Similiter, si basis sit A B F E, sex vnitatum, cuius longitudo A B, tres, & latitudo B F, duas continet vnitates; superponentur ei aliæ tres bases similes, & æquales, fietque totus solidus numerus rursum 24. altitudinem B C, habens quatuor vnitatum. Si deniq; basis sit A B C D, 12. vnitatũ, cuius longitudo B C, quatuor cõtinet, & latitudo A B, tres, superponetur illi alia basis similis, & æqualis E F G H, constabitq; totus numerus solidus vnitatibus 24. quarum duæ altitudinẽ dabũt A E, vel B F. Idem hic numerus solidus 24. habet hæc latera 6. 2. 2. cum ex his mutuo multiplicatis producatur. Eodemq; modo de alijs numeris solidis iudicandũ erit.



DENIQVE & vnitas interdum ſolidus appellabitur numerus, etſi non proprie, quia eius latera ſunt tres vnitates, ipſam vnitatem ex mutua earum multiplicatione procreãtes.

DEFINIT autem & hic Euclides tantum numerum ſolidum rectangulum, cuius baſes oppoſitæ ſunt parallelæ, & qui continetur ſub tribus numeris, omiſſis infinitis alijs, de quibus Iordanus, ob cauſam in præcedenti definitione datam; quia ſcilicet hi prorſus æquales ſunt, & ſimiles cubis, & parallelepipedis Geometricis.

XVIII.

QVADRATVS numerus eſt, qui æqualiter æqualis. Vel qui ſub duobus æqualibus numeris continetur.

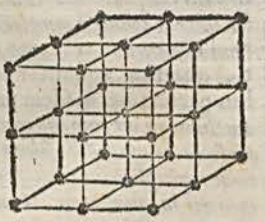
PLANVM illum numerum, qui æqualiter æqualis eſt, hoc eſt, qui ſecundum vnitates ſuas in longum & latum diſpoſitas, refert parallelogrammum rectangulum, cuius longitudo latitudini eſt æqualis, ita vt omnia latera ſint æqualia, vel qui ex multiplicatione mutua duorum numerorum æqualium procreatur, atque adeo ſub illis continetur, vocat quadratum. Huiuſmodi eſt numerus 25. contentus ſub numeris æqualibus 5. & 5. hoc eſt, ex eorum mutua multiplicatione genitus. Nam ſi eius vnitates in formam planam redigantur, referet perfectum quadratum Geometricum, in quolibet latere habens quinque vnitates, ideoq; æqualiter æqualis erit.

ALTERVTER autem numerorum æqualium, ſub quibus quadratus numerus continetur, vel ex quorum multiplicatione producitur, latus quadrati à Geometris, radix vero ab Arithmeticis pleriſque appellatur.

CVBVS

XIX.

CVBVS vero, qui æqualiter æqualis æqualiter. Vel, qui ſub tribus æqualibus numeris continetur.



SOLIDVM quoque illum numerũ vocat cubum, qui eſt æqualiter æqualis æqualiter, id eſt, cuius unitates in longum, latum, atque profundum diſpoſitæ cubum Geometricum referunt, ita vt omnes eius dimenſiones, nimirum longitudo, latitudo, & altitudo, ſiue profunditas, æquales ſint; Vel qui ex multiplicatione mutua trium æqualium numerorum inter ſe producitur. Qualis eſt numerus 27. contentus ſub numeris æqualibus 3. 3. 3. ſiue ex eorum multiplicatione mutua procreatus, cum ex 3. in 3. fiat numerus 9. & ex 9. in 3. gignatur numerus cubus 27. Omnes enim illius vnitates in formam ſolidam redactæ referunt perfectum cubum Geometricum, exiſtuntque tam in longitudine, & latitudine, quam in profunditate, tres vnitates. Quare ipſe numerus 27. eſt æqualiter æqualis æqualiter.

QVILIBET vero trium numerorum æqualium, ſub quibus cubus continetur, vel ex quorum mutua multiplicatione procreatur, Geometris latus cubi, pleriſque autem Arithmeticis radix dicitur.

XX.

NVMERI proportionales ſunt, cũ primus ſecundi, & tertius quarti, æque multiplex eſt; vel eadem pars, vel eędem

partes: Vel certe, cum primus secundum, & tertius quartum, æqualiter continet, eandemq; insuper illius partem, vel easdem partes.

VT numeros proportionales in omni genere proportionis rationalis inæqualitatis (cuiusmodi sunt omnes numeri inæquales inter se collati) complecteremur, addidimus huic definitioni illa verba; vel certe, cum primus secundum, & tertius quartum, æqualiter continet, eandemque insuper illius partem, vel easdem partes. *Definitio etenim vulgata Euclidis, quam puto esse corruptam, cum manca sit, atq; imperfecta, comprehendit solum proportionales numeros in proportione multiplici, submultipliciue, & in proportionibus reliquis minoris inæqualitatis. Nam in proportione multiplici sunt quatuor quilibet numeri proportionales, cum primus secundi, & tertius quarti, æque multiplex est; in submultipluci vero, cum primus secundi, & tertius quarti, eadem pars est; & in reliquis proportionibus minoris inæqualitatis, cum primus secundi, & tertius quarti, eadem partes fuerit, vt vult definitio Euclidis. At vero ex ea nequaquam deprehendere possumus, quinam numeri proportionales sint in proportione superparticulari, superpartiente, multiplici superparticulari, & multiplici superpartiente. In his enim omnibus, primus numerus secundi, & tertius quarti, neq; æque multiplex est, neque eadem pars, neque eadem partes; sed primus secundum, & tertius quartum, æqualiter continet, puta vel semel, vel aliquoties, & eandem insuper illius partem, easdemue partes; vt perspicuum est ex ijs, quæ docuimus ad defin. 4. lib. 5. vbi omnes proportiones rationales copiose explicuimus. Itaque hi numeri 12. 4. 9. 3. proportionales sunt, cum primus secundi, & tertius quarti æque multiplex sit, nimirũ triplus. Item hi 4. 12. 3. 9. est enim primus secundi, & tertius quarti, eadem pars, nimirum tertia. Rursus proportionales sunt hi numeri 6. 8. 9. 12. quod primus secundi, & tertius quarti eadem partes sint, videlicet tres partes quartæ. Deniq; & 7. 6. 14. 12. & 7. 4. 14. 8. & 11. 5. 22. 10. & 12. 5. 24. 10. sunt numeri proportionales.*

Nam

Nam in primo exemplo primus numerus secundum, & tertius quartum, semel, & insuper eadem partem, videlicet sextam; In secundo autem semel, & easdem partes, nimirum tres quartas; In tertio deinde bis, & adhuc partem eandem, videlicet quintam, continet; In vltimo deniq; primus secundum, & tertius quartum, bis, & præterea easdem partes complectitur, puta duas partes quintas. Quod si primus numerus secundi, & tertius quarti, non sit æque multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes; vel deniq; primus secundum, & tertius quartum, non æqualiter contineat, eandemque insuper illius partem, vel easdem partes; nullo pacto dicendi erunt numeri propositi proportionales.

QVOTIESCVNQVE igitur quatuor numeri proportionales esse ponuntur, concedendum necessario erit, si quidem maiores cum minoribus conferantur, quòd primus secundi, & tertius quarti, æque multiplex sit; Vel certe, q primus secundum, & tertius quartum, contineat æqualiter, & insuper eandem partem, vel easdem partes: Et contra, si primus secundi, & tertius quarti, æque multiplex concedatur: Vel certe primus secundum, & tertius quartum, æqualiter dicatur continere, & eandem adhuc partem, vel easdem partes, colligetur numeros esse proportionales. Quòd si minores ad maiores referantur, dicanturq; eandem habere proportionem, fatendum erit, primum secundi, & tertium quarti, esse partem eandem, vel partes easdem: Et e contrario, si primus secundi, & tertius quarti, eadem concedatur pars, vel eadem partes, concludetur numeros ipsos eandem habere proportionem.

DEFINIT autem Euclides eos duntaxat numeros proportionales, qui proportionem eandem inæqualitatis habẽt. Nam si de proportione æqualitatis loquamur, perspicuum est, primum secundo, & tertium quarto æqualem debere esse, vt proportionales numeri dicantur.

EX hac autem definitione aperte colligitur, æquales numeros ad eundem habere eandem proportionem: Et contra eundẽ ad æquales eandem quoque habere proportionem. Item numeros ad eundem habentes eandem proportionẽ, vel ad quos idẽ eandem habet proportionẽ, æquales esse. Cũ enim æquales numeri sint eiusdem, vel æque multiplices, vel eadem pars, vel eadem partes: Vel certe eundẽ æqualiter cõtineant, eandemq;

insuper illius partem, vel partes: Item cum idem numerus æqualium sit vel æque multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes: Vel certe illos æqualiter contineat, eandemque insuper eorum partem, uel partes; perspicuum est, æquales numeros ad eundem, vel eundem numerum ad æquales, eandem habere proportionem, iuxta hanc definitionem.

RVRSVS quia numeri ad eundem habentes eandem proportionem, sunt illius vel æquemultiplices, vel eadem pars, vel eadem partes; Vel certe illum æqualiter continent, eandemq; insuper eius partem, vel partes: Item quia idem numerus habens eandem proportionem ad aliquos, est illorum vel æque multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes; Vel certe illos æqualiter continet, eandemque insuper illorum partem, vel partes, secundum hanc eandem definitionem; manifestũ est, numeros, qui ad eundem eandem habent proportionem, vel ad quos idem eandem proportionem habet, æquales esse.

PARI ratione infertur, maioris numeri ad eundem, maiorem proportionem esse, quam minoris. Et contra, eiusdem ad minorem, maiorem esse proportionem, quam ad maiorem. Item numerorum illum, qui ad eundem habet maiorem proportionem, maiorem esse: Ad quem autem idem habet maiorem proportionem, minorem esse. Quæ omnia perspicua sunt, si recte hæc definitio intelligatur.

HÆC definitio conuenit etiam numeris fractis, siue integri numeri simul adsint, siue non. Nam quatuor hi numeri sunt proportionales; $\frac{3}{4}$. $\frac{3}{8}$. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. quia primus secundi, & tertius quarti, æque multiplex est, nimirum duplus, vt patet, si priores duo ad eandem denominationem reuocentur, vt ad $\frac{6}{8}$. $\frac{3}{8}$. & posteriores quoque ad eandem denominationem, vt ad $\frac{2}{4}$. $\frac{1}{4}$. Quo pacto autem fracti numeri ad eandem denominationem reducantur, docuimus in Arithmetica, & ad finem lib. 9. demonstrabimus. Eadem ratione quatuor hi numeri proportionales sunt $2\frac{3}{8}$. $4\frac{9}{12}$. $1\frac{1}{4}$. $2\frac{5}{10}$. cum primus secundi, & tertius quarti sit eadem pars, nimirum semissis, vt constat. si priores duo ad hos eiusdem denominationis reuocentur, $\frac{19}{8}$. $\frac{38}{8}$. & posteriores duo ad hos $\frac{5}{4}$. $\frac{10}{4}$. atque ita de cæteris.

SIMI-

XXI.

SIMILES plani, & solidi sunt, qui proportionalia habent latera.

VT planus numerus plano numero sit similis, non necesse est, qualibet duo illius latera quibuslibet duobus lateribus huius esse proportionalia; sed satis est, illum habere aliqua duo latera, quæ sint proportionalia quibusdam duobus lateribus huius. Nam hac ratione erunt eorum latitudines longitudinibus proportionales, si secundum suas vnitates in formam planam redigantur, prout latera assumpta exigunt. Vt numeri plani 24. & 6. similes sunt, quoniam illius latera 6. 4. proportionalia sunt lateribus huius 3. 2. quamuis his eisdem non sint proportionalia alia illius latera, nempe 8. 3. vel 12. 2.

EODEM modo, vt duo numeri solidi similes sint, non requiritur, vt quæuis tria vnius latera proportionalia sint tribus quibuslibet lateribus alterius; sed sufficit, vt tria vnius reperiantur tribus alterius proportionalia, quia hac ratione, si secundum vnitates in formam solidam reducantur, erunt eorum latitudines longitudinibus, & longitudines altitudinibus proportionales. Vt numeri solidi 192. & 24. sunt similes, quia latera illius 8. 6. 4. lateribus huius 4. 3. 2. sunt proportionalia, licet his eisdem nequaquam proportionalia sint alia latera illius, nimirum 12. 8. 2. vel 16. 4. 3.

ITAQVE possunt duo numeri plani, vel solidi, esse similes, licet lateribus aliquibus vnius acceptis nullo modo reperiri queant latera alterius proportionalia. Sunt enim hi numeri plani 24. 6. similes, vt dictum est; & tamen si latera prioris sumantur 3. & 8. nulla reperientur in posteriori illis proportionalia. Sic etiam solidi similes sunt 192. 24. cum tamen lateribus prioris assumptis 3. 4. 16. nulla reperiantur proportionalia in posteriori.

HÆC porro similitudo planorum, & solidorum reperitur quoque in fractis numeris, siue in integris cum fractis. Nam si sumantur quatuor numeri non integri proportionales, & tã duo priores, quàm duo posteriores inter se multiplicentur, procreabuntur plerunque duo plani non integri similes, &c.

Dixi, plerunq;, quia fieri potest, vt interdum integri numeri gignantur. Nam si duo latera sint $\frac{2}{3}$. 6. & alia duo $1\frac{1}{3}$. 12. quæ eandem proportionem habent noncuplam, producent priora duo numerum planum 4. posteriora vero numerum 16.

XXII.

PERFECTVS numerus est, qui suis ipsius partibus est æqualis.

NVMERVS ille, cui omnes suæ partes simul sumptæ (loquimur autem de partibus aliquotis, iuxta defin. 3. huius lib.) æquales sunt, Perfectus a Mathematicis nuncupatur. Cuiusmodi sunt hi numeri 6. 28. 496. Nam primus continet has partes aliquotas dun taxat 1. 2. 3. quæ simul sumptæ conficiũt numerum 6. Secundi autem numeri partes omnes aliquotæ sunt hæ 1. 2. 4. 7. 14. quarum summa constituit ipsum numerum 28. Tertius demum numerus has partes habet aliquotas 1. 2. 4. 8. 16. 31. 62. 124. 248. quas omnes in vnam summam collectas componere numerum 496. perspicuum est. Qui autem numeri perfecti sint, & qua via, ac ratione procreentur, (sunt enim præter tres dictos innumerabiles alij) demonstrabitur ab Euclide propos. vltima lib. 9.

QVOD si partes omnes aliquotæ alicuius numeri simul acceptæ maiores sint ipso numero, dici solet numerus ille, Abundans: si vero minores, Diminutus.

LVCE autem clarius ex hoc loco colligitur, partem ab Euclide sumi tantum pro parte aliquota. Nam alioquin omnis numerus esset perfectus, cum suis ipsius partibus sit æqualis, si quilibet numerus minor numeri maioris pars dici potest, siue eum metiatur, siue non metiatur.

HIS definitionibus ab Euclide propositis adiungendæ mihi videntur ex Campano, alijsq; scriptoribus nonnullæ aliæ, quibus proxime succedent postulatæ, & communes animi notiones, præsertim eæ, quibus in demonstrandis numerorum proprietatibus & Euclides, & eius interpretes vti videntur.

NVME-

XXIII.

NVMERVS numerum metiri dicitur per illum numerum, quem multiplicans, vel a quo multiplicatus, illum producit.

VT numerus 4. metiri dicitur numerum 12. per 3. quia multiplicatus per 3. producit 12. Eademque ratione numerus 3. eundem numerum 12. metietur per 4. cum ex multiplicatione 4. in 3. numerus 12. producatur. Hoc autem ita esse, hac ratione fiet perspicuum. Cum numerus 4. metiatur 12. per 3. faciet 4. ipsum 12. toties compositus, quoties est vnitas in 3. Quare per defin. 15. numerus 3. multiplicans numerum 4. producet 12. Quia vero vt propos. 16. huius lib. ostendemus, idem numerus producitur ex multiplicatione 4. in 3. qui ex 3. in 4. manifestum relinquitur, eundem numerum 12. procreari, si numerus 4. multiplicet numerum 3.

HÆC quoque definitio quadrat in numeros non integros. Nam numerus $2\frac{1}{3}$. metiri dicitur numerũ $13\frac{5}{12}$. per $5\frac{3}{4}$. quia multiplicatus per $5\frac{3}{4}$. gignit $13\frac{5}{12}$.

XXIIII.

PROPORTIO numerorum est habitudo quædam vnius numeri ad alterũ, secundum quod illius est multiplex, vel pars, partesve; vel certe illum continet semel, aut aliquoties, & aliquam insuper illius partem, vel partes.

SI numerus 20. cum numero 4. conferatur ea ratione, qua illius multiplex est, nimirũ quintuplus, dicetur hæc cõparatio, habitudoue, Proportio. Sic etiam proportio erit ea habitudo, qua idem numerus 20. cum numero 60. confertur, secundum quod illius tertia pars est; & sic de reliquis.

QVÆ

QVÆ cum ita sint, perspicuum est, tum demum quatuor numeros dici proportionales, cum primus secundi, & tertius quarti, æque multiplex est; vel eadem pars, vel eadem partes: Vel certe, cum primus secundum, & tertius quartum, æqualiter continet, eandemq; insuper illius partem, vel easdem partes, vt supra defin. 20. docuimus.

XXV.

TERMINI, siue radices proportionis dicuntur duo numeri, quibus in eadē proportione minores sumi nequeunt.

XXVI.

CVM tres numeri proportionales fuerint; Primus ad tertium, duplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad secundum. At cum quatuor numeri proportionales fuerint; Primus ad quartum, triplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad secundum: Et semper deinceps vno amplius, quamdiu proportio extiterit.

HÆC definitio, vt ad magnitudines pertinet, copiose explicata est defin. 10. lib. 5. Vnde cum omnia, quæ ibi scripsimus, ad numeros huc transferri facile possint, non est, quod iterum ea hic repetamus.

XXVII.

QVOTLIBET numeris ordine positis, proportio primi ad vltimum com-

poni

poni dicitur ex propottionibus primi ad secundum, & secundi ad tertium, & tertij ad quartum, & ita deinceps, donec extiterit proportio.

HOC ita se habere, pluribus verbis a nobis demonstratum est ad defin. 5. lib. 6.

POSSVNT etiam huc referri definitiones illæ in quinto libro traditæ de alterna ratione, inuersaque; de compositione, diuisione, & conuersione rationis; de ratione ex æqualitate; & de proportione ordinata, ac perturbata. Omnes enim hi modi argumentationum, quæ circa proportiones versantur, demonstrabuntur quoque hoc septimo libro proportionibus numerorum conuenire.

POSTVLATA, SIVE PETITIONES

I.

POSTVLETVR, cuilibet numero quotlibet posse sumi æquales, vel multiplices.

II.

QVOLIBET numero sumi posse maiorem.

QVAMVIS enim numerus infinite diminui nequeat, sed necessario ad vnitatem indiuiduam diminutio deueniat; tamen augeri potest infinite per additionem continuam vnitatis. Quare quolibet numero proposito maior exhiberi potest, ille videlicet, qui ex vnius vnitatis, vel etiam plurium additione consurgit.

AXIO-

AXIOMATA, SIVE PRONVNTIATA.

I.

QVI numeri æqualium numerorum, vel eiusdem æque multiplices sunt, inter se sunt æquales.

II.

QVORVM idē numerus æque multiplex est, vel æque multiplices sunt æquales, inter se æquales sunt.

III.

QVI numeri æqualium numerorum, vel eiusdem, eadem pars, vel eædem partes fuerint, æquales inter se sunt.

IIII.

QVORVM idem numerus, vel æquales, eadem pars, vel eædem partes fuerint, æquales inter se sunt.

V.

VNITAS omnem numerum per vnitates, quę in ipso sunt, hoc est, per ipsummet numerum metitur.

NAM

NAM vnitas sumpta toties, quot sunt in numero proposito vnitates, ipsum constituit. Quamobrem ipsum metitur per vnitates, quæ in ipso sunt, hoc est, per ipsummet numerum ex suis vnitatibus constitutum.

VI.

OMNIS numerus se ipsum metitur per vnitatem.

CVM quilibet numerus semel sumptus sibi ipsi sit æqualis, manifestum est, omnem numerum seipsum metiri per vnitatem.

VII.

SI numerus numerum multiplicans, aliquē produxerit, metietur multiplicās productum per multiplicatū, multiplicatus autem eundem per multiplicantē.

NVMERVS enim A, numerum B, multiplicans producat numerum C. Dico A, metiri ipsum C, per B; & B, eundem C, per A. Cum enim ex defin. 15. numerus B, toties compositus constituat ipsum C, quot sunt in A, vnitates; perspicuum est B, metiri ipsum C, per A, & eadem ratione A, ipsum eundem C, metiri per B, cum etiam B, ipsum A, multiplicans procreet numerum C, vt demonstrabitur propos. 16. huius lib.

A .... B . . .
C .....

VIII.

SI numerus numerum metiatur, & ille, per quem metitur, eundem metietur per eas, quæ in metiente sunt, vnitates, hoc est, per ipsum numerum metientem.

VT

VT quia numerus 6. metitur numerum 18. per 3. metietur & numerus 3. eundem numerum 18. per 6. hoc est, per vnitates, quæ in metiente numero 6. reperiuntur. Hoc autem ita esse, ad hunc modum confirmabimus. Quoniam numerus 6. metitur 18. per 3. fiet numerus 18. ex multiplicatione 6. in 3. vel 3. in 6. per defin. 23. Quare per axioma præcedens numerus 3. numerum 18. metietur per 6.

IX.

SI numerus numerum metiens, multiplicet eum, per quem metitur, vel ab eo multiplicetur, illum quem metitur, producet.

METIATVR enim numerus A, numerum C, per B. Dico A, multiplicantem ipsum B, vel multiplicatum a B, producere ipsum C. Nam numerus A, numerum C, metiri dicitur per eum numerum, quem multiplicans, vel a quo multiplicatus, ipsum C, producit, per defin. 23. Cum ergo A, metiri ponatur ipsum C, per B; perspicuum est, numerum A, multiplicantem ipsum B, vel ab eo multiplicatum producere ipsum C.

A .... B ...
C .....

X.

NVMERVS quotcunque numeros metiens, compositum quoque ex ipsis metitur.

METIATVR numerus A, numeros BC, CD. Dico eundem A, metiri quoq; ex ipsis compositum BD. Cum enim A, metiatur ipsos BC, CD; erit tam BC, quam CD, ipsius A, multiplex. Diuiso ergo BC, in partes BE, EC, ipsi A, æquales,

æquales, & ipso CD, in partes CF, FG, GD, eidem A, æquales; erit numerus BD, compositus ex omnibus partibus BE, EC, CF, FG, GD, ipsi A, æqualibus, multiplex ipsius A. Quare A, ipsum BD, metitur. Quod est propositum.

A ....
B ....E....C....F....G....D

XI.

NVMERVS quemcunq; numerum metiens, metitur quoque omnem numerum, quem ille metitur.

METIATVR numerus A, numerum B; & B, numerum CD. Dico eundem A, metiri quoque numerum CD, quem B, metitur. Cum enim B, metiatur ipsum CD; erit CD, ipsius B, multiplex. Diuiso ergo CD, in partes CE, ED, ipsi B, æquales; metietur A, ipsos numeros CE, ED; quandoquidem numerum B, tam numero CE, quam ED, æqualem, metiri ponitur. Igitur idem A, per pron. 10. metietur quoque numerum CD, ex CE, ED, compositum. Quod est propositum.

A ...
B .....
C.....E.....D

XII.

NVMERVS metiens totum & ablatum, metitur & reliquum.

METIATVR numerus A, totum BC, & ablatum BD. Dico eundem A, metiri quoque reliquum DC. Cum enim A, metiatur & BC, & BD; erit tam BC, quam BD, ipsius A, multiplex, aut certè BD, ipsi A, æqualis erit.

Diuiso

A . . .
B . . . . . D . . . C
B . . . . . D C
B . . . D . . . . . , C

Diuiso ergo tam BC, quam BD, in partes ipsi A, æquales; Erit reliquus numerus DC, vel vna pars numeri BC, ipsi A, æqualis, vel plures, atque adeo DC, æqualis erit ipsi A, vel eius multiplex. Metitur igitur A, ipsum DC. Quod est propositum.

I. THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI duobus numeris inæqualibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione, neque reliquus vnquam metiatur præcedentẽ, quoad assumpta sit vnitas; qui principio propositi sunt numeri, primi inter se erũt.

SINT duo numeri propositi inæquales AB, CD, quorum CD, minor ex maiore AB, quoties potest, detrahatur: & reliquus EB, ex CD, quoties etiam potest; & reliquus FD, ex EB: Et in hac alterna detractione nunquam numerus reliquus præcedentem, a quo fuit detractus, metiatur, donec ad vnitatem GB, quæ quidem præcedentem numerum FD, metitur, detractio perueniat. Dico numeros AB, CD, esse inter se primos, hoc est, solam vnitatem communi mensura eos metiri. Si enim non dicantur inter se primi, metietur eos aliquis numerus, qui sit H, communi mensura, præter vnitatem. Quia ergo H, metitur numerum CD; & CD, numerum AE, (quod CD, vel pars sit ipsius AE, vel certe ei æqualis, cum detractus ex AB, reliquerit numerum EB,) [a] metietur quoque H, ipsum AE: At H, metitur quoque totum AB. [b] Igitur & reliquum

A . . . . . E . . G . B
C . . . F . . D
H ——

[a] 11. pron.
[b] 12. pron.

quum EB, metietur. Metitur autem EB, ipsum CF. [a] Igitur & H, ipsum CF, metietur; Ac propterea, cum & totum CD, metiatur, [b] metietur quoq; reliquum FD. Cum ergo FD, metiatur ipsum EG; [c] metietur etiam H, ipsum EG: Metiebatur autem & H, totum EB. [d] Reliquam igitur vnitatem quoque GB, numerus H, metietur, partem totum. Quod est absurdum. Non igitur numerus aliquis, præter vnitatem, numeros AB, CD, metitur: Ac proinde primi inter se sunt. Quamobrem, si duobus numeris inæqualibus propositis, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 11. pron.
[b] 12. pron.
[c] 11. pron.
[d] 12. pron.

SCHOLIVM.

CONVERTEMVS cum Campano hanc propositionem, hoc modo.

SI duobus numeris inter se primis propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione; nunquam reliquus metietur præcedentem, quoad assumpta sit unitas.

SINT duo numeri inter se primi AB, CD, quorum minor CD, ex maiore AB, quoties potest, detrahatur; & reliquus EB, ex CD, quoties etiam potest; & reliquus FD, ex EB, relinquens GB. Dico in hac alterna detractione nunquam reliquum metiri præcedentem, quoad vnitas assumatur. Metiatur enim, antequã ad vnitatẽ detractio perueniat, si fieri potest, reliquus numerus GB, præcedẽtem FD, ex EB, ablatum. Quia igitur numerus GB, numerum FD, metitur; & FD, ipsum EG, [c] metietur quoque GB, ipsum EG. Cum ergo GB, & se ipsum metiatur, [f] metietur quoque numerum EB, ex EG, GB, compositum: Metitur autem EB, ipsum CF. [g] Igitur & GB, eundem CF, metietur: Atque adeo cum & ipsum FD, positus sit metiri;

A . . . . . E . . G — B
C . . . . . F . . D

[c] 11. pron.
[f] 10. pron.
[g] 11. pron.

C metietur

[a] 10. pron. [b] 11. pron.

metietur quoque ipsum CD, ex CF, FD, compositum. At vero CD, metitur ipsum AE. [b] Igitur & eundem AE, numerus GB, metietur: Ac proinde, cum & ipsum EB, metiatur, vt ostensum est; [c] metietur & ipsum AB, ex vtroque AE, EB, compositum. Quare cum numerus GB, metiatur numeros AB, CD, ipsi erunt inter se compositi. Quod est absurdum, cum ponantur inter se primi. Nunquam ergo numerus aliquis reliquus præcedentem metietur, donec assumpta sit vnitas. Quod est propositum.

A . . . . . E . . G -- B
C . . . . . F . . D

[c] 10. pron.

EODEM modo & hoc verum est.

SI propositis duobus numeris inter se compositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione; detractio ad unitatem usque non perueniet, sed ad numerum, qui præcedentem detractum metiatur.

NAM si detractio huiusmodi ad vnitatem vsque perueniret, essent propositi numeri inter se primi, [d] vt Euclides demonstrauit. Quod est absurdum, cum ponantur inter se compositi.

[d] 1. septimi.

EX his facile dignoscemus, an duo quicunque numeri propositi sint inter se primi, nec ne. Nam detracto semper minore de maiore, alterna quadam detractione; si nunquam reliquus præcedentem metiatur, quoad assumpta sit vnitas; ipsi erunt inter se primi, [e] vt Euclides demonstrauit: Si vero reliquus aliquis numerus præcedentem metiatur, ipsi erunt inter se compositi, cum ille idem reliquus numerus vtrumque numerum propositum metiatur, vt perspicuum est ex demonstratione superiori huius scholij. Ex eo enim, quod reliquus numerus GB, metiri dicebatur præcedentem numerum FD, ostensum fuit, eundem reliquum GB, vtrumque AB, & CD, metiri.

[e] 1. septimi.

∴

PROBL.

PROBL. 1. PROPOS. 2. 2.

DVOBVS numeris datis non primis inter se, maximam eorum communem mensuram reperire.

DENTVR duo numeri AB, CD, non primi inter se, quorum maximam communem mensuram oporteat reperire. Detrahatur minor CD, ex maiore AB, quoties potest, relinquatque EB, numerum, qui ex CD, subtractus relinquat FD, & sic deinceps semper minor de maiore subtrahatur alterna quadam detractione; in qua quidē peruenietur ad numerum, qui præcedentem metiatur. Nam si ad vnitatem deueniretur, [a] numeri AB, CD, essent inter se primi; quod est contra hypothesim. Peruentum ergo iam sit ad reliquum numerum FD, qui detractus ex EB, nihil relinquat, sed eum metiatur. Dico FD, esse maximam mensuram communem numerorum AB, CD. Quod enim vtrumque metiatur, ita ostendemus. Quia FD, metitur ipsum EB; & EB, ipsum CF; [b] metietur quoque FD, ipsum CF; atq; adeo cum & seipsum metiatur, [c] metietur & totum CD, ex CF, FD, compositum. At CD, ipsum AE, metitur. [d] Igitur & FD, eundem AE, metietur. Ac propterea cum FD, metiatur quoque ipsum EB; [e] metietur etiam totum AB, ex vtroque AE, EB, compositum. Metitur igitur FD, vtrumque numerum AB, CD.

A . . . . . E . . . . . B
C . . . . . F . . D
G . . . .

[a] 1. septimi.
[b] 11. pron.
[c] 10. pron.
[d] 11. pron.
[e] 10. pron.

QVOD autem FD, sit maxima mensura communis illorum, ita probabimus. Si enim fieri potest, detur maior mensura communis G, quam FD. Quoniam ergo G, metitur vtrumque AB, CD; Et CD, metitur ipsum AE, [f] metietur quoque G, ipsum AE. [g] Igitur & residuum EB: At vero EB, metitur CF. [h] Metietur ergo & G, eundem CF. [i] Igitur & residuum FD; maior minorem.

[f] 11. pron.
[g] 12. pron.
[h] 11. pron.
[i] 12. pron.

Quod est absurdum. Non ergo maior numerus, quam FD, numeros AB, CD, metitur; Ac proinde FD, maxima est mensura numerorum AB, CD.

QVOD si minor numerus CD, metiatur maiorem AB, ita vt detractus ex AB, nihil relinquat, erit ipse maxima amborum mensura communis, cum & se ipsum metiatur, vt in hac figura apparet. Duobus igitur numeris datis non primis inter se, &c. Quod erat faciendum.

A ..... B
C ..... D

COROLLARIVM.

EX hoc manifestum est, numerum metientem duos numeros, metiri quoque maximam eorundem communem mensuram.

HOC elicitur ex ea parte demonstrationis, qua ostensum fuit FD, esse maximam mensuram ipsorum AB, CD. Demonstratum enim est ibi, numerum G, si metiatur numeros AB, CD, metiri quoque numerum FD, maximam eorum mensuram communem. Eademque ratio est de cateris.

SCHOLIVM.

EX ijs quæ dicta sunt, facile cum Campano experiemur, an quotlibet numeri propositi sint inter se primi, nec ne. Sint enim tres numeri A, B, C. Primum ergo experior, per ea, quæ ad propos. 1. docuimus, an duo A, & B, sint inter se primi: Qui si fuerint inter se primi, non erunt tres numeri A, B, C, inter se compositi, quod nullam possint habere mensuram communem, præter vnitatem, propter numeros A, & B, inter se primos.

A .....
B .....
C .....

SI vero A, & B, fuerint inter se compositi, [a] sit eorum maxima mensura communis inuenta D; quæ si metiatur & numerum C, perspicuum est, tres numeros A, B, C, esse inter se compositos, cum habeant numerum D, communem mensuram.

[a] 2. septimi.

QVOD

QVOD si D, maxima mensura numerorum A, & B, non metiatur numerum C; erunt C, & D, vel inter se primi, vel non: Si sint inter se primi, non erunt tres numeri A, B, C, inter se compositi, sed inter se primi. Si enim dicantur esse inter se compositi, ita vt habeant numerum communem mensuram, metietur ciusmodi communis mensura numerum D, maximam mensuram numerorum A, & B, per coroll. huius propos. Quare cum eadem illa mensura metiatur quoque numerum C, non erunt inter se primi numeri C, & D. Quod est contra hypothesim. Si autem C, & D, non sint inter se primi, erunt tres numeri A, B, C, inter se compositi. [a] Inuenta enim numerorũ C, & D, maxima mensura communi E; cum E, metiatur ipsum D; D, autem ipsos A, & B; [b] metietur quoque E, eosdem A, & B. Quare cum idem E, metiatur quoque ipsum C; metietur E, tres numeros A, B, C; Ac propterea ipsi inter se erunt compositi. Quod est propositum.

A .....
B .....
C .....
D .... E..

[a] 2. septimi.
[b] 11. pron.

SIMILI arte explorabimus, an plures numeri, quam tres, sint inter se primi, an potius inter se compositi. Nam si dati numeri fuerint quatuor, experiendum id erit primum in tribus; si quinque, in quatuor, &c. Reliqua autem perficienda, vt de tribus numeris datis diximus.

PROBL. 2. PROPOS. 3.

3.

TRIBVS numeris datis non primis inter se, maximam eorum communem mensuram reperire.

DENTVR tres numeri A, B, C, non primi inter se, quorum maximam mensuram communem oporteat reperire. [c] Sit D, maxima mensura numerorum A, & B; Si ergo D, metiatur quoque ipsum C, perspicuum est D,

Universidad de Deusto Biblioteca

esse maximam mensuram numerorum datorum A, B, C. Nam si maior numerus dicatur metiri numeros A, B, C, metietur idem, per coroll. propos. 2. huius lib. numerum D, maximam mensuram numerorum A, & B; maior numerus minorem. Quod est absurdum. Si vero D, non metiatur ipsum C; erunt saltem D, & C, inter se compositi. Cum enim sint A, B, C, inter se compositi metietur quæcunque illorum mensura communis, per coroll propos. 2. huius lib. numerum D, maximam mensuram numerorum A, & B. Cum ergo eadem illa mensura metiatur etiam ipsum C; erunt D, & C, inter se compositi. [a] Sit eorum maxima mensura E. Dico E, esse maximam mensuram communem datorum numerorum A, B, C. Quod enim sit eorum mensura communis, hac ratione demonstrabitur. Quoniam E, metitur numeros C, & D; at D, ipsos A, & B; [b] metietur quoque E, ipsos A, & B; Ac proinde tres numeros A, B, C, metietur.

A . . . . . .
B . . . . . D . . . .
C . . . . . E . . F ----

[a] 2. septimi.

[b] 11. pron.

QVOD autem E, sit maxima eorum communis mensura, perspicuum est. Si enim fieri potest, sit F, maior quam E, eorum mensura communis. Quia igitur F, metitur numeros A, & B; metietur quoque, per coroll. propos 2. huius lib. numerum D, maximam eorum mensuram communē. Metitur autem & C. Igitur F, metiens D, & C, metietur quoque E, eorum mensuram maximam, ex eodem coroll. numerus maior minorem. quod est absurdum. Non ergo maior numerus, quā E, numeros A, B, C, metitur; Atque adeo E, maxima mensura est ipsorum. Quamobrem tribus numeris datis non primis inter se, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

HINC perspicuum est, numerum metientem tres numeros, metiri quoque maximam eorum communem mensuram.

HOC

HOC etiam colligitur ex vltima parte demonstrationis. Ostensum enim est ibi, numerum F, si metiatur numeros A, B, C, metiri quoque numerum E, maximam illorum mensuram communem: Eademque in cæteris est ratio.

PARI ratione, pluribus numeris datis, quam tribus, non primis inter se, maxima eorum communis mensura inuenietur; locumque habebit hoc idem corollarium. Nam si dati numeri fuerint quatuor, inuenienda erit primum maxima mensura communis trium numerorum: si quinque, quatuor numerorum accipienda erit primum maxima communis mensura, &c. Reliqua vero omnia peragenda, vt de tribus numeris dictum est.

THEOR. 2. PROPOS. 4. 4.

OMNIS numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars est, aut partes.

SINT duo numeri A, minor, & B, maior. Dico A, esse aut partem, aut partes ipsius B. Sint enim primum A, & B, inter se primi. Quia igitur quælibet vnitas numeri A, pars est numeri B; perspicuum est, numerum A, esse partes numeri B, tot nimirum, quot sunt in A, vnitates.

A . . . . . .
B . . . . . .

SINT deinde A, & B, non primi inter se, sed inter se compositi, & metiatur A, ipsum B. Quo posito, manifestum est A, partem esse numeri B, ex defin. 3. huius lib.

A . . . . . .
B . . . . . .

SED iam A, non metiatur ipsum B, [a] inuenta autem maxima eorum mensura communis sit C; diuidaturque numerus A, in partes AD, DE, EF, quarum singulæ ipsi C, sint æquales. [b] Quia igitur C, pars est ipsius B, cum ipsum metiatur; erit quoque AD, pars eiusdem B: similiter & DE, & EF; Ac propterea totus numerus A, est partes numeri B, tot videlicet,

A . . D . . E . . F
B . . . . . .
C . .

[a] 2. septimi.

[b] 3. defin.

videlicet, quoties C, in A F, continetur. Omnis igitur numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars est, aut partes. Quod demonstrandum erat.

5. THEOR. 3. PROPOS. 5.

SI numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et simul vterque vtriusque simul eadem pars erit, quæ vnus vnius.

SIT numerus A, eadem pars numeri B C, quæ est numerus D, numeri E F. Dico vtrumque numerum A, & D, simul vtriusq; numeri B C, & E F, simul eandem esse partem, quæ est vel A, ipsius B C, vel D, ipsius E F.

A . . . . . | D . . . .
B ..... G ..... C | E .... H .... F

Diuisis enim numeris B C, E F, in partes B G, G C; E H, H F, ipsis A, & D, æquales; erit multitudo partium numeri B C, æqualis multitudini partium numeri E F, propterea quod eadem pars est A, ipsius B C, quæ D, ipsius E F. Quia igitur A, & B G, æquales sunt; si illis addantur æquales D, & E H; erunt A, & D, simul æquales ipsis B G, & E H, simul: Eodem argumento erunt A, & D, simul ipsis G C, & H F, simul æquales: Et sic deinceps, si plures partes fuerint in B C, E F; aggregatum numerorum A, & D, tot aggregatis partium numerorum B C, & E F, æquale erit, quoties A, in B C, vel D, in E F, continetur: Ac propterea eadem pars erit vterque A, & D, simul vtriusque B C, & E F, simul, quæ est A, ipsius B C, vel D, ipsius E F. Si numerus ergo numeri pars fuerit; &c. Quod erat ostendendum.

SCHO-

SCHOLIVM.

IDEM hoc verum est in numeris fractis, eademq; prorsus demonstratio adhibebitur: ut in hoc exẽplo apparet, vbi numerus A, numeri B C, & numerus D, numeri E F, eadem pars est; ac proinde vterq; simul A, D, vtriusque B C, E F, simul eadem pars ostendetur, quæ A, ipsius B C: si nimirum B C, E F, diuidantur in partes B G, G C; E H, H F, ipsis A, D, æquales, &c.

A, $\frac{2}{9}$ D, $\frac{3}{7}$
B, $\frac{2}{9}$ G, $\frac{2}{9}$ C E, $\frac{3}{7}$ H, $\frac{3}{7}$ F

QVOD si quando contingat, numerum fractum diuidi non posse in partes æquales propositas, propterea quòd numerator in eas partes secari nequeat, multiplicandus erit tam numerator, quàm denominator per numerum partium. Procreabitur enim hac ratione alia fractio priori æquiualens, & cuius numerator in propositas partes diuidi potest. Vt si fractio $\frac{5}{9}$. secanda sit in duas partes æquales, ducendus erit vterq; eius numerus in 2. si in tres, in 3. si in quatuor, in 4. &c. vt gignantur fractiones $\frac{10}{18}$. $\frac{15}{27}$. $\frac{20}{36}$. quarum prima secabitur in has duas partes æquales $\frac{5}{18}$. $\frac{5}{18}$. secũda in has tres $\frac{5}{27}$. $\frac{5}{27}$. $\frac{5}{27}$. tertia vero in has quatuor, $\frac{5}{36}$. $\frac{5}{36}$. $\frac{5}{36}$. $\frac{5}{36}$.

RVRSVS quando adsunt integra, reuocanda prius erũt vna cum fractione ad vnam fractionem, deinde eodem modo tam numerator, quàm denominator multiplicandus per numerum partium, &c. Vt si numerus $4\frac{3}{7}$. secandus sit in tres partes, reducemus eum prius ad hanc vnicam fractionem, $\frac{31}{7}$. deinde vtrumque eius numerum per 3. multiplicabimus, vt fiat fractio $\frac{93}{21}$. cuius tres partes æquales sunt $\frac{31}{21}$. $\frac{31}{21}$. $\frac{31}{21}$. Atque hæc in sequentibus quoque propositionibus obseruanda sunt, quando fractionibus accommodantur: Et semper nomine fractionum intelligendi quoque sunt numeri integri cum fractis: Item quando aliqui fracti sunt, & alij integri.

EODEM modo demonstrabimus & hoc, quod sequitur.

SI vnitas numeri pars fuerit, & altera vnitas, uel numerus alterius numeri eadem pars; Et simul vtraque vnitas, vel vnitas & nnmerus

simul

simul, vtriusque numeri simul eadem pars erit, quæ vnitas numeri.

HOC autem perspicue in his appositis exemplis apparet. Eadem enim prorsus est demonstratio.

A.	D.	A.	D...
B. G. C	E. H. F	B. G. C	E... H... F

POSSVMVS etiam hanc propositionem ad quotcunque numeros transferre, hoc modo.

SI sint quotcunque numeri quotcunque numerorum æqualium numero, singuli singulorũ, eadem pars; Et omnes omnium simul eadem pars erunt, quæ vnus vnius.

SINT numeri A, B, C, numerorum DE, FG, HI, singuli singulorum eadem pars. Dico omnes numeros A, B, C, simul omnium numerorum DE, FG, HI, simul eandem esse partẽ, quæ est A, ipsius DE.

A....	B...	C..
D.... K .... E	F... L... G	H.. M.. I

Diuisis enim numeris DE, FG, HI, in partes ipsis A, B, C, æquales; erit multitudo partium numeri DE, æqualis multitudini partium tã numeri FG, quam numeri HI. Quia igitur A, & DK, æquales sunt; si illis addantur æquales B, & FL, erunt A, B, simul æquales ipsis DK, FL, simul: quibus si rursum addantur æquales C, & HM; erunt quoque A, B, C, simul æquales ipsis DK, FL, HM, simul. Simili ratione erunt A, B, C, simul æquales ipsis KE, LG, MI, simul; & sic deinceps, si plures partes fuerint in DE, FG, HI, aggregatum numerorum A, B, C, tot aggregatis partium numerorum DE, FG, HI, æquale erit, quoties A, in DE, continetur. Quamobrem eadem pars erunt A, B, C, simul ipsorum DE, FG, HI, simul, quæ A, ipsius DE.

IDEM sequitur, si loco vnius numerorum A, B, C, sumatur vnitas, vel loco plurium, vel etiam omnium, plures vnitates, vt de duobus dictum est. Id quod sequentes figuræ indicant.

A.	B..	C...	A.	B.	C.
D.K.E.	F..L..G	H...M...I	D.K.E	F.L.G	H.M.I

HÆC etiam fractis numeris conueniunt. Nam si quotcunque fracti numeri, quotcunque fractorum numerorum æqualium numero, singuli singulorum, eadem pars fuerint; Et omnes omnium simul eadem pars erunt, quæ vnus vnius. Quod eodem modo demonstrabitur: etiamsi aliqui numerorum sint integri, vel vnitates, vt hic videre licet.

A, 1.	B, $\frac{1}{2}$.	C, $\frac{3}{4}$.
D, 1 K, 1 E	F, $\frac{1}{2}$ L, $\frac{1}{2}$ G	H, $\frac{3}{4}$ M, $\frac{3}{4}$ I

THEOREMATI quoque primo quinti lib. simile proponemus, in hunc modum.

SI sint quotcunque numeri quotcunq; numerorum æqualium numero, singuli singulorum, æque multiplices: quam multiplex est vnius vnus numerus, tam multiplices erunt & omnes omnium.

DEMONSTRATIO eadem hic est, quæ in lib. 5. Quod tamen aliter ita etiam demonstrabimus. Sint A, B, C, numeri numerorum D, E, F, æque multiplices; singuli singulorum. Dico & omnes A, B, C, simul omnium D, E, F, simul tam multiplices esse, quam est A, multiplex ipsius D. Cum enim tam sit multiplex A, ipsius D, quã est B, ipsius E, & C, ipsius F; erit e contrario D, eadem pars ipsius A, quæ E, ipsius B, & F, ipsius C. Per ea igitur, quæ nuper a nobis demonstrata sunt, erunt D, E, F, simul eadem pars ipsorum

A.....	B.....	C....
D..... E...	F.....	

ipſorum A,B,C,ſimul,quæ D, ipſius A; Ac propterea e contrario tam multiplices erunt omnes A,B, C, ſimul, omnium D,E, F,ſimul, quam eſt multiplex A, ipſius D.

SI numeri A,B,C, fracti ſint, & ipſorum D,E,F, fractorum æquemultiplices; quàm multiplex eſt vnius vnus, tam multiplices erunt & omnes omnium. Vt ex demonſtratione liquet.

QVOD ſi loco vnius numerorum D, E, F, aſſumatur vnitas, vel etiam loco plurium, vel omnium, plures vnitates, theorema eodem modo demonſtrabitur, vt ex ſequentibus figuris apparet.

A .. B .... C ..... | A .. B .. C ..
D . E .. F ... | D . E . F .

6. ## THEOR. 4. PROPOS. 6.

SI numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes : Et ſimul vterque vtriuſque ſimul eædem partes erit, quæ vnus vnius.

SIT numerus AB, eædem partes numeri C, quæ numerus DE, numeri F. Dico vtrumque numerum AB, & DE, ſimul vtriuſque numeri C, & F, ſimul eaſdem partes eſſe, quæ eſt AB, ipſius C, vel DE, ipſius F. Diuiſis enim numeris AB, DE, in partes AG, GB; DH, HE, numerorũ C, & F; erit multitudo partium in numero AB, æqualis multitudini partium in numero DE; propterea quod eædem partes eſt numerus AB, numeri C, quæ numerus DE, numeri F. Quia igitur, quæ pars eſt AG, numeri C, eadem eſt DH, numeri F; erit vterque AG, DH, ſimul eadem pars vtriuſque C,F, ſimul, quæ AG, ipſius C, vel DH, ipſius F. Eadem ratione erit vterque GB, HE, ſimul eadem pars vtriuſq; C,F,

A . . G . . . B | D . . . H . . . . E
C . . . . . | F . . . . . .

5. *ſ. ſptimi.*

C,F, ſimul, quæ GB, ipſius C, vel HE, ipſius F: Et ſic deinceps, ſi plures partes fuerint in AB, DE, erunt tot aggregata partium in numeris AB, DE, contenta, quorum quodlibet eadem pars eſt numerorum C, F, ſimul, quæ pars eſt AG, ipſius C; quot partes eædem eſt numerus AB, ipſius C, vel DE, ipſius F: Ac proinde eædem partes erit vterque numerus AB, DE, ſimul, vtriuſque numeri C,F, ſimul, quæ AB, ipſius C, vel DE, ipſius F. Si numerus ergo numeri partes fuerit, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

EADEM hæc propoſitio locum habet in numeris fractis, vnà cum demonſtratione: vt hoc exemplum demonſtrat.

$A, \frac{1}{9}\ G,\ C, \frac{3}{9}\ B$ $\qquad$ $D, \frac{2}{7}\ H,\ F, \frac{6}{7}\ E$

SED & hanc propoſitionem ad quotcunque numeros ſiue integros, ſiue fractos extendentes, hoc modo amplificabimus.

SI ſint quotcunque numeri quotcunque numerorum, ſinguli ſingulorum, eædem partes; Et omnes omnium ſimul eædem partes erunt, quæ vnus vnius.

EADEM enim eſt demonſtratio, ſi modo pro quinta propoſ. aſſumatur id, quod ſecundo loco demonſtrauimus in ſcholio præcedenti; vt hic perſpicuum eſt.

A .. K .. B | C . . . L . . . D | E . . . . M . . . . F
G . . . . . | H . . . . . | I . . . . . .

THEOR. 5. PROPOS. 7. 7.

SI numerus numeri pars fuerit, qualis ablatus ablati: Et reliquus reliqui eadẽ pars erit, qualis totus totius.

SIT

SIT numerus AB, eadem pars numeri CD, quæ ablatus AE, ablati CF. Dico reliquum EB, eandem esse partem reliqui FD, quæ est totus AB, totius CD.

A....E..B
G....C....F....D

Ponatur enim EB, numeri GC, eadem pars, quæ est AE, ipsius CF, vel totus AB, totius CD. Quia igitur AE, eadem est pars ipsius CF, quæ EB, ipsius GC; 5. septim. a erit vterque AE, EB, simul eadem pars vtriusque simul CF, GC, quæ AE, ipsius CF, hoc est, quæ totus AB, totius CD; Ac propterea cum AB, eadem sit pars vtriusque numeri FG, CD; erunt ipsi numeri FG, CD, inter se æquales. Dempto ergo communi CF, æquales remanebunt GC, FD. Eadem igitur pars erit EB, ipsius FD, quæ ipsius GC, hoc est, quæ totus AB, totius CD. Si igitur numerus numeri pars fuerit, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

A, 1/5 E, 2/5 B
G, 4/5 C, 6/8 F, 4/5 D

LOCVM etiam habet hæc propositio, vnà cum eius demonstratione in numeris fractis, vt hic apparet.

IDEM hoc theorema verum est, tam in numeris integris, quàm in fractis, etiamsi ablata sit vnitas AE, vel reliqua fuerit vnitas EB; vel denique in integris & ablata, & reliqua sit vnitas, vt ex his exemplis apparet.

A.E...B	A...E.B	A.E.B
G.....C..F.....D	G..C.....F..D	G..C..F..D

CÆTERVM & ex his theoremati quinto lib. 5. simile hoc demonstrabimus, tã in numeris integris, quam in fractis.

SI numerus numeri æque fuerit multiplex, atque ablatus ablati: Etiam reliquus reliqui ita multiplex erit, vt totus totius.

QVOD

QVOD quidem non aliter ostendemus, ac theorema illud quinti lib. Verum idem ex demonstratis ita confirmabimus. Sit totus AE, totius CD, æque multiplex, atque ablatus AE, ablati CF. Dico & reliquum EB, reliqui FD, ita esse multiplicem, vt est totus AB, totius CD. Cum enim AB, ipsius CD, sit æque multiplex, atque AE, ipsius CF; erit e contrario

A.....E....B
C...F..D

totus CD, totius AB, eadem pars, quæ ablatus CF, ablati AE. a Quare & reliquus FD, reliqui EB, eadem pars erit, quæ totus CD, totius AB; Ac proinde e contrario EB, ita multiplex erit ipsius FD, vt AB, ipsius CD, est multiplex. 7. septimi.

QVOD si ex CD, ablata fuerit vnitas CF; vel reliqua sit vnitas FD: vel denique in integris & ablata sit vnitas CF, & alia reliqua FD; idem demonstrabitur, vt hæc exempla commonstrant.

A...E.....B	A....E..B	A...,E...,B
C.F..D	C..F.D	C.F.D

THEOR. 6. PROPOS. 8. 8.

SI numerus numeri partes fuerit, quales ablatus ablati: Et reliquus reliqui eædem partes erit, quales totus totius.

SIT numerus AB, partes eædem numeri CD, quæ ablatus AE, ablati CF. Dico reliquum EB, easdem esse partes reliqui FD, quæ totus AB, est totius CD. Sumpto enim numero GH, æquali ipsi AB; erit GH, eædem partes ipsius CD, quæ AB, eiusdem CD, hoc est, quæ AE, ipsius CF. Diuiso ergo GH, in partes GI, IH, numeri CD; & AE, in partes AK, KE, numeri CF; erit multitudo partium GI, IH, multitudini partium AK, KE, æqualis, eademque pars tam

A..... K.....E.... B
C..... F..... D
G..... L.. I..... M.. H

GI,

A ..... K ..... E .... B
C ..... F ..... D
G ..... L .. I ..... M .. H

GI, quam IH, ipsius CD, quæ tam AK, quam KE, ipsius CF. Cum ergo CD, numerus maior sit numero CF, erit & tam GI, quam IH, pars ipsius CD, maior tam numero AK, quam KE, parte ipsius CF. Sumptis igitur numeris GL, IM, æqualibus ipsis AK, KE; erit GL, eadem pars ipsius CF, quæ AK, eiusdem CF, hoc est, quæ GI, ipsius CD; Ac proinde cum totus GI, totius CD, sit eadē pars, quæ ablatus GL, ablati CF, [a] erit & reliquus LI, reliqui FD, eadem pars, quæ totus GI, totius CD. Eodemque argumento ostendemus MH, eandem esse partē ipsius FD, quæ est totus GI, vel IH, totius CD. Quoniam ergo tam GI, quam IH, eadem est pars ipsius CD, quæ est tam LI, quam MH, ipsius FD; erit vterque GI, IH, simul eędem partes ipsius CD, quę vterque LI, MH, ipsius FD. Est autem GH, eædem partes ipsius CD, quæ AB, eiusdem CD, propter æqualitatem numerorum AB, GH. Igitur & vterque LI, MH, simul eædem partes erit ipsius FD, quæ AB, ipsius CD. Quia vero si ab æqualibus AB, GH, æquales auferantur AK, KE, & GL, IM, reliqui EB, & LI, MH, simul æquales sunt: Erit quoque EB, reliquus eædem partes reliqui FD, quæ AB, totus totius CD, nimirum eædem, quæ vterque LI, MH, simul erat eiusdem FD. Si numerus ergo numeri partes fuerit, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 7. septimi.

SCHOLIVM.

$A, \frac{2}{10} K, \frac{2}{10} E, \frac{6}{10} B$
$C, \frac{6}{10} F, \frac{9}{10} D$
$G, \frac{2}{10} L, \frac{3}{10} I, \frac{2}{10} M, \frac{3}{10} H$

IN numeris fractis eadem hæc propositio eodem prorsus modo demonstrabitur, vt hic manifestum est.

NON demonstrauit Euclides hanc propositionem, quemadmodum præcedentem, quod nonnulli interpretes faciunt, quia non constabat hic, reliquum numerum EB, alicuius numeri easdem esse partes, quæ est numerus AE, numeri CF, ibi vero perspicuum erat, reliquum EB, alicuius numeri eandem esse partem, quæ est AE, ipsius CF. Licet enim ipsius EB, duplum assumere, triplum, quadruplum, &c. donec EB, sit ita submultiplex numeri assumpti GC, vt AE, est submultiplex ipsius CF.

THEOR. 7. PROPOS. 9.

9.

SI numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et vicissim, quæ pars est, aut partes primus tertij, eadem pars erit, vel eædem partes & secundus quarti.

SIT numerus A, numeri BC, eadem pars, quæ numerus D, numeri EF, sintque A, BC, minores ipsis D, EF, singuli singulis. De his enim propositio intelligenda est. Dico & vicissim eandem partem esse, aut easdem partes A, ipsius D, qualis est, aut quales BC, ipsius EF. Diuisis enim numeris BC, EF, in partes BG, GC, & EH, HF, ipsis A, & D, æquales; erit multitudo partium numeri BC, æqualis multitudini partium numeri EF. Quia vero BG, GC, inter se sunt æquales, & minores quam EH, HF, quæ inter se etiam æquales sunt, quod & totus BC, toto EF, minor ponatur; Erit BG, ipsius EH, eadem pars, aut partes, quæ GC, ipsius HF; [a] ac propterea & vterque BG, GC, simul, nimirum BC, secundus vtriusque EH, HF, simul, nimirum EF, quarti, eadem pars, vel partes, quæ BG, ipsius EH, hoc est, quæ A, primus ipsius D, tertii. Si numerus igitur numeri pars fuerit, &c. Quod demonstrandum erat.

A ....
B .... G C
D .....
E ..... H ..... F

[a] 5. vel 6. septimi.

SCHOLIVM.

A, $\frac{3}{11}$ B, $\frac{3}{11}$ G, $\frac{3}{11}$ C D, $\frac{7}{22}$ E, $\frac{14}{22}$ H, $\frac{14}{22}$ F

IN numeris fractis propositio hæc, vnà cum eius demonstratione locum etiam habet, vt hic perspicuum est.

QVOD si loco primi numeri vnitas accipiatur, qua numeri alicuius pars sit, quæ alter numerus alterius: Erit vicissim vnitas tertij numeri eadem pars, quæ secundus numerus quarti; id quod eodem argumento confirmabitur, si loco partium assumamus partem in demonstratione, vt ex hoc exemplo apparet.

A .
B . G . C
D .....
E ..... H ..... F

10. THEOR. 8. PROPOS. 10.

SI numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et vicissim, quæ partes est primus tertij, aut pars, eædem partes erit & secundus quarti, aut pars.

SIT numerus AB, eædem partes numeri C, quæ numerus DE, numeri F, sintque AB, C, ipsis DE, F, minores, singuli singulis. De his enim etiã intelligenda est hæc propositio, sicut & antecedens. Dico & vicissim, numerum AB, easdem partes esse, aut partem numeri DE, quæ numerus C, est numeri F. Diuisis enim numeris AB, DE, in partes AG, GB, & DH, HE, numerorum C, & F; erit multitudo partium in AB, æqualis multitudini partium in DE, & tam AG, quam GB, eadem pars ipsius C, quæ tam DH, quam HE, ipsius F. [a] Vicissim ergo eadem pars erit, aut partes AG, ipsius

A..G..B
C.....
D.....H.....E
F.....

[a] 9. septimi.

ipsius DH, & GB, ipsius HE, quæ C, ipsius F. Ac propterea eadem pars erit, vel partes AG, ipsius DH, quæ GB, ipsius HE. [a] Igitur & vterque AG, GB, simul, nimirum primus AB, eadem pars erit, aut partes vtriusque DH, HE, simul, nimirum DE, tertij, quæ AG, ipsius DH, hoc est, quæ C, secundus quarti F. Si numerus ergo numeri partes fuerit, & alter alterius, &c. Quod demonstrandum erat.

[a] 5. vel 6. septimi.

SCHOLIVM.

NVMERIS fractis conuenit etiam huius propos. demonstratio, vt in hoc exemplo apparet.

A, $\frac{2}{15}$ G, $\frac{2}{15}$ B
C, $\frac{0}{15}$
D, $\frac{3}{10}$ H, $\frac{3}{10}$ E
F, $\frac{0}{10}$

12. THEOR. 9. PROPOS. 11.

SI fuerit vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum: Et reliquus ad reliquum erit, vt totus ad totum.

SIT vt totus numerus AB, ad totum CD, ita ablatus AE, ad ablatum CF. Dico & reliquum EB, ad reliquum FD, esse, vt est totus AB, ad totum CD.

A..... E..... B
C.....F...D

Cum enim sit, vt AB, ad CD, ita AE, ad CF; [b] erit AB, ipsius CD, & AE, ipsius CF, vel æque multiplex, vel eadem pars, vel eædem partes: vel certe AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter continebit, eandemque insuper illius partem, vel easdem partes. Sit primum AB, ipsius CD, & AE, ipsius CF, æque multiplex. Quo posito, erit e contrario CD, totus totius AB, eadem pars, quæ ablatus CF, ablati AE, propter AB, AE, æque multiplices ipsorum CD, CF. [c] Igitur & reliquus FD, reliqui EB, eadem pars erit, quæ totus CD, totius AB; Ac propterea

[b] 20. defin.

[c] 7. septimi.

[c] contrario AB, ipsius CD, & EB, ipsius FD, æque multiplex erit. [a] Quare erit, vt totus AB, ad totum CD, ita EB, reliquus ad reliquum FD.

a 20. defin.

SIT deinde AB, ipsius CD, & AE, ipsius CF, eadem pars, vel eædem partes. Quo posito, [b] erit & reliquus EB, reliqui FD, eadem pars, vel partes, quæ totus AB, totius CD; [c] Ac proinde, erit vt totus AB, ad totum CD, ita EB, reliquus ad reliquum FD.

A . . . . E . . B
C . . . . . F . . . D

b 7. vel 8. septimi.

c 20. defin.

CONTINEAT tertio AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter, eandemque insuper illius partem, vel partes. Quo posito, erit e contrario CD, totus totius AB, eædem partes, quæ ablatus CF, ablati AE, vt mox demonstrabimus. [d] Reliquus igitur FD, reliqui EB, eædem quoque partes erit, quæ totus CD, totius AB: Ac propterea, e contrario AB, ipsum CD, & EB, ipsum FD, æqualiter continebit, eandemque insuper illius partem, vel partes, vt mox ostendemus. [e] Quare erit, vt totus AB, ad totum CD, ita EB, reliquus ad reliquum FD.

d 8. septimi.

A . . . . . E . . B | A . . . . . E . . . . . B
C . . . . F . . D | C . . . . . F . . . . . D

e 20. defin.

QVOD si AB, totus toti CD, æqualis fuerit, & ablatus AE, ablato CF; perspicuum est reliquum EB, quoque esse æqualem reliquo FD. Nam si ab æqualibus æqualia demantur; quæ remanent, sunt æqualia. Itaque si fuerit, vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum, &c. Quod erat demonstrandum.

A . . . . . E . . . B
C . . . . . F . . . D

SCHOLIVM.

EODEM modo demonstrabitur hoc in fractis numeris. Id quod liquidò constat in his exemplis, quæ exemplis tertij casus demonstrationis respondent.

$A, \frac{6}{9} E \frac{3}{15} B$	$A, \frac{14}{21} E \frac{28}{29} B$
$C, \frac{4}{9} F \frac{2}{15} D$	$C, \frac{1}{21} F \frac{10}{29} D$

LEMMA

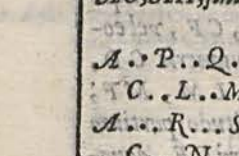
LEMMA.

QVOD autem, si AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter contineat, eandemque insuper partem illius vel partes; e contrario CD, ipsius AB, & CF, ipsius AE, sit eædem partes: Et si CD, ipsius AB, & CF, ipsius AE, sit eædem partes; e contrario AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter contineat, eandemque illius partem vel partes, tam in numeris fractis, quàm in integris; hoc modo demonstrabimus. Contineat primum AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter, nimirum semel, vel bis, vel ter, &c. eandemque insuper partem; GB, quidem ipsius CD, & HE, ipsius CF; ita vt numeri reliqui AG, AH, sint vel æquales ipsis CD, CF, vel eorum æque multiplices. Diuisis igitur numeris CD, CF, in partes CI, IK, KD; & CL, LM, MF, ipsis GB, HE, æquales; erit multitudo partium numeri CD, multitudini partium numeri CF, æqualis, quòd GB, ipsius CD, sit eadem pars, quæ HE, ipsius CF. Similiter diuisis numeris AG, AH, in partes AN, NO, OG; & AP, PQ, QH, eisdem GB, HE, æquales; erit quoque multitudo partium numeri AG, multitudini partium numeri AH, æqualis. Cum enim AG, AH, vel æquales sint ipsis CD, CF, vel eorum æque multiplices; erunt vel tot partes in AG, AH, quot in CD, CF; vel

A . . N . . O . . G . . B
C . . I . . K . . D
A . . P . . Q . . H . . E
C . . L . . M . . F

certe numerus partium numeri CD, totics continebitur in AG, quoties numerus partium numeri CF, in AH; propter eaque multitudo partium numeri AG, multitudini partium numeri AH, æqualis erit. Si igitur ipsis addantur partes GB, HE, erit & multitudo partium numeri AB, multitudini partium numeri AE, æqualis: Atque adeo vna pars numeri CD, eadem pars erit numeri AB, quæ vna pars numeri CF, est numeri AE. Quare cum multitudo partium numeri CD, æqualis sit multitudini partium numeri CF; erit CD, eædem partes numeri AB, quæ CF, ipsius AE.

CONTINEAT deinde AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter, videlicet semel, bis, ter quaterue, &c. easdemque insuper partes illius; numerus quidem AB, partes GB, numeri CD, & numerus AE, partes HE, numeri CF: ita vt reliqui numeri AG, AH, sint rursum vel æquales ipsis CD, CF, vel eorum æquemultiplices. Diuisis igitur numeris GB, HE, in partes GI, IB, & HK, KE, numerorum CD, CF, erit multitudo partium ipsius GB, multitudini partium ipsius HE, æqualis. Similimodo, diuisis numeris CD, CF, in partes CL, LM, MD, & CN, NO, OF, partibus GI, IB, & HK, KE, æquales, erit quoque multitudo partium ipsius CD, multitudini partium ipsius CF, æqualis, propterea quòd quælibet partium numeri GB, eadem pars est numeri CD, quæ vnaquæque partium



partium numeri HE, est numeri CF. Denique diuisis numeris AG, AH, in partes AP, PQ, QG, & AR, RS, SH, eisdem partibus GI, IB, & HK, KE, æquales, erit & multitudo partium numeri AG, æqualis multitudini partium numeri AH. Cum enim AG, AH, vel æquales sint ipsis CD, CF, vel eorum æquemultiplices; erunt vel tot partes in AG, AH, quot in CD, CF, vel certe numerus partium ipsius CD, toties continebitur in AG, quoties numerus partium ipsius CF, in AH; propterea q; multitudo partium numeri AG, multitudini partium numeri AH, æqualis erit: Quibus si addantur æquales multitudines partiũ numerorum GB, HE, erit quoq; multitudo partiũ numeri AB, multitudini partium numeri AE, æqualis; Atq; adeo vna pars numeri CD, eadem pars erit numeri AB, quæ vna pars numeri CF, est numeri AE. Quare cum multitudo partium numeri CD, æqualis sit multitudini partium numeri CF; erit CD, eædem partes numeri AB, quæ CF, ipsius AE. Quod est primo propositum.

IAM vero sit CD, ipsius AB, & CF, ipsius AE, eædem partes. Dico e contrario AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter continere, eandemque insuper illius partem, vel partes. Diuisis enim numeris CD, CF, in partes numerorum AB, AE, erunt eæ multitudine inter se æquales. Item diuisis numeris AB, AE, in partes partibus numerorum CD, CF, æquales, erunt & hæ multitudine inter se æquales. Quare toties continebuntur omnes partes numeri CD, in AB, supereritque eadem pars, vel partes ipsius CD, quoties omnes partes numeri CF,

continentur in AE, & quæ pars, aut partes ipsius CF, supersunt, propter æquales multitudines partium numerorum CD, CF, & AB, AE. Ita enim fit, vt multitudines æquales partium numerorum AB, AE, contineant æqualiter æquales multitudines partium numerorum CD, CF, & insuper in duobus illis numeris supersint partes numerorum CD, CF, multitudine æquales. Quam ob rem AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter continebit, eandemque insuper illius partem, vel partes. Quod secundo est propositum.

13. THEOR. 10. PROPOS. 12.

SI sint quotcunque numeri proportionales, erit quemadmodum vnus antecedentium ad vnum consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes.

SINT quotcunq; numeri proportionales A, B; C, D; E, F; hoc est, vt A, ad B, ita C, ad D, & E, ad F. Dico esse quoq; omnes A, C, E, simul ad omnes B, D, F, simul, vt est A, ad B.

A .... C .. E ...
B ..... D .... F .....

Sint enim primum A, C, E, minores quam B, D, F. Quoniam igitur, propter eandem proportionem,[a] eadem pars est, aut partes A, ipsius B, quæ C, ipsius D, & E, ipsius F; [b] erit quoque vterque A, C, simul vtriusq; B, D, simul eadem pars, aut partes, quæ A, ipsius B, vel E, ipsius F. Rursus quia vterque

[a] *20. defin.*
[b] *5. vel 6. septimi.*

vterque A, C, simul, tanquam vnus, vtriusq; B, D, simul, tanquam vnius, eadem pars est, aut partes, quæ E, ipsius F; [a] erunt & ambo A, C, tanquam vnus, & E, simul, amborum B, D, tanquam vnius, & F, simul eadem pars, vel partes, quæ A, ipsius B. [b] Quare eadem proportio est omnium A, C, E, simul ad omnes B, D, F, simul, quæ ipsius A, ad B.

[a] *5. septimi.*
[b] *20. defin.*

SINT deinde A, C, E, maiores, & æque multiplices numerorum B, D, F. Quo posito, erit e contrario B, ipsius A, eadem pars, quę D, ipsius C, & F, ipsius E; Atq; adeo vt prius, [c] erunt omnes B, D, F, simul omnium A, C, E, simul, eadem pars, quæ B, ipsius A; ideoque & è contrario omnes A, C, E, simul omnium B, D, F, simul, & A, ipsius B, æque multiplices. [d] Quare eadem est proportio omnium A, C, E, simul, ad omnes B, D, F, simul, quæ est A, ad B. Hoc idem verum est, etiamsi aliquæ proportiones multiplices, vel etiam omnes, sint numerorum ad vnitatem. Est enim eadem semper demonstratio, vt hic apparet, adiuuante tamen scholio propos. 5. huius lib.

A .... C ..... E ..... B. D.. F...

A ... C ... E ..... D. D. F..

A.. C.. E... B. D. F.

[c] *5. septimi.*
[d] *20. defin.*

SINT tertio A, C, E, maiores quam B, D, F, at non multiplices. [e] Quia igitur, propter eandem proportionem, A, ipsum B, & C, ipsum D, & E, ipsum F, æqualiter continet, eandemque insuper partem, vel partes; Erit per lemma precedentis propos. B, ipsius A, & D, ipsius C, & F, ipsius E, eædem partes. Igitur vt prius, [f] erunt omnes B, D, F, simul omniũ A, C, E, simul eædem partes, quæ B, ipsius A; Atque adeo per idem lemma, e contrario cõtinebunt omnes numeri A, C, E,

A ..... C .... E .....
B ..... D ... F .....

[e] *20. defin.*
[f] *6. septimi.*

A, C, E, simul, omnes numeros B, D, F, simul, & A, ipsum B, æqualiter, eandemque insuper partem, vel partes. [a] Quare eadem proportio est omnium A, C, E, simul, ad omnes B, D, F, simul, quæ ipsius A, ad B.

[a] 20. defin.

SINT quarto & vltimo A, C, E, ipsis B, D, F, æquales. Quoniam igitur, si æqualibus A, & B, æquales addantur C, & D, fiũt A, C, simul æquales ipsis B, D, simul: quibus si rursum addantur æquales E, & F, fiunt & omnes A, C, E, simul, omnibus B, D, F, simul æquales; Erunt, vt A, ad B, ita omnes A, C, E, simul ad omnes B, D, F, simul, cum vtrobique sit proportio æqualitatis. Si sint igitur quotcunque numeri proportionales, erit, &c. Quod erat demonstrandum.

A....C...E.....
B....D...F.....

SCHOLIVM.

IN numeris quoque fractis propositio hæc vera esse eodem modo conuincetur, vt patet, si pro numeris integris fracti assumantur.

14. THEOR. 11. PROPOS. 13.

SI quatuor numeri proportionales sint: Et vicissim proportionales erunt.

SIT enim A, ad B, vt C, ad D. Dico vicissim esse A, ad C, vt B, ad D. Nã sint primum A, & C, minores quã B, & D; & A, quoq; minor, quam C. Quo posito, erit, propter eandem proportionem, A, ipsius B, & C, ipsius D, eadem pars, vel partes. [b] Vicissim ergo & A, ipsius C, & B, ipsius D, eadem pars erit, vel partes: [c] Ac proinde erit vt A, ad C, ita B, ad D.

A...C.....
B....D.....

[b] 9. vel 10. septimi.
[c] 20. defin.

SINT deinde A, & C, minores quam B, & D; at A, maior quam C. Quo posito, erit, ob eandem proportionem, C, ipsius D, & A, ipsius B, eadem pars, vel partes. [d] Vicissim ergo & C, ipsius A, & D, ipsius B, eadem pars erit, vel partes: Atque adeo e contrario, vel A, ipsius C, & B, ipsius D, æque multiplex erit, vel certe, per lemma propos. 11. huius lib. A, ipsum C, & B, ipsum D, æqualiter continebit, eandemque insuper partem, vel partes. [a] Quare erit vt A, ad C, ita B, ad D.

A.....C...
B.....D....
... .

[d] 9. vel 10. septimi.
[a] 20. defin.

SINT tertio A, & C, maiores quam B, & D; at A, minor quam C. Quo posito, erit ob eãdem proportionem, vel A, ipsius B, & C, ipsius D, æque multiplex; vel certe A, ipsum B, & C, ipsum D, continebit æqualiter, eandemque insuper partem, vel partes; Atque adeo e contrario erit B, ipsius A, & D, ipsius C, vel eadem pars, vel certe, per lemma propos. 11. huius lib. eædem partes. [b] Vicissim ergo & B, ipsius D, & A, ipsius C, eadem pars erit, vel partes, [c] Ac proinde eadem proportio erit B, ad D, quæ A, ad C, hoc est, erit vt A, ad C, ita B, ad D.

A.....C.....
B...D.....
....

[b] 9. vel 10. septimi.
[c] 20. defin.

SINT quarto A, & C, maiores quam B, & D; & A, quoque maior quam C. Quo posito, erit C, ipsius D, & A, ipsius B, ob eandem proportionem, vel æque multiplex, vel certe C, ipsum D, & A, ipsum B, æqualiter continebit, eandemque insuper partem, vel partes; Atque adeo, e contrario, erit D, ipsius C, & B, ipsius A, vel eadem pars, vel certe, per lemma propos. 11. huius lib. eædem partes. [d] Vicissim ergo & D, ipsius B, & C, ipsius A, eadem pars erit, vel partes; Ac propterea e contrario vel B, ipsius D, & A, ipsius C, æque multiplex erit, vel certe, per lemma propos. 11. huius lib. B, ipsum D, & A, ipsum C, continebit æqualiter, eandemque insuper partem, vel partes. [e] Quare eadem proportio erit B, ad D, quæ A, ad C, hoc est, erit vt A, ad C, ita B, ad D.

A.....C.....
B.....D....
.....

[d] 9. vel 10. septimi.
[e] 20. defin.

SINT quinto A, & C, ipsi B, & D, æquales, & A, minor quam C. Quoniam igitur æquales numeri A, & B, æqualium numerorum C, & D, vel eadem pars, vel eædem partes sunt, [f] Erit vt A, ad C, ita B, ad D.

A....C....
B...D....

[f] 20. defin.

SINT

SINT sexto A,& C,ipsis B,& D,æquales,at A, maior quam C. Quia igitur æquales numeri A, & B, æqualium numerorum C,& D,vel æque multiplices sunt, vel certe illi hos æqualiter continent,eandemque insuper partem, vel partes;[a] erit vt A,ad C,ita B,ad D.

A .... C ...
B .... D ...

[a] 20. defin.

SINT septimo ac vltimo A,& C, inter se æquales, siue ij maiores sint quam B,& D,siue minores,siue æquales. [b] Quoniam igitur,ob eandem proportionem, A, ipsius B, & C, ipsius D, æque multiplex est, vel eadem pars, vel eædem partes;vel certe A,ipsum B,& C,ipsum D,æqualiter continet,eandemque insuper partem, vel partes; suntque A, & C, æquales; æquales quoque erunt B, & D; Atque adeo erit, vt A,ad æqualem C,ita B,ad æqualem D. Quocirca, si quatuor numeri proportionales sint, & vicissim proportionales erunt. Quod erat demonstrandum.

A ..... C .....
B ... D ...

[b] 20. defin.

SCHOLIVM.

QVOD si pro numeris integris fractos numeros substituas, demonstrabis eodem modo propositionem hanc veram esse in numeris fractis.

MANIFESTVM quoque est, propositionem hanc non variari, etiamsi aliquis numerorum ponatur vnitas.

COACTI verò sumus in hac propositione, & duabus præcedentibus tot casus recensere, eosque demonstrationibus certissimis confirmare, vna cum lemmate propos. 11. vt earit veritas in omni genere proportionis rationalis appareret. Theon enim, & nonnulli alij interpretes, illas duntaxat ostendunt in proportionibus rationalibus mineris inæqualitatis, in quibus nimirum antecedentes numeri partes sunt consequentium, vt perspicue ex eorundem auctorum demonstrationibus apparet; nisi maiorem numerum minoris numeri partes esse dicamus, vt nonnulli concedunt, inter quos etiam est (quod miror) Federicus Commandinus præstans Geometra: quod est absurdum, & ab Euclidis instituto alienum, cum partes appellarit

larit numerum numeri, minorem maioris, cum minor non metiatur maiorem. Quod etiam ex defin. 20. Solis luce clarius constat, vbi numeros proportionales docuit esse, cum primus secundi, & tertius quarti æque multiplex est, vel eadem pars, vel eadem partes, &c. Nam si existimaret, maiorem numerum minoris partes esse, satis fuisset dicere, cum primus secundi, & tertius quarti, eadem pars est, vel eadem partes. Ita enim numeros proportionales in omni genere proportionis comprehendisset, vt manifestum est: quare reliqua omnia verba definitionis supernacanea essent.

THEOR. 12. PROPOS. 14. 15.

SI sint quotcunque numeri, & alij illis æquales multitudine, qui bini sumantur, & in eadem ratione: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

SINT quotcunque numeri A, B, C, & alij totidem D, E, F, sitque vt A,ad B, ita D,ad E; & vt B,ad C, ita E, ad F. Dico ex æqualitate quoque esse vt A, ad C, ita D, ad F. Quoniã .n. est, vt A, ad B, ita D, ad E;[a] erit vicissim, vt A, ad D, ita B, ad E: Similiterque, eãdem ob causam, cum sit, vt B, ad C, ita E, ad F; erit vicissim, vt B, ad E, ita C, ad F. Igitur erit vt A, ad D, ita C, ad F; (Cũ enim vtraque proportio A, ad D, & C, ad F, eadem sit proportioni B, ad E, vt demonstratum est; & ipsæ inter se eædem erunt, vt mox ostendetur.) [b] Ac proinde vicissim, vt A, ad C, ita D, ad F.

A ..... D .....
B ..... E .....
C .... F ...
G ..... H .....

[a] 13. septimi.

[b] 15. septimi.

QVOD si fuerint plures numeri, quam tres, ita vt sit etiã quemadmodũ C, ad G, ita F, ad H; Dico adhuc esse, vt A, ad G, ita D, ad H. Cum enim iam sit ostensum in tribus numeris, esse vt A, ad C, ita D, ad F; ponatur autem vt C,

Universidad de Deusto Biblioteca

vt C, ad G, ita F, ad H; erunt tres numeri A, C, G, & alij tres D, F, H, qui bini in eadem ratione sumuntur. Ex æqualitate igitur in tribus numeris ostensa, rursus erit vt A, ad G, ita D, ad H. Eodemque modo idem ostendemus in quinque numeris, per quatuor; sicut id in quatuor numeris demonstratum fuit per tres, & sic de pluribus. Itaque si sint quotcunque numeri, & alij illis æquales multitudine, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

PERSPICVM autem est, hanc propositionem eodem modo demonstrari posse in numeris fractis, si pro numeris integris assumantur fracti numeri.

IDEM verum est, si loco vnius numeri vnitas assumatur, vel etiam loco plurium plures vnitates, vt in hoc exemplo perspicuum est.

A.	D...
B..	E.....
C...	F.....
G.	H...

LEMMA.

QVOD autem duæ proportiones numerorum, quæ eidem proportioni eædem sunt, inter se quoque sint

A	B	C ....
D	E	F ...

eædem, quales sunt in demonstratione proportiones A, ad D, & C, ad F, quæ eædem ostensæ sunt proportioni B, ad E, siue numeri sint integri, siue fracti; ita demonstrabitur. Propter eandem proportionem, erit B, ipsius E, & tam A, ipsius D, quam C, ipsius F, æque multiplex, vel eadem pars, vel eædem partes; vel certe B, ipsum E, & tam A, ipsum D, quam C, ipsum F, continebit æqualiter, eandemque insuper partem, vel partes.

partes. [a] *Quare numeri A, D, C, F, proportionales sunt, vt quidem A, ad D, ita C, ad F. Quod est propositum.* [a] 20. defin.

HOC idem demonstratum fuit ab Euclide lib. 5. de proportionibus magnitudinum, propos. 11.

THEOR. 13. PROPOS. 15. 16.

SI vnitas numerum quempiam metiatur, æque autem alter numerus alterum quendam numerum metiatur: Et vicissim æque vnitas tettium numerum metietur, & secundus quartum.

METIATVR vnitas A, numerum BC, & numerus D, numerum EF, æque. Dico vicissim vnitatem A, numerum D, & numerum BC, numerum EF, æque metiri. Diuiso enim numero BC, in vnitates BG, GH, HC, & numero EF, in partes EI, IK, KF, ipsi D, æquales; erit multitudo vnitatum numeri BC, æqualis multitudini partium numeri EF, metieturq; æque vnitas A, numerum D, & vnitas BG, ipsum EI, atque vnitas GH, ipsum IK, & vnitas HC, ipsum KF: atque idcirco eadem pars erit vnitas A, numeri D, & vnitas BG, numeri EI, quæ vnitas GH, numeri IK, & vnitas HC, numeri KF. Quare per ea, quæ ad propos. 5. huius lib. ostendimus, eadem pars erunt vnitates BG, GH, HC, simul numerorum EI, IK, KF, simul, quæ vnitas BG, numeri EI, hoc est, quæ vnitas A, numeri D; Ac proinde vnitas A, numerum D, & numerus BC, ex vnitatibus BG, GH, HC, compositus, numerum EF, ex numeris EI, IK, KF, compositum æque metietur. Si vnitas

A.	D..
B.G.H.C	E..I..K..F

vnitas igitur numerum quempiam metiatur, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

ILLVD idem, quod Euclides demonstrauit de numeris, propos. 13. ostendit hoc loco separatim de vnitate, & tribus numeris, propterea quod vnitas non est numerus. Quod quidem breuius ita nos demonstrabimus. Quia vnitas A, numerum BC, æque metitur, atque numerus D, numerum EF; erit vnitas A, eadem pars numeri BC, quæ numerus D, numeri EF. Per ea igitur, quæ ad propos. 9. demonstrauimus, erit vicissim vnitas A, eadem pars numeri D, quæ numerus BC, numeri EF; Ac propterea vnitas A, numerum D, & numerus BC, numerum EF, æque metietur.

HÆC propositio fractis numeris conuenire non potest. Nã si vnitas numerum quempiam metiatur, æque autem alter numerus fractus alterum quendam numerum fractum metiatur: non metietur vicissim æque vnitas tertium numerum, qui fractus ponitur, & secundus integer quartum fractum; [a] *sed solum eandem habebit rationem vnitas ad numerum tertium, quam secundus ad quartum.*

[a] *15. defin.*

17. THEOR. 14. PROPOS. 16.

SI duo numeri mûtuo se se multiplicantes fecerint aliquos; geniti ex ipsis æquales inter se erunt.

E.
A . . . B . . . .
D ..... C .....

DVO numeri A, & B, se mutuo multiplicantes faciant numeros C, & D, ita vt A, multiplicans ipsum B, faciat C, at B, ipsum A, multiplicans faciat D. Dico numeros C, & D, inter se æquales esse. Sumpta enim vnitate E; cum A, ipsum B, multiplicans faciat C; [b] erit C, ex B, toties compositus, quot sunt in A, vnitates; atque adeo vnitas

[b] *15. defin.*

vnitas E, numerum A, & numerus B, numerum C, æque metietur. [a] Vicissim ergo & vnitas E, numerum B, & numerus A, numerum C, metietur æque. Rursus eodem modo, quia B, multiplicans ipsum A, facit D; [b] erit D, ex A, toties compositus, quot sunt in B, vnitates; atq; adeo vnitas E, numerum B, & numerus A, numerum D, æque metietur: Metiebatur autem & eadem vnitas E, eundem numerum B, & numerus idem A, numerũ C, æque. Aeque igitur numerus A, vtrumq; numerum C, & D, metietur; Ac proinde C, & D, inter se æquales erunt. Si duo igitur numeri mutuo se se multiplicantes, fecerint aliquos, &c. Quod demonstrandum erat.

[a] *15. septimi.*
[b] *15. defin.*

SCHOLIVM.

IN numeris fractis hæc propositio ita demonstranda est. Quoniam A, multiplicans B, facit C, erit C, ad B, vt A, ad E, vnitatem, ex defin. multiplicationis. Ergo permutando, vt C, ad A, ita E.
B, ad E, vnitatem. Sed ex eadem de- A, $\frac{2}{3}$. B, $4\frac{5}{7}$.
fin. vt B, ad E, vnitatem, ita quoque D, $3\frac{1}{7}$. C, $3\frac{1}{7}$,
est D, ad A, quòd B, multiplicans A, facit D. Igitur erit, vt C, ad A, ita D, ad eundem A, ex lemmate propos. 14. ac proinde æquales inter se erunt C, & D. Quod erat ostendendum.

POTEST hæc eadem propositio cum Campano in hunc modum proponi.

SI duo numeri se mutuo multiplicauerint, procreabitur vnus idemque numerus.

MVLTIPLICET enim A, ipsum B, faciatque C. Dico eundem C, gigni, si B, ipsum A, multiplicet. Nam vt prius, cum A, multiplicans ipsum B, faciat C, ostendemus vnitatem E, numerum B, & numerum A, numerum C, æque metiri. At vero, si numerus B, ipsum A, multiplicet, [c] *etiam vnitas E, numerum B, & numerus A, numerum factum æque metitur.*

E. A . . . B . . . . C . . . . . Idem

[c] *15. defin.*

Idem ergo numerus C, gignitur ex multiplicatione B, in A, quandoquidem ipsum numerus A, æque metitur, atque vnitas E, ipsum B.

QVOD si numeri A, & B, sint fracti ambo, vel vnus eorum, demonstrabimus idem hoc modo.

E . *Quoniam A, multiplicans B, facit C;*
A ... B .... *erit ex defin. 15. vt C, ad B, ita A, ad*
C ..... *E, vnitatem: Et permutando, vt C, ad A, ita B, ad E, vnitatem. At si B, multiplicet A, erit ex eadem defin. 15. B, ad E, vnitatem, vt factus numerus ad A. Erit igitur C, ad A, vt numerus hic factus ad eundem A; ac proinde factus hic numerus idem erit, qui C. Quod est propositum.*

18. ## THEOR. 15. PROPOS. 17.

SI numerus duos numeros multiplicans fecerit aliquos; Geniti ex ipsis eandem rationem habebunt, quam multiplicati.

NVMERVS enim A, multiplicans numeros B, C, faciat D, E. Dico esse, vt B, ad C, ita D, ad E. Assumpta enim vnitate F; [a] erit D, ex B, compositus toties, quoties vnitas F, est in A: similiterque toties E, compositus erit ex C, quoties eadem vnitas F, est in eodem A: Atque adeo B, ipsum D, & C, ipsum E, æque metietur. Quare B, ipsius D, & C, ipsius E, eadem pars erit; [b] Ac proinde, erit vt B, ad D, ita C, ad E, [c] & permutando, vt B, ad C, ita D, ad E. Si numerus igitur duos numeros multiplicans fecerit aliquos, &c. Quod ostendendum erat.

F .
A . . .
B . . C . . . .
D ..... E .....

[a] *15. defin.*
[b] *20. defin.*
[c] *13. septimi.*

SCHO-

SCHOLIVM.

SI numeri A, B, C, sint fracti, vel vnus eorum, vel duo, idem ostendemus hoc modo. Quoniam A, multiplicans B, & C, facit D, & E; erit ex defin. 15. tam D, ad B, quàm E, ad C, vt A, ad F, vnitatem; ac proinde, ex lemmate propos. 14. vt D, ad B, ita E, ad C. Igitur permutando, vt D, ad E, ita B, ad C. Quod est propositum.

THEOR. 16. PROPOS. 18. 19.

SI duo numeri numerum quempiam multiplicantes, fecerint aliquos: Geniti ex ipsis eandem rationem habebunt, quam multiplicantes.

NVMERI enim A, & B, multiplicantes numerum C, faciant D, & E. Dico esse vt A, ad B, ita D, ad E. Cum enim ex A, in C, fiat D; [a] fiet quoque idem D, ex C, in A. Eademq; ratione, cum ex B, in C, fiat E; fiet idem E, ex C, in B. Quia igitur idem C, multiplicans ipsos A, & B, facit D, & E; [b] erit, vt A, ad B, ita D, ad E. Si duo ergo numeri numerum quempiam multiplicantes, fecerint aliquos, &c. Quod erat demonstrandum.

A . . . . B . . . . .
C . . .
D ..... E .....

[a] *16. septimi.*
[b] *17. septimi.*

SCHOLIVM.

LIQVIDO constat, eandem hanc propositionem eodem modo demonstrari, si numeri A, B, C, sint fracti, vel vnus eorum, vel duo.

HANC autem propositionem, & præcedentem, ad quotcunq; numeros cum Campano accommodabimus, siue numeri omnes sint integri, siue non; hac ratione.

SI numerus qnotcunque numeros multipli cet, vel quotcunque numeri numerum quempiam multiplicent; Habebunt producti numeri easdem rationes, quos numeri multiplicati, vel multiplicantes.

FIANT enim E, F, G, ex A, in B, C, D, vel ex B, C, D, in A. Dico easdem rationes habere numeros productos E, F, G, quas numeri multiplicantes, vel multiplicati B, C, D, habent: hoc est, esse, vt B, ad C, ita E, ad F; & vt C, ad D, ita F, ad G. Nã cum ex A, in B, C, vel ex B, C, in A, fiant E, F; [a] *erit vt B, ad C, ita E, ad F. Similiter quia ex A, in C, D, vel ex C, D, in A, fiunt F, G; erit quoque vt C, ad D, ita F, ad G. Atque ita de cæteris.*

A . . .
B . . C . . . D . . . .
E ..... F ..... G .....

[a] *17. vel 18. septimi.*

19. THEOR. 17. PROPOS. 19.

SI quatuor numeri proportionales fuerint; qui ex primo, & quarto fit, numerus, æqualis erit ei, qui ex secundo, & tertio fit, numero. Et si, qui ex primo, & quarto fit, numerus, æqualis fuerit ei, qui ex secundo, & tertio fit, numero; ipsi quatuor numeri proportionales erunt.

SINT quatuor numeri proportionales A, B, C, D, vt quidem A, ad B, ita C, ad D; fiatque E, ex A, primo in D, quartum; & F, ex B, secundo C, tertium. Dico numeros E, F, æquales inter se esse. Fiat enim rursus G, ex A, in C.

in C. Quia igitur ex A, in C, D, fiunt G, E; [a] erit, vt C, ad D, hoc est, vt A, ad B, ita G, ad E. Rursus quia ex A, & B, in C, fiunt G, & F; [b] erit quoque, vt idem A, ad B, ita G, ad F. Quare, per lemma propos. 14. habebit G, ad E, & F, eandem proportionem; eam videlicet, quam habet A, ad B; Ac proinde E, & F, numeri æquales erunt, ex ijs, quæ ad defin. 20. scripsimus.

A . . .
B . .
C . . . . .
D . . . .
E . . . . . .
F . . . . . .
G . . . . . .

[a] *17. septimi.*
[b] *18 septimi.*

SED iam sit E, ex A, primo in D, quartum genitus, æqualis ipsi F, producto ex B, secundo in C, tertium. Dico quatuor numeros A, B, C, D, proportionales esse, vt quidem A, ad B, ita C, ad D. Fiat enim rursus G, ex A, in C. Quia ergo ex A, in C, D, fiunt G, E; [c] erit vt C, ad D, ita G, ad E, vel ad F, ipsi E, æqualem. Habet enim G, ad æquales E, F, eandem rationem, vt ad defin. 20. docuimus. Rursus, quoniam ex A, & B, in C, fiunt G, & F; [d] erit quoque, vt A, ad B, ita idem G, ad eundem F. Quare proportiones A, ad B, & C, ad D, cum eædẽ sint proportioni G, ad F, eædem inter se erunt, per lemma propos. 14. Ac proinde erit, vt A, ad B, ita C, ad D. Si quatuor ergo numeri proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

[c] *17. septimi.*
[d] *18. septimi.*

SCHOLIVM.

LVCE clarius est, eandem demonstrationem huius propos. locum habere in numeris fractis, siue omnes fracti sint, sine non.

POTERAT huius theorematis prima pars proponi etiã ad hunc modum tam in numeris fractis, quàm in integris.

SI duo numeri duos numeros eandem, quã illi, habentes rationem multiplicent, antecedens nimirum illorum consequentem horum, & consequens antecedentem; geniti ex ipsis, æquales inter se erunt.

IT A enim ostensum est numerum E, qui fit ex A, antecedente in D, consequentem, æqualem esse numero F, qui procreatur ex B, consequente in C, antecedentem.

SED & sequens theorema tam in fractis numeris, quàm in integris facile ex hac propos. 19. demonstrabitur.

SI maior fuerit proportio primi ad secundũ, quàm tertij ad quartum; qui ex primo & quarto fit, numerus, maior erit eo, qui ex secundo & tertio fit, numero: Et si, qui ex primo & quarto fit, numerus, maior fuerit eo, qui ex secundo & tertio fit, numero; maior erit proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum.

SIT primum maior proportio primi A, ad B, secundum, quàm C, tertij ad D, quartum. Dico numerum ex A, in D, procreatum, esse maiorem eo, qui fit ex B, in C. Nam si intelligatur esse E, ad B, vt C, ad D; (siue E, numerus integer sit, siue fractus; siue integer cum fracto: qui quidem reperietur, vt ad propos. 19. lib. 9. ostendemus si numerus ex B, in C, procreatus diuidatur per D.) erit quoque maior proportio A, ad B, quàm E, ad B: ac proinde A, maior erit, quã E. Quare maior numerus fiet ex A, in D, quàm ex E, in eundem D: [a] At qui fit ex E, in D, æqualis est ei, qui fit ex B, in C. Igitur & numerus ex A, in D, genitus, maior erit, quàm numerus ex B, in C, procreatus. Quod est propositum.

A ..... E .....
B ....
C .....
D .....

[a] 19. septimi.

FIAT deinde maior numerus ex A, in D, quàm ex B, in C. Dico maiorem proportionem esse A, primi ad B, secundum, quàm C, tertij ad D, quartum. Si namque intelligatur numerus E, ex quo in D, idem numerus fiat, qui ex B, in C; (siue E, numerus sit integer, siue fractus, aut integer cum fracto) fiet quoque maior numerus ex A, in D, quàm ex E, in eundem D: ac proinde maior erit A, quàm E. Quare maior erit proportio A, ad B, quàm E, ad B: [b] At ita est E, ad B, vt C, ad D. Igitur maior erit quoque proportio A, ad B, quàm C, ad D. Quod est propositum.

[b] 19. septimi.

QVOD

QVOD si minor fuerit proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum; qui ex primo & quarto fit, numerus, minor erit eo, qui ex secundo & tertio fit, numero: Et si, qui ex primo & quarto fit, numerus, minor fuerit eo, qui ex secundo & tertio fit, numero; minor erit proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum. Eadem enim omnino demonstratio erit, si modo vocem, maioris, mutes in vocem, minoris. Vt in hoc apposito exemplo apparet. Quod tamen ita etiam ostendi potest. Quoniam minor est proportio A, ad B, quàm C, ad D: hoc est, maior est proportio C, primi ad D, secundum, quàm A, tertij ad B, quartum; maior fiet numerus ex C, primo in B, quartum, siue ex B, in C, quàm ex D, secundo in A, tertium, siue ex A, in D, vt demonstratum iam est: hoc est, minor numerus fiet ex A, in D, quàm ex B, in C. quod est propositum. Deinde si minor numerus fiat ex A, in D, quàm ex B, in C; hoc est, maior ex B, in C, siue ex C, in B, quàm ex A, in D, siue ex D, in A; erit maior proportio C, primi ad D, secundum, quàm A, tertij ad B, quartum, vt tam est demonstratum: hoc est, minor proportio erit A, ad B, quàm C, ad D. Quod est propositum.

A ..... E .....
B ....
C ...
D ..

THEOR. 18. PROPOS. 20. 20.

SI tres numeri proportionales fuerint; qui sub extremis continetur, æqualis est ei, qui a medio efficitur: Et si, qui sub extremis continetur, æqualis fuerit ei, qui a medio describitur; ipsi tres numeri proportionales erunt.

SINT tres numeri proportionales A, B, C, vt quidem A, ad B, ita B, ad C. Dico numerum qui fit ex A, primo in C, tertium, æqualem esse ei, qui ex B, medio procreatur. Sumpto enim D, qui ipsi B, sit æqualis, erit vt

B, ad C, hoc est, vt A, ad B, ita D, ad C; numerusque genitus ex B, in D, æqualis erit ei, qui ex B, in se procreatur. Quia igitur quatuor numeri A, B, D, C, proportionales sunt, [a] erit numerus factus ex A, in C, æqualis ei, qui fit ex B, in D, hoc est, ei, qui ex B, in se producitur.

A.....
B.....D.....
C....

[a] 19. septimi.

SED iam sit numerus productus ex A, primo in C, tertium, æqualis ei, qui fit ex B, medio in se. Dico tres numeros A, B, C, proportionales esse. Sumpto enim rursum D, æquali ipsi B; erit, vt B, ad C, ita D, ad C; & numerus, qui fit ex B, in D, æqualis erit ei, qui fit ex B, in se, hoc est, ei qui fit ex A, in C. Quoniam igitur numerus, qui fit ex A, primo in C, quartum, æqualis est ei, qui fit ex B, secundo in D, tertium, [b] erunt quatuor numeri A, B, D, C, proportionales, vt quidem A, ad B, ita D, ad C, vel B, ad C. Si tres igitur numeri proportionales fuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

[b] 19. septimi.

SCHOLIVM.

DEMONSTRATIO hæc non variabitur, etiamsi numeri A, B, C, sint fracti, vel partim integri, partim fracti.

QVOD si maior fuerit proportio primi ad secundum, quàm secundi ad tertium; maior fiet numerus ex primo in tertium, quàm ex secundo in se: Et si maior numerus fiat ex primo in tertium, quàm ex secundo in se; maior erit proportio primi ad secundum, quàm secundi ad tertium. Item si minor fuerit proportio primi ad secundum, quàm secundi ad tertium; minor numerus fiet ex primo in tertium, quàm ex secundo in se: Et si minor numerus fiat ex primo in tertium, quàm ex secundo in se; minor proportio erit primi ad secundũ, quam secundi ad tertium. Id quod ex scholio antecedentis propos. liquet, si secundo numero sumatur alius æqualis, vt habeantur

A.....
B.....D.....
C.....

A....
B.....D.....
C.....

habeantur quatuor numeri. Tunc enim erit maior proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum, aut minor, &c. vt in appositis exemplis apparet, etiamsi numeri sint fracti, vel partim fracti, partim integri.

THEOR. 19. PROPOS. 21. 21.

MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, metiuntur æque numeros eandem cum eis rationem habentes, maior quidem maiorem, minor vero minorem.

SINT numeri AB, CD, minimi in proportione eadem, quam habent alij duo numeri maiores E, F, ita vt sit, quemadmodum AB, ad CD, ita E, ad F. Dico AB, CD, æque metiri ipsos E, F; maiorem quidem AB, ipsum maiorem E, at minorem CD, ipsum minorem F: hoc est, antecedentem, ipsum antecedentem, & consequentem, ipsum consequentem. Cum enim sit, vt AB, ad CD, ita E, ad F; [a] erit vicissim, vt AB, ad E, ita CD, ad F; Atque adeo cum AB, CD, minores sint, quam E, F; [b] erit AB, ipsius E, & CD, ipsius F, eadem pars, vel partes. Partes quidem nequaquam: Diuisis namque, si fieri potest, AB, CD, in partes AG, GB; CH, HD, numerorum E, F; erit multitudo partium AG, GB, æqualis multitudini partium CH, HD; Ac propterea AG, ipsius E, & CH, ipsius F, eadem pars. [c] Erit ergo, vt AG, ad E, ita CH, ad F; [d] & vicissim, vt AG, ad CH, ita E, ad F, vel AB, ad CD; Ac proinde numeri AG, CH, minores quam AB, CD, eandem habebunt proportionem, quam AB, CD. Quod est absurdum; cum AB, CD, in sua proportione ponantur minimi. Nõ ergo AB, ipsius E, & CD, ipsius F, eædem partes sunt. Quare eadem pars; Ac propterea AB, ipsum E, & CD, ipsum

A...G..B
C..H..D
E.....
F.....

[a] 13. septimi.
[b] 20. defin.
[c] 20. defin.
[d] 13. septimi.

ipsum F, æqualiter metietur. Minimi ergo numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

IDEM hoc verum est, si quis dicat, tres numeros esse continuè proportionales, primosq; duos esse in sua proportione minimos. Hoc enim posito, ostendetur eodem modo, primum metiri secundum; & secundum, tertium, vt in hoc apposito exemplo apparet, vbi tertius numerus secundo æqualis est. Quamuis autem dari non possint tres numeri continuè proportionales, quorum duo primi in sua proportione sint minimi, nisi primus sit vnitas; idem tamen demonstratur in tribus, etiamsi primus ab aduersario non dicatur esse vnitas, vt diximus. Quod idcirco dixerim, vt propositio 12. lib. 9. demonstrari possit, in qua aduersarius cogitur concedere, tres numeros esse continuè proportionales, primosq; duos esse in sua proportione minimos, ac proinde primum metiri secundum. ex hac propos. quod ante negauerat. Sed hoc planius fiet in propos. 12. lib. 9.

A ----- G --- B
C ..... H ..... D
E .....
F .....

PAR I ratione, & hoc verum est, quod Campanus docet.

QVOTLIBET numeri minimi in continuatione suarum proportionum, siue eædem sint, siue diuersæ proportiones, metiuntur æque totidem alios numeros, qui easdem cum eis proportiones habent, primus primum, secundus secundum, tertius tertium, &c.

SINT enim plures, quam duo numeri AB, CD, EF, minimi in continuatione suarum proportionum, siue eadem sit

A... K ...B C.. L. D E .... M .... F
G ..... H ..... I .....

proportio AB, ad CD, qua CD, ad EF, siue non; ita vt non possint

possint reperiri alij numeri ipsis AB, CD, EF, minores, quorum primus ad secundum sit, vt AB, ad CD; & secundus ad tertium, vt CD, ad EF, &c. (quamuis tales proportiones reperiantur seorsum in minoribus numeris non continuatis; nimirum proportio AB, ad CD, in numeris 4. ad 2. vel 2. ad 1. qui minores sunt ipsis AB, CD; quemadmodum & proportiones numerorum 16. 20. 25. qui minimi sunt in continuatione duarum proportionum subsesquiquartarum, cum in minoribus numeris non possint continuari, reperiuntur seorsum in minoribus numeris; proportio quidem 16. ad 20. in 8. & 10. proportio vero 20. ad 25. in 4 & 5. vel in 12. & 15.) Sint deinde totidem numeri G, H, I, non minimi, continuati in eisdem proportionibus, nimirum G, ad H, vt AB, ad CD; & H, ad I, vt CD, ad EF. Dico AB, ipsum G, & CD, ipsum H, & EF, ipsum I, metiri æque. Cum enim sit vt AB, ad CD, ita G, ad H; [a] erit vicissim vt AB, ad G, ita CD, ad H. Eodem modo, cum sit vt CD, ad EF, ita H, ad I; [b] erit quoque vicissim, vt CD, ad H, ita EF, ad I. [c] Quare AB, ipsius G, & CD, ipsius H, & EF, ipsius I, erit vel eadem pars, vel eadem partes. Partes quidem nequaquam. Diuisis enim, si fieri potest, AB, CD, EF, in AK, KB; CL, LD; EM, MF, partes numerorum G, H, I, erunt tot partes in AB, quot in CD, & in EF: atque adeo AK, ipsius G, & CL, ipsius H, eadem pars. [d] Erit ergo vt AK, ad G, ita CL, ad H; [e] & vicissim vt AK, ad CL, ita G, ad H, vel AB, ad CD. Eodemque modo erit, vt CL, ad EM, ita CD, ad EF. Quare continuantur numeri AK, CL, EM, in proportionibus numerorum AB, CD, EF, & minores quam AB, CD, EF. Quod est absurdum, cum hi ponantur in suarum proportionum continuatione minimi. Non ergo AB, CD, EF, eadem partes sunt numerorum G, H, I. Quare singuli singulorum eadem pars; Ac propterea AB, ipsum G, & CD, ipsum H, & EF, ipsum I, æque metietur. Quod est propositum.

[a] 13. septimi.
[b] 13. septimi.
[c] 20. defin.
[d] 20. defin.
[e] 13. septimi.

QVOD si tres numeri dati A, B, C, minimi sint in continuatione suarum proportionũ, ita vt etiam quilibet duo minimi sint, faciliùs idem hoc modo demonstrabitur. Sint alij tres D, E, F, non minimi, qui easdem habeant proportiones, quas A, B, C. Dico A, B, C, ipsos D, E, F, æque

A.. B..... C ...
D ..... E ..... F .....

A.. B..... C... D....E..... F..... æque metiri. Nam per hanc propos. 21. A, B, cum sint minimi in proportione A, ad B, æque metientur ipsos D, E; eademque ratione B, C, ipsos E, F. Quare cum A, ipsum D, & C, ipsum F, æque metiatur, ac B, ipsum E; metientur æque omnes A, B, C, ipsos D, E, F.

CÆTERVM hæc propositio cum suo scholio nullo modo conuenire potest numeris fractis: propterea quòd in numeris fractis dari non possunt minimi numeri in sua proportione, sed quibusuis datis, dari possunt alij minores, in infinitum. Atque hoc idem intelligendum est in omnibus alijs propositionibus, in quibus minimorum numerorum mentio fit. Ea enim omnes de numeris tantum integris sunt intelligenda. Sic etiam quando de numeris inter se primis agitur, excludendi sunt numeri fracti, cum hi non possint esse inter se primi, sed quoscunque metiri possit aliqua fractio, tanquam mensura communis. Nam si reducantur ad eandem denominationem, perspicuum est, eos habere vnam particulam, vel plures, eiusdem denominationis, mensuram communem. Alia autem omnes propositiones numerorum, in quibus minimi numeri in sua proportione, vel primi non adhibentur, æquè conueniunt & integris numeris, & fractis. quod satis est semel hoc loco monuisse.

19. THEOR. 20. PROPOS. 22.

SI fuerint tres numeri, & alij ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur, & in eadem ratione, fuerit autem perturbata eorum proportio; Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

SINT tres numeri A, B, C, & totidem D, E, F, qui bini sumantur, & in eadem ratione, sitque perturbata eorum proportio, vt quidem A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita D, ad E. Dico, ex æqualitate quoque esse vt A, ad C, ita D, ad F. Cum enim sit vt A, ad B, ita E, ad F; erit

[a] erit numerus ex A, in F, genitus æqualis numero, qui fit ex B, in E. Pari ratione, cum sit etiam vt B, ad C, ita D, ad E, [b] erit eidem numero, qui fit ex B, in E, æqualis numerus, qui fit ex C, in D; Atque adeo numerus genitus ex A, primo in F, quartum æqualis erit numero ex C, secundo in D, tertium, producto. [c] Quare erit vt A, ad C, ita D, ad F.

A..... H...
B... D...
C..... E.....
G..... F..

[a] 19. septimi.
[b] 19. septimi.
[c] 19. septimi.

QVOD si fuerint plures numeri, quam tres, ita vt sit etiam C, ad G, vt H, ad D; Dico adhuc esse, vt A, ad G, ita H, ad F. Cum enim iam sit ostensum in tribus numeris, esse vt A, ad C, ita D, ad F; ponatur autem vt C, ad G, ita H, ad D; erunt tres numeri A, C, G, & alij tres H, D, F, qui bini in eadem ratione sumuntur, estque eorum proportio perturbata. Ex æqualitate igitur in tribus numeris ostensa, erit rursus, vt A, ad G, ita H, ad F. Eodemque modo idem ostendemus in quinque numeris, per quatuor, sicut id in quatuor numeris demonstratum fuit per tres, & sic de pluribus. Itaque si fuerint tres numeri, & alij ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

EODEM modo demonstrabitur propositio in numeris fractis, vt constat.

QVONIAM verò Euclides ex illis sex modis argumentandi in proportionibus, quos in magnitudinibus lib. 5. & explicauit, & demonstrationibus confirmauit, duos tantum hic in numeris ostendit, nimirum eum, qui a permutata proportione sumitur, propos. 13. & illum, qui ex æqualitate dicitur, propos. 14. & 22. huius lib. non alienum a nostro instituto erit, breuiter reliquos quatuor modos ostendere in numeris, & alia quædam quinti libri sequentibus theorematibus, quæ omnia conueniunt tam fractis numeris, quàm integris.

SI

I.

SI quatuor numeri proportionales sint: Et inuersa ratione, siue conuertendo, proportionales erunt.

SIT, vt A, ad B, ita C, ad D. Dico & conuertendo, siue inuersa ratione, esse vt B, ad A, ita D, ad C.

A..... C...
B.... D..

Cum enim sit A, ad B, vt C, ad D, [a] *erit vicissim A, ad C, vt B, ad D. Rursus quia est B, ad D, vt A, ad C,* [b] *erit vicissim B, ad A, vt D, ad C. Quod est propositum.*

[a] 13. septimi.
[b] 13. septimi.

II.

SI compositi numeri proportionales sint: Hi quoque diuisi proportionales erunt.

SIT vt AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico & diuidendo esse, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Cum enim sit vt AB, ad CB, ita DE, ad FE;

A..... C... B
D..., F.. E

erit vicissim, vt totus AB, ad totum DE, ita ablatus CB, ad ablatum FE: Ac proinde, vt totus AB, ad totum DE, [d] *ita reliquus AC, ad reliquum DF: hoc est, AC, ad DF, vt CB, ad FE.* [e] *Vicissim ergo erit quoque AC, ad CB, vt DF, ad FE. Quod est propositum.*

[c] 13. septimi.
[d] 11. septimi.
[e] 13. septimi.

EADEM ratione demonstrabimus Diuisionem rationis conuersam, & contrariam, vt in lib. 5. Sit enim primum, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico per diuisionem rationis conuersam esse quoque, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF. Cum enim sit, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE; erit quoque diuidendo, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE: Et conuertendo, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF. Quod est propositum.

SIT deinde, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE. Dico per diuisionem rationis contrariam, esse quoque, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Quoniam enim est, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE;

erit conuertendo, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Ergo diuidendo, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF: Et conuertendo, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Quod est propositum.

III.

SI diuisi numeri proportionales sint: Hi quoque compositi proportionales erunt.

SIT vt AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico & componendo esse, vt AC, ad BC, ita DF, ad EF. Cum enim sit, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF; [a] *erit vicissim, vt AB, ad DE, ita BC, ad EF;* [b] *Ac proinde AB, BC, simul ad DE, EF, simul, vt BC, ad EF:* [c] *Et vicissim AB, BC, simul, hoc est, totus AC, ad BC, vt DE, EF, simul, hoc est, totus DF, ad EF. Quod est propositum.*

A..... B... C
D.... E.. F

[a] 13. septimi.
[b] 12. septimi.
[c] 13. septimi.

SIMILITER Compositio rationis conuersa, & contraria ostendetur hoc loco, vt in lib. 5. Sit enim primum, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico per compositionem rationis conuersam esse quoque, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE. Quia enim est, ut AB, ad BC, ita DE, ad EF; erit conuertendo, vt BC, ad AB, ita EF, ad DE: Et componendo, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE. Quod est propositum.

DEINDE sit rursus, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico per compositionem rationis contrariam esse quoque, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Cum enim sit, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF; erit conuertendo, vt BC, ad AB, ita EF, ad DE: Et componendo ergo, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE; Et conuertendo, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod est propositum.

IIII.

SI compositi numeri proportionales sint; Hi quoque per conuersionem rationis proportionales erunt.

SIT

SIT vt AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico, per conuersionem rationis esse quoque, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Cum enim sit, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE; [a] erit vicissim, vt totus AB, ad totum DE, ita ablatus CB, ad ablatum FE; [b] Ac proinde, vt totus AB, ad totum DE, ita erit reliquus AC, ad reliquum DF. [c] Vicissim igitur, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod est propositum.

A ..... C ... B
D .... F .. E

[a] 13. septimi.
[b] 11. septimi.
[c] 13. septimi.

RVRSVS ex his facile demonstrabimus theorema illud in numeris, quod in magnitudinibus ostendit Euclides propos. 24. lib. 5. Videlicet.

V.

SI primus ad secundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & quintus ad secundum eandem rationem, quam sextus ad quartum: Etiam compositus primus cum quinto ad secundum eandem habebit rationem, quam tertius cum sexto ad quartum.

SIT vt AB, primus ad C, secundum, ita DE, tertius ad F, quartum: Item vt BG, quintus ad C, secundum, ita EH, sextus ad F, quartum. Dico ita esse AG, compositum ex primo & quinto, ad C, secundum, vt est DH, compositus ex tertio & sexto, ad F, quartum. Cum enim sit, vt BG, ad C, ita EH, ad F; erit conuertendo vt C, ad BG, ita F, ad FH. Quoniam igitur est vt AB, ad C, ita DE, ad F; & vt C, ad BG, ita F, ad EH; erit ex aequalitate, vt AB, ad BG, ita DE, ad EH. Componendo igitur, vt AG, ad BG; ita DH, ad EH. Itaque cum rursus sit, vt AG, ad BG, ita DH, ad EH: & vt BG, ad C, ita EH, ad F; erit ex aequalitate, vt AG, ad C, ita DH, ad F. Quod est propositum.

A ..... B .. G | D ..... E ... H
C .... | F .....

EODEM

EODEM modo & hoc Theorema ostendemus, quod ad propos. 24. lib. 5. in magnitudinibus demonstrauimus.

VI.

SI duo numeri ad duos numeros eandem habeant rationem; & detracti quidam habeant ad eosdem eandem: Et reliqui ad eosdem eandem rationem habebunt.

SIT vt totus AB, ad C, ita totus DE, ad F; Item vt detractus AG, ad C, ita detractus DH, ad F. Dico & reliquũ GB, esse ad C, vt est reliquus HE, ad F. Cũ enim sit, vt AG, ad C, ita DH, ad F; erit conuertendo, vt C, ad AG, ita F, ad DH; erit ex aequalitate vt AB, ad AG, ita DE, ad DH. Diuidendo ergo vt GB, ad AG, ita HE, ad DH. Itaque cum rursus sit, vt GB, ad AG, ita HE, ad DH; & vt AG, ad C, ita DH, ad F; erit ex aequalitate, vt GB, ad C, ita HE, ad F. Quod est propositum.

A ..... G .. B D ..... H ... E
C .... F .....

ITEM & hoc demonstrabimus.

VII.

SI primus ad secundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & primus ad quintum eandem, quam tertius ad sextum: Etiam primus ad compositum secundum cum quinto eandem rationem habebit, quam tertius ad quartum cum sexto.

SIT vt primus A, ad secundum BC, ita tertius D, ad quartum EF; & vt primus A, ad quintũ CG, ita tertius D, ad sextum FH. Dico ita esse A, primum ad BG, compositũ ex

secundo & quinto, vt est D, tertius ad E H, compositum ex quarto & sexto. Cum enim sit, vt A, ad B C, ita D, ad EF; erit conuertendo, vt BC, ad A, ita E F, ad D. Quia igitur est vt BC, ad A, ita EF, ad D; & vt A, ad C G, ita D, ad FH; erit ex æqualitate vt BC, ad CG, ita EF, ad FH; & componendo, vt BG, ad CG, ita EH, ad FH; & conuertendo, vt CG, ad BG, ita FH, ad EH. Quoniam ergo est, vt A, ad CG, ita D, ad FH; & vt C G, ad B G, ita F H, ad E H; erit ex æqualitate, vt A, ad B G, ita D, ad E H. Quod est propositum.

A..... D.....
B....C..G E..... F.... H

DENIQVE ex his omnibus inferemus hoc theorema.

VIII.

SI quotcunque numeri ad eundem habuerint proportiones, quas alij illis multitudine æquales ad quendam alium eundem; Habebũt quoque illi omnes simul ad eundem, proportionem, quam alij omnes hi simul ad alium illum eundem. Et si idem numerus ad quotcunque numeros proportiones habuerit, quas idem alius numerus ad alios multitudine illis æquales; Habebit quoque idem numerus ad omnes illos simul proportionem, quam idem alius numerus ad hos omnes simul.

HABEANT quotcunque numeri AB, BC, CD, ad eundem E, proportiones, quas totidem FG, GH, HI, habent ad eundem K: Hoc est, sit vt AB, ad E, ita FG, ad K; & vt BC, ad E, ita GH, ad K; & vt CD, ad E, ita HI, ad K. Dico omnes illos simul, hoc est, ipsum AD, ad E, eandem habere proportionem, quam hi omnes simul habent, hoc est, quam ipse FI, habet ad K. Cum enim sit, vt AB, primus ad E, secundum, ita FG, tertius ad K, quartum: Item vt BC, quintus ad E, ad E, secundum, ita GH, sextus ad K, quartum; erit quoq; vt AC, primus cum quinto, ad E, secundum, ita FH, tertius cum sexto, ad K, quartum. Rursus quia est, vt AC, primus ad E, secundum, ita FH, tertius ad K, quartum: Item vt CD, quintus ad E, secundum, ita HI, sextus ad K, quartum; erit etiam, vt AD, primus cum quinto, ad E, secundum, ita FI, tertius cum sexto, ad K, quartum: Atque ita de cæteris, si plures fuerint.

A....B..... C..... D
E.....

F..G...H....I
K.....

SED habeat iam idem numerus E, ad numeros quotcunque AB, BC, CD, proportiones easdem, quas idem alius numerus K, ad totidem FG, GH, HI; Hoc est, sit vt E, ad AB, ita K, ad FG; & vt E, ad BC, ita K, ad GH; & vt E, ad CD, ita K, ad HI. Dico esse, vt E, ad omnes illos simul, nimirum ad AD, ita K, ad hos omnes simul, vtpote ad FI. Cum enim sit, vt E, primus ad AB, secundum, ita K, tertius ad FG, quartum: Item vt E, primus ad BC, quintum, ita K, tertius ad GH, sextum; erit quoque, vt E, primus ad AC, secundum cum quinto, ita K, tertius ad FH, quartum cum sexto. Rursus quia est, vt E, primus ad AC, secundum, ita K, tertius ad FH, quartum: Item vt E, primus ad CD, quintum, ita K, tertius ad HI, sextum; erit etiam, vt E, primus ad AD, secundum cum quinto, ita K, tertius ad FI, quartum cum sexto. Atque ita de reliquis, si plures fuerint.

IAM vero, his demonstratis, ostendentur nouem vltimæ propositiones lib. 5. à Campano adiectæ, eodem modo in numeris improportionalibus, quo in magnitudinibus demonstratæ fuere; si pro magnitudinibus intelligantur numeri siue integri, siue fracti, & pro modis argumentandi in proportionibus, qui libro 5. sunt demonstrati, assumantur ijdem modi hoc lib. demonstrati: Vt opus non sit eas hic repetere. Satis enim est, vt dixi, si propositiones illæ quinti lib. in manus sumantur, & magnitudines intelligantur esse numeri, eademq; prorsus demonstrationes adhibeantur.

21.

THEOR. 21. PROPOS. 23.

PRIMI inter se numeri, minimi sunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

SINT numeri A, B, inter se primi. Dico eos esse minimos omnium, qui eandem proportionem habent, quâ ipsi A, & B. Nam si non sunt minimi, erunt aliqui alij minores ipsis, minimi habentes proportionem, quam A, & B. Sint ergo, si fieri potest, C, D, minimi in proportione A, & B, minoresque ipsis A, & B. Quoniam igitur C, D, minimi sunt in proportione A, & B; [a] metietur C, ipsum A, & D, ipsum B, æque; atque adeo secundum eundem numerum, qui sit E, ita vt C, toties metiatur ipsum A, & D, ipsum B, quoties vnitas est in E. Itaque cum vnitas numerum E, & numerus C, numerum A, æque metiatur; [b] metietur & vicissim æque vnitas numerum C, & numerus E, numerum A. Rursus quia vnitas numerum E, & numerus D, numerum B, æque metitur; [c] metietur quoque vicissim æque vnitas numerum D, & numerus E, numerum B; Atque adeo, cum idem numerus E, vtrumque A, & B, metiatur, erit numerus E, eorum communis mensura. Quare A, & B, non sunt primi inter se, sed compositi. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Non sunt igitur alij numeri ipsis A, & B, minores, minimi in proportione A, ad B; Ac proinde A, & B, minimi sunt. Primi ergo inter se numeri minimi sunt, &c. Quod erat demonstrandum.

A ..... B ....
C ----- D ---
E ----

[a] 21. sept.
[b] 15. sept.
[c] 15. sept.

22.

THEOR. 22. PROPOS. 24.

MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter se sunt.

SINT

SINT numeri A, & B, minimi omnium eandem cũ ipsis proportionem habentium. Dico eos esse inter se primos; hoc est, nullum numerum, præter vnitatem, communi mẽsura eos metiri. Si enim non sunt inter se primi, sed habent numerum communem mensuram; sit numerus C, eorum mensura communis, metiaturque C, numerus numerum quidem A, toties, quoties vnitas est in numero D; At vero ipsum B, toties, quoties vnitas est in E. Quia igitur C, toties compositus, quot in D, sunt vnitates, procreat ipsum A; & idem C, toties cõpositus, quot sunt vnitates in E, producit ipsum B; [a] fit, vt D, & E, ipsum C, multiplicantes, producant A, & B. [b] Quare eadem erit proportio A, ad B, quæ D, ad E; Atque adeo, cum D, & E, partes ipsorum A, & B, minores sint, quam A, & B; non erunt A, & B, numeri minimi omnium eandem cum eis rationem habentium. Quod est absurdum. Primi ergo inter se sunt numeri A, & B; Ac proinde, minimi numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter se sunt. Quod ostendendum erat.

A ..... B .....
C -----
D ----- E ----

[a] 9. pron.
[b] 18. sept.

SCHOLIVM.

HANC propositionem, & præcedentem cum Campano ad plures numeros extendemus, hoc modo.

QVOTCVNQVE numeri inter se primi, minimi sunt in continuatione suarum proportionum. Et quotcunque numeri in continuatione suarum proportionum minimi, sunt inter se primi.

SINT quotcunq; numeri inter se primi A, B, C. Dico eos minimos esse in continuatione suarũ proportionum, ita vt in minoribus numeris continuari nõ possint, quamuis proportio

A ..... B ..... C .... D ---- E ------ F --- G ----- duorum in minoribus numeris reperiatur. Si enim non sunt minimi, erunt aliqui alij minores ipsis, nimirum D, E, F, minimi in continuatione illarum proportionum. Quia igitur D, E, F, minimi sunt in proportione numerorum A, B, C; metietur D, ipsum A, & E, ipsum B, & F, ipsum C, æque per ea, quæ ad propos. 21. huius lib. demonstrauimus; atque adeo secundum vnum eundem numerum, qui sit G; ita vt D, toties metiatur ipsum A, & E, ipsum B, & F, ipsum C, quoties vnitas est in G. Quoniam igitur vnitas numerum G, & numerus D, ipsum A, æque metitur; a metietur quoque vicissim æque vnitas numerum D, & numerus G, numerum A: Eademque ratione idem G, metietur & ipsum B, & ipsum C, æque, atque vnitas ipsos E, F; Atque idcirco A, B, C, cum habeant numerum G, communem mensuram, non erunt inter se primi, sed compositi. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non sunt igitur alij numeri minores ipsis A, B, C, minimi in continuatione proportionũ A, ad B, & B, ad C; sed ipsi A, B, C, minimi sunt.

a 15. sept.

IAM vero sint A, B, C, in continuatione suarum proportionum minimi. Dico eos primos esse inter se. Si enim non sunt inter se primi, metiatur eos communis mensura numerus G, ita vt G, toties metiatur ipsum A, quoties vnitas est in D; & ipsum B, toties, quoties vnitas est in E; & ipsum C, toties, quoties vnitas est in F. Quoniam igitur G, toties compositus facit numeros A, B, C, quoties vnitas est in D, E, F; fit vt D, E, F, ipsum G, multiplicantes producant ipsos A, B, C. Quare D, E, F, eadem habent proportiones, quas A, B, C, per ea, quæ ad propos. 18. huius lib. ostendimus; Atque adeo, cum D, E, F, minores sint quam A, B, C; non erunt A, B, C, minimi in continuatione suarum proportionum. Quod est absurdum. Primi igitur inter se sunt A, B, C. Quod est propositum.

24. THEOR. 23. PROPOS. 25.

SI duo numeri primi inter se fuerint; Qui vnum eorum metitur numerus, ad reliquum primus erit.

SINT

SINT inter se primi A, & B; & ipsum A, metiatur numerus C. Dico C, ad reliquum B, esse primum. Si enim non sunt inter se primi B, & C; metiatur eos communi mensura, si fieri potest, numerus D. Quoniam igitur D, metitur C; & C, ipsum A; a metietur etiam D, ipsum A: Metitur autem & ipsum B. Igitur A, & B, non sunt inter se primi, cum habeant mensuram communem numerum D. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Est ergo C, ad B, primus. Eodem modo, si numerus quispiam metiatur ipsum B, erit is ad A, primus. Quapropter si duo numeri primi inter se fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

A ..... B .....
C .... D ----

a 11. prop.

THEOR. 24. PROPOS. 26. 25.

SI duo numeri ad quempiam primi fuerint; etiam ex illis genitus ad eundē primus erit.

SIT vterque numerus A, B, ad C, primus, producaturque ex A, in B, vel ex B, in A, numerus D. Dico & D, ad eundem C, primum esse. Si enim C, & D, non sunt inter se primi; sit eorum communis mensura numerus E, metiens ipsum D, toties, quot vnitates sunt in numero F. Quoniam igitur E, toties compositus facit ipsum D, quot sunt vnitates in F; b fit vt F, ipsum E, multiplicans gignat ipsum D; c & contra E, ipsum F, multiplicans producat eundem D. Genitus est autem idē D, ex A, in B. Igitur cum ex E, primo in F, quartum fiat idem numerus, qui ex A, secundo in B, tertium; d erit vt E, primus ad A, secundum, ita B, tertius ad F, quartum. Quia vero A, & C, primi inter se sunt; & E, ipsum C, ponitur metiri; e erit E, ad A, primus; Atque adeo E, & A, cum sint inter se primi, f in sua proportione minimi

A .....
C .....
D .....
E ---- F ----

b 9. prop.
c 6. sept.
d 19. sept.
e 25. sept.
f 13. sept.

F 4 erunt.

[a] 21. sept. erunt. [a] Aeque igitur metientur ipsos B, & F, eandem proportionem habẽtes, nimirum E, ipsum B, & A, ipsum F. Quare cum E, metiatur vtrumque B, & C; non erunt B, & C, inter se primi. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Primus ergo erit D, ad ipsum C; Ac proinde, si duo numeri ad quempiã primi fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

26. THEOR. 25. PROPOS. 27.

SI duo numeri primi inter se fuerint: Etiam ex vno eorum genitus ad reliquũ primus erit.

SINT inter se primi A, & B, gignaturque C, ex A, in se ipsum. Dico C, ad reliquum B, esse primum. Sumpto enim D, æquali ipsi A, erit & D, ad B, primus. Quoniam igitur A, & D, ad B, primi sunt, [b] erit numerus ex A, in D, hoc est, ex A, in se genitus, nimirum C, ad eundem B, primus. Eademque arte ostendemus, numerum ex B, in se genitum, ad A, primum esse. Si duo ergo numeri primi inter se fuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

A.... B.....
C.....
D ....

[b] 26. sept.

27. THEOR. 26. PROPOS. 28.

SI duo numeri ad duos numeros, vterque ad vtrumque, primi fuerint; Et qui ex eis gignentur, primi inter se erunt.

SIT vterque A, & B, ad vtrumq; C, & D, primus, gignaturque E, ex A, in B; & F, ex C, in D. Dico E, & F, inter se primos esse. Cum enim vterque A, & B, primus sit ad

ad C; [a] erit quoque E, ex ipsis genitus, ad eundem C, primus. Rursus cum vterque A, & B, ad D, sit primus, erit eodem modo E, ipsis genitus, ad eundem D, primus. Quia igitur vterque C, & D, primus est ad E; [b] erit quoque F, ex illis procreatus, ad E, primus. Si ergo duo numeri ad duos numeros, vterque ad vtrumque, &c. Quod erat ostendendum.

A..... B ...
E.....
C... D..
F.....

[a] 26. sept.
[b] 26. sept.

28. THEOR. 27. PROPOS. 29.

SI duo numeri primi inter se fuerint, & multiplicans vterque se ipsum fecerit aliquem; Et geniti ex ipsis primi inter se erunt: Et si, qui in principio, genitos ipsos multiplicantes fecerint aliquos; Et hi quoque primi inter se erunt: Et semper circa extremos hoc eueniet.

SINT primi inter se A, & B; & ex A, in se fiat C; at ex B, in se fiat D. Dico & C, D, primos inter se esse: Et si rursum fiat E, ex A, in C; & F, ex B, in D; Dico E, F, quoque esse inter se primos. Cũ enim A, B, sint inter se primi, [c] erit C, factus ex A, in se, ad reliquum B, primus: Atque eodem modo cum B, & C, primi sint inter se, erit & D, factus ex B, in se, ad C, primus: atque adeo geniti duo C, D, primi inter se erunt.

A... B..
C..... D....
E..... F .....
G, 81. H, 16.
I, 243. K, 32.

[c] 27. sept.

RVRSVS

[a] 27. *sept.* RVRSVS, quia A, & B, sunt inter se primi, [a] erit & C, factus ex A, in se, ad B; & D, genitus ex B, in se, ad A, primus: Est autem & C, ostensus ad D, primus. Vterque igitur A, C, ad vtrumque B, D, primus erit; [b] Ac proinde E, factus ex A, in C, primus erit ad F, factum ex B, in D. Quod si adhuc ex A, in E, fiat G; & ex B, in F, fiat H; cum A, & C, primi sint

[b] 28. *sept.*

[c] 26. *sept.*

A...	B..	ad B, [c] erit quoque E, ex
C.....	D....	ipsis genitus, ad B, pri-
E.....	F.....	mus: Eademque ratione
G, 81.	H, 16.	& F, ad A, primus erit.
I, 243.	K, 32.	Quia igitur vterque A,

E, ad vtrumque B, F, primus est; [d] erit & G, factus ex A, in E, ad H, factum ex B, in F, primus. Et sic deinceps, si plures fuerint. Nam eodem modo cum A, & E, primi sint ad B, [e] erit & G, ex ipsis factus, ad B, primus: necnon & H, ad A, [f] Quare & I, genitus ex A, in G, ad K, genitum ex B, in H, primus erit, cum vterque A, G, ad vtrumque B, H, sit primus. Si duo itaque numeri primi inter se fuerint, &c. Quod ostendendum erat.

[d] 28. *sept.*

[e] 26. *sept.*

[f] 28. *sept.*

29.

THEOR. 28. PROPOS. 30.

SI duo numeri primi inter se fuerint: Etiam vterque simul ad quemlibet illorum primus erit: Et si vterque simul ad vnum aliquem illorum primus fuerit; Etiam, qui in principio, numeri primi inter se erunt.

SINT inter se primi AB, BC. Dico & vtrumque simul AC, primũ esse & ad AB, & ad BC. Si enim AC, AB, non sunt inter se primi; metiatur illos, si fieri potest, communi mensura numerus D. Quia igitur D, metitur totum AC, & ablatum AB; [g] metietur quoque reliquum BC.

[g] 12. *pron.*

BC. Non igitur primi inter se sunt AB, BC, cũ eos metiatur numerus D. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Quare AC, ad AB, primus erit. Eodemque modo ad BC, ostendemus eundem esse primum.

A.....B.....C
D-----

SED iam vterque AB, BC, simul, primus sit ad vnum aliquem illorum, videlicet ad AB. Dico & AB, BC, inter se primos esse. Si enim non sunt inter se primi, metiatur illos, si fieri potest, numerus D. Quia igitur D, metitur AB, & BC; [a] metietur quoque D, numerum AC, ex AB, BC, compositum; Ac proinde AC, AB, non sunt inter se primi, cum eos numerus D, metiatur. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Sunt igitur AB, BC, inter se primi. Eodemque argumento ostendemus AB, BC, inter se primos esse, si AC, ad BC, primus esse ponatur. Si duo ergo numeri primi inter se fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 10. *pron.*

COROLLARIVM.

EX hoc sequitur, numerum, qui ex duobus compositus ad unum illorum primus est, ad reliquum quoque primum esse. Si enim AC, ad AB, primus est, erunt AB, BC, inter se primi, per secundam partem huius propos. Igitur & AC, ad BC, primus erit, per primam partem eiusdem. Quod est propositum.

THEOR. 29. PROPOS. 31.

32.

OMNIS primus nũmerus, ad omnem numerum, quem non metitur, primus est.

PRIMVS numerus A, non metiatur numerum B. Dico A, ad B, primum esse; hoc est, A, & B, esse inter se primos,

primos, licet B, compositus sit. Si enim A, & B, non sunt inter se primi, metiatur eos, præter vnitatem, si fieri potest, communi mensura numerus C. Non erit ergo C, idem qui A; quòd A, ponatur non metiri ipsum B. Quia igitur numerum A, alius numerus C, metitur, non erit A, primus. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Primus igitur est A, ad B; Ac propterea, omnis primus numerus, ad omnem numerum, &c. Quod demonstrandum erat.

A ..... B .....
C ---

33. THEOR. 30. PROPOS. 32.

SI duo numeri se se mutuo multiplicantes fecerint aliquem: genitum autem ex ipsis metiatur aliquis primus numerus: is etiam vnum eorum, qui in principio, metietur.

DVO numeri A, & B, se mutuo multiplicantes faciãt C, quam metiatur numerus primus D. Dico & D, metiri saltem vnũ ipsorum A, & B, si non vtrumque metitur. Non metiatur enim D, ipsum A; metiatur vero ipsum C, toties quot sunt vnitates in numero E; ita vt C, fiat ex D, in E, qui idem factus est ex A, in B. Quia igitur numerus genitus ex D, primo in E, quartum, æqualis est numero genito ex A, secundo in B, tertium; [a] erit vt D, primus ad A, secũdum, ita B, tertius ad E, quartum. [b] Quia vero primus D, ad A, primus est, cum eum non metiatur; [c] erunt D, & A, in sua proportione minimi. [d] Quare æque metientur ipsos B, & E; nimirum D, ipsum B, & A, ipsum E; Ac proinde si D, non metitur ipsum A, metietur saltem ipsum B: Eodemque modo si D, non metiatur ipsum B, metietur saltem ipsum A. Si duo ergo numeri se se mutuo

A .... B .....
C .....
D ... E .....

[a] 19. sept. [b] 31. sept. [c] 23. sept. [d] 21. sept.

mutuo multiplicantes fecerint aliquem, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

EODEM modo & hoc theorema sequens demonstrabimus.

SI duo numeri se se mutuo multiplicantes fecerint aliquem; genitum autem ex ipsis metiatur aliquis non primus numerus, uel certe ad ipsum sit compositus: is etiam ad unum eorum, qui in principio, compositus erit.

NAM ex A, in B, fiat C, quem vel metiatur numerus non primus D, vel certe compositus ad eum sit: hoc est, vel D, & C, compositi sint inter se. Dico D, quoque ad vnum ipsorũ A, B, compositum esse: id est, vel D, & A; vel D, & B, esse quoque inter se compositos. Si enim D, ad neutrum eorum compositus est; erit vterque A, & B, ad D, primus. [a] Quare & C, ex illis genitus, ad eundem D, primus erit. Quod est absurdum, cum D, ponatur vel metiri ipsum C, vel certe ad eum esse compositus. Est igitur D, compositus ad A, vel ad B, cum non sit primus ad vtrumque.

A ... B ....
C .....
D .....

[a] 26. sept.

PROBL. 31. PROPOS. 33. 30.

OMNEM compositum numerum, aliquis primus numerus metitur.

SIT numerus compositus A. Dico aliquem numerũ primũ eum metiri. Metiatur enim ipsum numerus B, qui si primus fuerit, habetur propositum: Si vero cõpositus, metiatur eum numerus C, qui vel primus erit, vel cõpositus: Si primus, cum metiatur ipsum B; & B, ipsum A; [b] metietur quoque C, primus ipsum A. Si autem C, compositus

[b] 11. prop.

tus fuerit, metietur eum alius numerus. Quia vero numerus non diminuitur infinite, veniemus tandem ad aliquem numerum, quem nullus alius metiatur, atque adeo ad primum; qui cum metiatur omnes precedentes, [a] metietur quoque compositum A. Quod est propositum.

A .....
B..... C...

[a] 11. pron.

ALITER. Quia numerus A, compositus est; metietur eum aliquis numerus, vel etiam plures. Sit omnium metientium eum minimus B; quem dico esse primum. Si enim B, non est primus, metiatur eum, si fieri potest, numerus C. Quoniam igitur C, metitur ipsum B, & B, ipsum A; [b] metietur quoque C, minor ipso B, ipsum A. Quod est absurdum, cum B, ponatur omnium metientium minimus. Primus ergo est numerus B. Omnem igitur compositum numerum aliquis primus numerus metitur. Quod erat demonstrandum.

A .....
B... C--

[b] 11. pron.

31. THEOR. 32. PROPOS. 34.

OMNIS numerus aut primus est, aut eum aliquis primus metitur.

SIT numerus quicunque A. Dico eum vel esse primum, vel certe aliquem primum eum metiri. Cum enim omnis numerus vel primus sit, vel compositus; si quidem A, primus est, habetur propositum: Si vero compositus; [c] metietur eum aliquis primus. Omnis igitur numerus aut primus est, aut eum aliquis primus metitur. Quod erat ostendendum.

A .....

[c] 33. sept.

34. PROBL. 3. PROPOS. 35.

NVMERIS datis quotcunque, reperire

perire minimos omnium eandem rationem habentium cum ipsis.

SINT quotcunque numeri A, B, C, habentes quascunque proportiones, siue eadem sit proportio A, ad B, quæ B, ad C, siue non; oporteatq; totidem reperire, qui in eisdē proportionibus sint minimi. Quoniam A, B, C, sunt inter se aut primi, aut compositi: Si primi inter se sunt; erunt ipsi in continuatione suarum proportionum minimi, per ea, quæ ad propos. 24. huius lib. demonstrauimus. Si vero non sunt inter se primi, [a] inuenta sit maxima eorum communis mensura numerus D, qui metiatur ipsos A, B, C, per numeros E, F, G. Dico E, F, G, minimos esse in proportionibus numerorum A, B, C. Quòd enim easdem habeant proportiones, quas numeri A, B, C, sic ostendetur. Quoniam D, ipsos A, B, C, metitur per E, F, G; [b] fit, vt D, ipsos E, F, G, multiplicans faciat A, B, C. Quare, per ea, quæ ad propos. 18. huius lib. ostendimus, easdem rationes habebunt E, F, G, quas numeri A, B, C.

A ..... B... C.....
D..
E.. F.. G....
H---- I--- K---
L----

[a] 3. sept.

[b] 9. pron.

QVOD vero E, F, G, sint minimi omnium eandem rationem habentium cum ipsis, hoc modo perspicuum fiet. Si non sunt minimi, erunt aliqui alij ipsis minores, minimi in eisdem proportionibus. Sint ergo, si fieri potest, minimi H, I, K; qui quoniam ipsos A, B, C, metiuntur æque, vt ad propos. 21. huius lib. ostendimus; metiantur eos per numerum L. Quo posito, [c] fit, vt L, multiplicans numeros H, I, K, producat numeros A, B, C; [d] & vicissim L, ipsos A, B, C, metiatur per H, I, K. Quoniam igitur E, primus multiplicans D, quartum facit A; & H, secundus multiplicans L, tertium facit eundem A; [e] erit, vt E, primus ad H, secundum, ita L, tertius ad D, quartum: Est autem E, maior quam H. Igitur & L, maior erit, quam D; Atque adeo, cum L, ipsos A, B, C, metiatur; non erit D, ma-

[c] 9. pron.

[d] 8. pron.

[e] 19. sept.

D, maxima mensura communis numerorum A, B, C. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non igitur erunt alij numeri minores ipsis E, F, G, minimi in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C, sed ipsi E, F, G, minimi erunt. Quamobrem, numeris datis quotcunque, reperimus minores, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

HINC fit, maximam mensuram quotlibet numerorum, metiri ipsos per numeros, qui minimi sunt omnium eandem proportionem cum ipsis habentium. Ostensum enim est, numeros E, F, G, per quos D, maxima mensura numerorum A, B, C, ipsos A, B, C, metitur, minimos esse in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C: Eademque est in cæteris ratio.

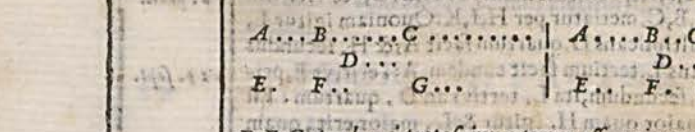
SCHOLIVM.

EX his facili via comperiemus duos minimos numeros, qui eandem habeant proportionem, quam quotcunq; numeri dati continue proportionales. Vt si proponantur continue proportionales A, B, C, D, E,

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.
I, 8.
F, 2. G, 3.

sive illi sint in continuatione proportionis A, ad B, minimi, sive non; reperiemus duos in eadem proportione minimos. Si per hoc problema sumamus F, & G, minimos in proportione duorum A, & B, nimirum illos, per quos I, maxima eorum communis mensura eos metitur.

CÆTERVM contingit interdum, vnum numerorum



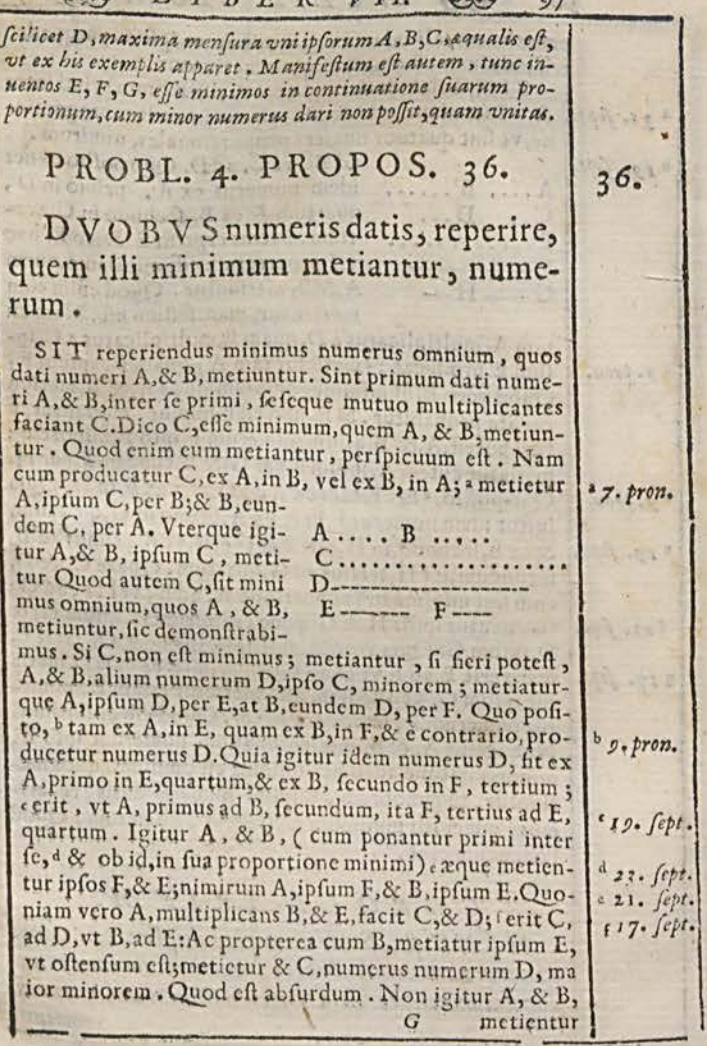
E, F, G, per hanc propos. inuentorum esse vnitatem; quando scilicet

scilicet D, maxima mensura vni ipsorum A, B, C, æqualis est, vt ex his exemplis apparet. Manifestum est autem, tunc inuentos E, F, G, esse minimos in continuatione suarum proportionum, cum minor numerus dari non possit, quam vnitas.

PROBL. 4. PROPOS. 36. 36.

DVOBVS numeris datis, reperire, quem illi minimum metiantur, numerum.

SIT reperiendus minimus numerus omnium, quos dati numeri A, & B, metiuntur. Sint primum dati numeri A, & B, inter se primi, seseque mutuo multiplicantes faciant C. Dico C, esse minimum, quem A, & B, metiuntur. Quod enim eum metiantur, perspicuum est. Nam cum producatur C, ex A, in B, vel ex B, in A; [a] metietur A, ipsum C, per B; & B, eundem C, per A. Vterque igitur A, & B, ipsum C, metitur. Quod autem C, sit minimus omnium, quos A, & B, metiuntur, sic demonstrabimus. Si C, non est minimus; metiantur, si fieri potest, A, & B, alium numerum D, ipso C, minorem; metiaturque A, ipsum D, per E, at B, eundem D, per F. Quo posito, [b] tam ex A, in E, quam ex B, in F, & e contrario, producetur numerus D. Quia igitur idem numerus D, fit ex A, primo in E, quartum, & ex B, secundo in F, tertium; [c] erit, vt A, primus ad B, secundum, ita F, tertius ad E, quartum. Igitur A, & B, (cum ponantur primi inter se, [d] & ob id, in sua proportione minimi) [e] æque metientur ipsos F, & E; nimirum A, ipsum F, & B, ipsum E. Quoniam vero A, multiplicans B, & E, facit C, & D; [f] erit C, ad D, vt B, ad E: Ac propterea cum B, metiatur ipsum E, vt ostensum est; metietur & C, numerus numerum D, maior minorem. Quod est absurdum. Non igitur A, & B,



[a] 7. pron.
[b] 9. pron.
[c] 19. sept.
[d] 22. sept.
[e] 21. sept.
[f] 17. sept.

metientur alium numerum minorem ipso C; atq; adeo C, minimus est omnium, quos metiuntur.

SINT deinde dati numeri A, & B, non primi inter se. [a] Inueniantur C, & D, minimi in eadem proportione, vt sint quatuor numeri proportionales, nimirum A, ad B, vt C, ad D. Quo posito, [b] fiet idem numerus ex A, primo in D, quartum, & ex B, secundo in C, tertium. Factus ergo sit E. Dico E, hac via procreatum esse minimum, quem A, & B, metiuntur. Quod enim eum metiantur, manifestum est. Nam cùm tam A, multiplicatus à D, quam B, multiplicatus a C, ipsum E, producat; [c] metietur tam A, quam B, ipsum E. Quod vero E, sit minimus omnium, quos A, & B, metiuntur, ita probabitur. Si E, non est minimus, metiantur, si fieri potest, A, & B, alium numerum F, ipso E, minorem: metiatur autem A, ipsum F, per G; & B, eundem F, per H. Quo posito, [d] fiet F, tam ex A, in G, quã ex B, in H. Quia igitur idem numerus F, fit & ex A, primo in G, quartum, & ex B, secundo, in H, tertium; [e] erit, vt A, primus ad B, secundum, ita H, tertius ad G, quartum. Quare C, & D, cum sint minimi in proportione A, ad B, vel H, ad G; [f] metientur ipsos H, & G, æque; nimirum C, ipsum H; & D, ipsum G. Quia vero A, multiplicans D, & G, facit E, & F; [g] erit E, ad F, vt D, ad G; Ac propterea cum D, metiatur ipsum G, vt ostensum est; metietur etiam E, numerus numerum F, maior minorem. Quod est absurdum. Non igitur A, & B, metientur alium numerum ipso E, minorem; atque adeo E, minimus est omnium, quos metiuntur. Quamobrem, duobus numeris datis, reperimus, quem illi minimum metiantur, numerum. Quod faciendum erat.

A.... B.....
C.. D...
E.....
F----------
G-----H---

[a] 35. sept.
[b] 19. sept.
[c] 7. pron.
[d] 9. pron.
[e] 19. sept.
[f] 21. sept.
[g] 17. sept.

COROLLARIVM.

HINC fit, si duo numeri multiplicent minimos eandem rationem habentes, maior minorem, & minor maiorem, produci numerum minimum, quem illi metiantur. Nam propositis C, & D, minimis in proportione A, ad B, demonstratum est, numerum E, factum ex A, minore in D, maiorem, & ex B, maiore in C, minorem, esse minimum, quem A, & B, metiuntur.

SCHOLIVM.

HOC autem corollarium apud Campanum est propositio 35. huius libri septimi; Et sequens propositio apud eundem, corollarium est propositionis 35.

THEOR. 33. PROPOS. 37. 35.

SI duo numeri numerum quempiam metiantur: Etiam minimus, quem illi metiuntur, eundem metietur.

METIANTVR duo numeri A, & B, quemlibet numerum CD, sitque alius numerus E, minimus, quem ijdem A, & B, metiuntur. Dico & E, ipsum CD, metiri. Si enim E, ipsum CD, non metitur; ablato E, ex CD, quoties potest auferri, relinquetur numerus quidã minor, quam E. Relinquat igitur E, ablatus ex CD, quoties potest, numerum, si fieri potest, FD, minorem se, ita vt E, metiatur ablatum CF. Quoniam igitur tam A, quam B, ipsum E, metitur, & E, ipsum CF; [a] metietur quoque tam A, quam B, ipsum CF. Itaque A, & B, cum metiantur totum CD, & ablatum CF; [b] metientur & reliquum FD. Est autem FD, minor quam E. Non igitur E, minimus est numerus, quem A, & B, metiuntur.

A.. B...
C..... F-----D
E.....

[a] 11. pron.
[b] 12. pron.

Quod est absurdum, & contra hypothesim. Quare E, ipsum CD, metitur. Si duo ergo numeri numerũ quempiam metiantur, &c. Quod erat demonstrandum.

36. PROBL. 5. PROPOS. 38.

TRIBVS numeris datis, reperire, quem illi minimum metiantur, numerũ.

SIT inueniendus minimus numerus, quem dati tres numeri A, B, C, metiantur. [a] Inuento D, minimo, quem metiantur duo A, & B; metietur & eundem D, reliquus C, aut non metietur. Metiatur primum C, ipsum D, ita vt omnes tres A, B, C, ipsum D, metiuntur. Dico numerum D, minimum inuentum, quem A, & B, metiuntur, minimum quoque esse, quem tres A, B, C, metiantur. Si enim D, non est minimus, metiantur, si fieri potest A, B, C, alium numerum E, ipso D, minorem. Quoniam igitur A, & B, metiuntur ipsum E, minorem quam D; non erit D, minimus, quem A, & B, metiuntur. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Immo, cum A, & B, metiantur ipsum E; & D, sit minimus, quem iidem A, & B, metiuntur; [b] metietur quoque D, ipsum E, maior minorem. Quod est absurdum.

A . . . B . . . . C . . . . . D . . . . . E ----------

[a] 36. sept.

[b] 37. sept.

SED iam C, non metiatur ipsum D, inuentum. [c] Inuento igitur E, minimo, quem C, & D, metiantur; Dico E, esse minimum, quem A, B, C, metiantur. Quod enim eum metiantur, ita ostendetur. Cũ A, & B, metiantur ipsum D, & D, ipsum E; [d] metientur quoque A, & B, ipsum E. Metitur autem & C, eundem E. Igitur omnes tres A, B, C, ipsum E, metiuntur. Quod autem E, sit minimus, quem metiantur A, B, C, hoc modo probabitur. Si E, non est minimus; metiantur, si fieri potest,

A . . B . . . C . . . . D . . . . . E . . . . . F ---------

[c] 36. sept.

[d] 11. pron.

potest, A, B, C, alium numerum F, ipso E, minorem. Quoniam igitur A, & B, ipsum F, metiuntur; [a] metietur quoque eundem F, numerus D, nimirum minimus inuentus, quem numeri A, & B, metiuntur; Atque adeo cum C, & D, metiantur ipsum F, minorem, quam E; non erit E, minimus, quem C, & D; metiantur. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Immo cum C, & D, metiantur ipsum F; [b] metietur quoque eundem F, numerus E, minimus, quem metiuntur ijdem C, & D, maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo A, B, C, alium numerum ipso E, minorem metientur; sed ipse E, erit minimus. Quapropter tribus numeris datis, reperimus, quem illi minimum metiantur, numerum. Quod erat faciendum.

[a] 37. sept.

[b] 37. sept.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, si tres numeri numerum quempiam metiantur; etiam minimum, quem illi metiuntur, eundem metiri. Nam in extrema huius demonstrationis parte, ex eo, quod A, B, C, ponebantur metiri ipsum F, ostensum est, & E, minimum, quem A, B, C, metiuntur, eundem F, metiri.

SCHOLIVM.

HOC corollarium alio modo, non secus ac propos. 37. huius lib. ostendere poterimus. Metiantur enim A, B, C, quemcunque numerum D E, sitque F, minimus, quem ijdem A, B, C, metiantur. Dico & F, ipsum D E, metiri. Si enim non metitur, metiatur eius partem D G, relinquatque numerum G E, se minorem.

A . . B . . C . . . . D . . . . . G ---- E . . . . . F . . . . . .

Quoniam igitur A, B, C, ipsum F, metiuntur; & F, ipsum D G; [c] metientur quoque A, B, C, eundem D G; Ac proinde, cum & totum D E, ponantur metiri; [d] metientur & reliquũ

[b] 11. pron.

[d] 12. pron.

G E, ipso F, minorem. Quare F, non erit minimus, quem A, B, C, metiuntur. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Metitur igitur F, ipsum D E.

PARI ratione; Pluribus numeris datis, quam tribus, reperiemus, quem illi minimum metiantur, numerum; locumque habebit hoc idem corollarium. Nam si dati numeri fuerint quatuor, inueniendus erit primum minimus, quem tres metiantur. Si quinque, reperiendus erit minimus, quem quatuor metiantur, &c. Reliqua autem omnia peragenda, vt de tribus numeris dictum est.

37.

THEOR. 34. PROPOS. 39.

SI numerum quispiam numerus metiatur; ille, quem metitur, partem habebit a metiente denominatam.

METIATVR numerum A, numerus B. Dico A, habere partem aliquam a B, denominatam. Metiatur enim B, ipsum A, toties, quot vnitates sunt in numero C. Quia igitur vnitas ipsum C, & B, ipsum A, æque metitur; [a] & vicissim vnitas æque ipsum B, & C, ipsum A, metietur; atque adeo eadem pars erit vnitas ipsius B, quæ C, ipsius A: Est autem vnitas pars ipsius B, denominata ab ipso B, vt ad defin. 2. huius lib. docuimus. Igitur & C, pars erit ipsius A, ab eodem B, denominata. Si numerum ergo quispiam numerus metiatur, &c. Quod ostendendum erat.

A . . . . . .
B . . . . C . . .

[a] 15. sep.

THEOR.

THEOR. 35. PROPOS. 40.

38.

SI numerus partem habuerit quamlibet; metietur illum numerus a parte denominatus.

HABEAT numerus A, partem B, a qua numerus C, denominatur. Dico C, metiri ipsum A. Nam cum B, pars denominetur a C; sit autem & vnitas pars ipsius C, ab eodem C, denominata; metietur vnitas ipsum C, & B, ipsum A, æque. [a] Vicissim ergo & vnitas ipsum B, & C, ipsum A, metietur. Si numerus ergo partem habuerit quamlibet, &c. Quod demonstrandum erat.

A . . . . . .
B . . . C . . . . .

[a] 15. sept.

PROBL. 6. PROPOS. 41.

39.

NVMERVM reperire, qui minimus cum sit, habeat datas partes.

SINT datæ partes A, B, C; Inueniendusque sit minimus numerus datas partes habens. Sint a partibus A, B, C, numeri denominati, siue qui ipsas denominent, D, E, F; [b] minimusq; quem D, E, F, metiuntur, numerus G. Dico G, esse minimum, qui habeat datas partes A, B, C. Quod enim eiusmodi partes habeat, ita ostendetur. Cum D, E, F, ipsum G, metiantur, [c] habebit G, partes a D, E, F, denominatas, hoc est, partes A, B, C, cum hæ denominentur a D, E, F. Quod vero G, sit minimus illas partes habens, perspicuum est. Si enim non est minimus, habeat, si fieri potest,

D . . A, *Secunda*
E . . . B, *Tertia*
F . . . C, *Quarta*
G . . . . . .
H . . . . . .

[b] 38. sept.

[c] 39. sept.

G 4 H, ipso

D.. A, *Secunda*
E... B, *Tertia*
F.... C, *Quarta*
G.....
H----------

H, ipso G, minor eadem partes A, B, C. Quia igitur H, habet partes A, B, C, [a] metientur ipsum numeri D, E, F, à partibus A, B, C, denominati; Atque adeo, cum H, minor sit quam G, non erit G, minimus, quem metiuntur D, E, F. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non igitur minor numerus, quam G, datas partes A, B, C, habebit, sed ipse G, minimus erit. Quare numerum reperimus, qui minimus cum sit, habet datas partes. Quod faciendum erat.

[a] 40. sept.

SCHOLIVM.

QVOD si sumantur numeri I, K, L, per quos numeri D, E, F, ipsum G, metiuntur; erunt numeri I, K, L, datæ partes A, B, C, ipsius G, denominatæ scilicet à

A, Secunda D.. I.....
B, Tertia E... K....
C, Quarta F.... L...
G.....

D, E, F. Cum enim D, E, F, ipsum G, metiantur per I, K, L; metietur æque vnitas ipsos I, K, L, & numeri D, E, F, ipsum G. [b] Vicissim ergo metietur quoque vnitas ipsos D, E, F, & numeri I, K, L, ipsum G; atque adeo vnitas ipsorum D, E, F, eadem pars erit, quæ numeri I, K, L, ipsius G. Cum ergo vnitas sit pars ipsorum D, E, F, ab ipsis denominata; erunt & I, K, L, ipsius G, partes denominatæ à D, E, F.

[b] 15. sept.

EX his autem sequitur, minimum numerum, quem quotlibet numeri metiuntur, esse minimum habentem partes à numeris metientibus denominatas. Ostensum enim est, numerum G, quem minimum metiuntur D, E, F, minimum esse, qui habeat partes A, B, C, cuiusmodi sunt I, K, L, a metientibus numeris D, E, F, denominatas.

IAM vero, vt Campanus ait, si inuentus minimus numerus datas partes habens duplicetur, triplicetur, &c. habebitur

habebitur secundus numerus post minimum, tertius, quartus, &c. eadem partes continens. Inuento enim G, minimo, qui habeat partes A, B, C, denominatas a D, E, F; sit illius duplus, numerus H; triplus vero I, &c. Dico H, esse secundum numerum, qui eadem partes A, B, C, à numeris D, E, F, denominatas habeat, & I, tertium, &c. ita vt neque inter G, minimum, & eius duplum H, neque inter H, duplum, & I, triplum, &c. cadat alius numerus habens eadem partes, sed ipsi soli H, I, & cæteri multiplices ipsius G, dictas partes contineant. Quod enim H, & I, &c. partes A, B, C, habeant, denominatas scilicet à D, E, F, ita ostendemus. Quoniam D, E, F, metiuntur

G..... *A, D..*
H..... *B, E...*
I..... *C, F....*
K---------- M ------ L
N---------- P ------ O

ipsum G, per constructionem; & G, ipsos H, I, & reliquos multiplices ipsius G; [a] metientur quoque D, E, F, eosdem H, I, & reliquos multiplices ipsius G. [b] Quare H, I, & reliqui numeri ipsius G, multiplices, partes habebunt a metientibus numeris D, E, F, denominatas, quales ponuntur partes A, B, C.

[a] 11. pron.
[b] 39. sept.

QVOD autem H, duplus ipsius G, minimi, sit secundus eas partes habens, hoc modo demonstrabimus. Si H, non est secundus, sit, si fieri potest, alius K L, ipso prior, qui nimirum maior sit, quam G, minimus, & minor, quam H, duplus ipsius G. Detracto autem G, ex K L, relinquatur M L, ipso G, minor. Quoniam igitur K L, partes habet A, B, C; [c] metientur ipsum numeri D, E, F, a partibus illis denominati; Ac propterea & G, minimus, quem D, E, F, metiuntur, metietur per coroll. propos. 38. huius lib. eundem K L: Metitur autem & G, ablatum K M, sibi æqualem. [d] Igitur & reliquum M L, metietur, maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo alius numerus inter G, & H, cadens partes habet A, B, C; Ac proinde H, secundus est huiusmodi partes habens.

[c] 40. sept.
[d] 12. pron.

NON

NON aliter oſtendemus numerum I, triplum ipſius G, eſſe tertium dictas partes habentem. Si enim non eſt tertius, ſit alius, ſi fieri poteſt, videlicet N O, ipſo prior, qui videlicet maior ſit, quam H, duplus, minor vero quam I, triplus. Detracto autem H, duplo ex N O, relinquatur P O, minor ipſo G. Quia igitur N O, partes habet A, B, C, [a] metientur ipſum numeri D, E, F, a partibus illis denominati. Atque ideirco & G, minimus, quem D, E, F, metiuntur, eundem N O, per coroll. propoſ. 38. huius lib. metietur: Metitur autem & G, ipſum N P, ablatum ipſi H, duplo æqualem. [b] Igitur & reliquum P O, idem G, metietur, minorem maior. Quod eſt abſurdum. Non ergo alius numerus inter H, & I, cadens partes habet A, B, C, datas; Ac propterea I, tertius eſt illas partes habens. Eademque ratione quadruplus ipſius G, quartus erit; & quintuplus, quintus, &c.

[a] 40. ſept.

[b] 12. pron.

HVC quoque referri poteſt ſequens problema.

NVMERVM reperire, qui minimus cum ſit, habeat datas partes, hac lege, ut quælibet pars ſubſequentem partem contineat.

SINT data partes A, B, C; inueniendus ſit numerus minimus, qui eas habeat hoc ordine, vt pars A, contineat partem B, & pars B, partem C. Sint à partibus A, B, C, numeri denominati D, E, F; Fiatq; G ex E, in F: Item H, ex D, in G. Dico H, eſſe minimum numerum, qui quæritur. Quod enim habeat datas partes ordine prædicto, facile demonſtratur. Nam cum ex D, in G, fiat H; erit G, toties in H, quoties vnitas in D: Eſt autem vnitas pars ipſius D, denominata ab ipſo D. Igitur & G, pars eſt ipſius H, ab eodem D, denominata; Atque adeo H, habet partem A, nimirum numerum G, à D, denominatam. Deinde quia ex E, in F, fit G; erit eadem ratione F, pars ipſius G, denominata ab E: Atque adeo A, pars ipſius H, nimirum numerus G, habet partem B, nimirum numerum F, ab E, denominatam. Denique cum F, habeat vnitatem, tanquam partem ab ipſo F, denominatam, perſpicuum eſt B, partem ipſius G, partis, nimirum numerum F, habere quoque partem C, ab F, denominatam, nimirum vnitatem. Quare numerus inuentus H, partem habet A; & pars A, partem B; & pars B, partem C. Quod autem H, ſit minimus eas partes hoc ordine cõtinens, hac ratione oſtendetur. Si enim non eſt minimus, habeat minor numerus I, ſi fieri poteſt, eaſdem partes eodem ordine, ita vt K, ſit ipſius I, pars A, à numero D, denominata; & L, ipſius K, pars B, ab E, denominata; & M, ipſius L, pars C, ab F, denominata. Quia igitur K, pars eſt ipſius I, à D, denominata; erit K, toties in I, quoties vnitas in D; [a] Atq; adeo ex D, in K, fiet I. Eadem ratione ex E, in L, fiet K; & L, ex F, in M. Itaq; cum D, ipſos G, & K, multiplicans faciat H, & I; [b] erit, vt H, ad I, ita G, ad K. Eadem ratione, cum ex E, in F, & L, fiant G, & K; erit, vt G, ad K, ita F, ad L. Et cum ex F, in vnitatem, & M, fiant F, & L; erit, vt F, ad L, ita vnitas ad M. Quoniam igitur eſt, vt H, ad I, ita G, ad K; & vt G, ad K, ita F, ad L; & vt F, ad L, ita vnitas ad M: Erit per lemma propoſ. 14. huius lib. vt H, ad I, ita vnitas ad M: Ponitur autẽ H, numerus numero I, maior. Vnitas igitur maior quoq; erit numero M, pars toto. Quod eſt abſurdum. Non ergo alius numerus minor, quam H, habet partes A, B, C, ordine prædicto, ſed ipſe H, minimus eſt. Quod eſt propoſitum.

A Secunda. B Tertia. C Quarta.
D . . E . . . F . . . .
G . . . . . .
H . . . . . .
. Vnitas
I ----------
K ----------
L ----------
M ----

H. G. F. Vnitas.
I. K. L. M.

[a] 15. defin.

[b] 17. ſept.

SI vero plures fuerint partes, quam tres, eadem prorſus eſt via tenenda ac demonſtratio. Vt ſi numeri 2. 3. 4. 5. 6. ſint denominatores partium, fient 30. ex 5. in 6. & 120. ex 4. in 30. & 360. ex 3. in 120. & tandem 720. ex 2. in 360. Nam numerus 720. habebit partem a 2. denominatam; & hac partem a 3. denominatam; & hac aliam a 4. & hac aliam à 5. & hac denique partem à 6. denominatam, vt manifeſtum eſt.

QVOD si numerum H, inuentum duplicemus, triplicemus, &c. habebimus alios numeros, videlicet secundum, tertium, quartum, &c. qui eiſdem partes eodem ordine habeant, duplicatâs tamen, vel triplicatas, &c. Nam G, duplicatus, vel triplicatus, &c. dimidiata pars erit ipſius H, duplicati, vel triplicati, &c. quemadmodum & G, ipſius H. Eademque eſt ratio de cæteris partibus.

FINIS ELEMENTI SEPTIMI.

EVCLI-

EVCLIDIS

ELEMENTVM OCTAVVM.

THEOR. 1. PROPOS. 1. 1.

SI fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi vero ipſorum primi inter ſe fuerint; ipſi minimi ſunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

NVMERORVM deinceps proportionalium quotcunque A, B, C, D, extremi A, & D, inter ſe primi ſint. Dico A, B, C, D, minimos eſſe omnium eandem cum eis proportionem habẽtium. Si enim non ſunt minimi, erunt alij ipſis minores, in eadem proportione. Sint ergo ipſis minores in eadem ratione E, F, G, H, ſi fieri poteſt. Quoniam igitur quotcunq; numeri ſunt A, B, C, D, & alij illis æquales multitudine E, F, G, H, qui bini ſumuntur, & in eadem ratione, erit, ex æquali- *14. ſept.*

A ..... E
B ..... F
C ..... G
D ..... H

æqualitate, vt A, ad D, ita E, ad H: [a] Sunt autem A, & D, in sua proportione minimi, quod inter se primi esse ponantur. [b] Igitur tam A, ipsum E, quàm D, ipsum H, æque metietur, maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo numeri minores ipsis A, B, C, D, sunt in eadem cum eis ratione, sed ipsimet minimi sunt; Ac propterea si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 23. sept.
[b] 21. sept.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem est ex demonstratione, numeros A, B, C, D, esse minimos in continuatione suarum proportionum, si extremi A, & D, inter se primi sint, siue A, B, C, D, sint continue proportionales, vt vult Euclides, siue non. Vt hoc exemplum ostendit, in quo proportiones omnes diuersæ sunt, quemadmodum in superiori eadem semper proportio reperitur.

A.... E---
B..... F-----
C..... G-------
D..... H---------

2. PROBL. 1. PROPOS. 2.

NVMEROS reperire deinceps proportionales minimos, quotcunque iusserit quispiam, in data ratione.

SINT minimi numeri datæ rationis A, & B, oporteatque inuenire primum tres numeros minimos in proportione data A, ad B. Multiplicans A, seipsum, & numerum B, faciat C, & D. Deinde B, multiplicans seipsum faciat E. Dico C, D, E, esse tres minimos in proportione A, ad B; hoc est, esse vt C, ad D, ita D, ad E. Quod enim proportionales sint in data proportione A, ad B, sic ostendemus. Cum ex A, in A, & B, fiant C, & D; [c] erit vt A, ad B, ita C, ad D. Rursus cum ex B, in A, & B, fiant D, & E; [a] erit quoque, vt A, ad B, ita D, ad E. Quare proportionales sunt C, D, E, continue in proportione data A, ad B. Quod vero in eadem ratione sint minimi, ita demonstrabitur. Quoniam extremi C, & E, procreati sunt ex A, & B, in se ipsos; [b] sunt autem A, & B, inter se primi, quòd minimi sint in sua proportione; [c] Erunt & C, E, extremi, inter se primi. [d] Quare C, D, E, minimi sunt in ratione A, ad B.

A.. B...
C.... D..... E.....
F, 8. G, 12. H, 18. I, 27.
K, 16. L, 24. M, 36. N, 54. O, 81.

[c] 17. sept.
[a] 17. sept.
[b] 24. sept.
[c] 29. sept.
[d] 1. octaui.

IAM vero ex A, in tres inuentos C, D, E, fiant F, G, H, & ex B, in vltimum E, fiat I. Dico quatuor numeros F, G, H, I, minimos esse in eadem ratione data A, ad B. Quod enim proportionales sint in ratione A, ad B, ita demonstrabimus. Quoniam A, multiplicans ipsos C, D, E, fecit F, G, H, habebunt, ex ijs, quæ ad propos. 18. lib. 7. ostendimus, numeri F, G, H, eadem proportiones, quas C, D, E, hoc est, quam habet A, ad B. Rursus quia A, & B, ipsum E, multiplicantes, fecerunt H, & I; [c] erit quoque, vt A, ad B, ita H, ad I. Sunt igitur F, G, H, I, continue proportionales in data proportione A, ad B. Quod autem in data ratione minimi sint, ita perspicuum fiet. [f] Quoniam A, & B, minimi in sua proportione, sunt inter se primi; factique sunt C, & E, ex A, & B, in se ipsos; Item procreati sunt F, & I, ex A, B, in C, E; nimirum F, ex A, in C, & I, ex B, in E; [g] erunt & F, I, extremi, inter se primi. [h] Quare F, G, H, I, in sua proportione, quæ est A, ad B, minimi sunt.

[c] 18. sept.
[f] 24. sept.
[g] 29. sept.
[h] 1. octaui.

NON aliter, si ex A, in quatuor inuentos F, G, H, I, fiant K, L, M, N, & ex B, in vltimum I, fiat O; erunt K, L, M, N, O, quinque numeri minimi in data ratione A, ad B: Eademque ratione inuenimus sex, septem, octo, &c. Quare numeros reperimus deinceps proportionales minimos, &c.

Quod faciendum erat.

SCHO-

SCHOLIVM I.

EODEM modo quatuor numeri minimi proportionales producentur ex multiplicatione B, in tres inuentos E, D, C, & ex multiplicatione A, in C. Fiant enim I, H, G, ex B, in E, D, C: & F, ex A, in C. Quo peracto, [a] numeri F, G, eandem rationem habebunt, quam A, B; quòd A, B, multiplicantes C, ipsos F, G, fecerunt: Item & G, H, I, ex ijs, quæ ad propos. 18. huius lib. demonstrauimus, in eadem erunt ratione, in qua C, D, E, hoc est, in qua A, B; quòd B, multiplicans C, D, E, ipsos G, H, I, fecit. Sunt ergo F, G, H, I, in eadem ratione, in qua A, B. Quod vero minimi sint, ostendetur, vt prius.

[a] 18. sept.

NON aliter si ex B, in quatuor inuentos I, H, G, F, fiant O, N, M, L, & ex A, in F, fiat K; erunt K, L, M, N, O, quinque numeri minimi in data ratione A, ad B. Eademque ratione inueniemus sex, septem, octo, &c. Itaque siue A, multiplicetur in omnes inuentos, & B, in vltimum; siue B, in omnes inuentos, & A, in primum; producentur semper plures numeri in eadem ratione data A, ad B, minimi. Demonstrauit enim Euclides, quatuor F, G, H, I, produci ex A, in C, D, E, & ex B, in E: Nos autem eosdem ostendimus procreari ex B, in E, D, C, & ex A, in C.

A . . B . .
C . . . . D . . . . . E . . . . . .
F, 8. G, 12. H, 18. I, 27.
K, 16. L, 24. M, 36. N, 54. O, 81.

COROLLARIVM I.

HINC sit, si tres numeri minimi sint continue proportionales, extremos quadratos esse: si autem quatuor fuerint, cubos. Nam trium minimorum C, D, E, extremi C, & E, facti sunt ex A, & B, in seipsos, ideoque æqualiter sunt æquales. Quare ex definitione 18. quadrati sunt. Eodem modo, cum quatuor minimorum F, G, H, I, extremi F, & I, geniti sint ex A, & B, lateribus in C, & E, quadratos ipsorum A, & B, hoc est, tam numerus F, ex mutua multiplicatione

catione trium numerorum æqualium A, A, A, quam numerus I, ex multiplicatione mutua trium numerorum æqualium B, B, B, sit procreatus, ac propterea vterque sit æqualiter æqualis æqualiter; ipsi ex defin. 19. cubi erunt.

SIC etiam, si fuerint quinque numeri minimi proportionales continue; erunt extremi eorum quadrati quadratorum; Et sic si fuerint plures, erunt eorum extremi, numeri alij sub alijs denominationibus, quæ in Algebra solent explicari. Hæc autem omnia manifesta sunt ex multiplicationibus, quibus numeri proportionales, iuxta hanc propos. procreantur.

NEQVE vero dicere quis poterit, corollarium hoc verũ quidem esse in tribus, quatuorve numeris minimis continuè proportionalibus inuentis arte in hac propos. tradita, non autem in quibusuis tribus, quatuorve numeris minimis continuè proportionalibus vtcunq; propositis: Dicere, inquam, nemo hoc poterit, quia dati quilibet tres numeri, vel quatuor minimi continuè proportionales æquales prorsus sunt ijs, qui per hanc propos. inueniuntur. Si enim illi dati minores essent inuentis, non essent inuenti, minimi, quod est contra hãc propos. Si vero dati, maiores essent inuentis, non essent illi dati, minimi. quod est contra hypothesim. Quod clarissimè ita fiet perspicuum. Dati sint tres numeri A, B, C, minimi continuè proportionales:

A --- B ----- C -----
D, 2. E, 3.
F, 4. G, 6. H, 9.

sumptisq; duobus minimis D, E, in proportione A, ad B, vel B, ad C, ex scholio propos. 35. lib. 7. inueniantur per hanc propos. ex his duobus minimis D, E, tres minimi F, G, H, in eadem proportione. Dico tres A, B, C, datos à tribus inuentis F, G, H, non differre. Nam necessario A, ipsi F, æqualis erit; atq; ita, cum sit, vt A, ad B, ita F, ad G, erit quoq; permutando, vt A, ad F, ita B, ad G; ac proinde si A, æqualis est ipsi F, erit & B, ipsi G, æqualis: Eadẽq; ratione ostendemus C, æqualem esse ipsi H: ideoq; tres A, B, C, tribus F, G, H, singuli singulis, æquales erũt. Eadẽq; ratio est de quatuor, aut pluribus.

Quòd si A, dicatur minor, quàm F, ostendemus eodem argumento & B, C, minores esse, quàm G, H. Quare F, G, H, minimi non sunt. quod est absurdum, & contra hanc propos. Si vero A, concedatur maior, quàm F; erunt eodem argumento & B, C, maiores, quàm G, H: atq; idcirco A, B, C, minimi non sunt. quod est contra hypothesim. Cum ergo A, minor non sit, aut maior, quàm F; æqualis omnino erit; ideoq; vt ostensum est, & B, C, ipsis G, H, æquales erunt. Quod est propositũ.

COROLLARIVM. II.

PERSPICVVM quoque est, extremos numeros proportionalium quotcunque secundum hanc propositionem inuentorum in data ratione minimorum, inter se primos esse. Quod quidem facile ostendemus ex multiplicationibus, quibus numeri proportionales producuntur, & ex propos. 29. lib. 7. quemadmodum id demonstratum fuit de numeris extremis C, E, & F, I, &c.

COROLLARIVM III.

CONSTAT etiam, duos numeros minimos in data ratione, metiri omnes medios quotcunque minimorum in eadem ratione; quia scilicet producuntur ex illorum multiplicatione in alios quosdam numeros. Vt in dato exemplo D, medius producitur ex A, in B; & G, H, medij ex A, in D, & E, vel ex B, in C, & D; Item L, M, N, medij ex A, in G, H, I, vel ex B, in F, G, H; vt ex demonstratione Euclidis, & ea, quam in Scholio tradidimus, apparet.

SCHOLIVM II.

QVONIAM vero tam numeri A, C, F, K, quam B, E, I, O, ex constructione, continue proportionales sunt ab vnitate, quod illorum quidem proportiones a numero A, horum vero a B, denominentur, vt clarius demonstrabitur propos. 9. huius lib. fit vt extremi numeri quotcunque minimorum continue proportionalium sint vltimi tot continue proportionalium ab vnitate, quorum proportiones a minimis numeris datæ rationis denominantur, quot sunt propositi minimi continue proportionales. Ita enim in superiori exemplo vides C, & E, extre-

extremos numeros trium minimorum continue proportionalium in proportione A, ad B, esse vltimos trium numerorum continue proportionalium ab vnitate, quorum proportiones denominantur ab A, & B. At vero F, & I, extremos quatuor continue proportionalium, esse vltimos quatuor numerorum ab vnitate continue proportionalium, &c. Quamobrem si quis optet inuenire quotcunque integros numeros minimos in data ratione non multiplici (in multiplici enim res facilis est, quippe quæ ab vnitate incipiat) continue proportionales; id facile hac via consequetur. Inuentis duobus minimis numeris in data ratione, sumantur ab vnitate tot numeri continue proportionales in proportione, cuius denominator sit minor illorum, quot numeri minimi inueniendi proponuntur. Nam vltimus illorum ab vnitate continue proportionalium erit primus continue proportionalium inueniendorum, qui si per denominatorem datæ proportionis multiplicetur, habebitur secundus, & si hic rursum per denominatorem eundem multiplicetur, gignetur tertius, & sic deinceps. Vt si quis desideret octo minimos numeros in proportione sesquialtera: Inuentis minimis duobus numeris 3. & 2. in sesquialtera proportione, sumendi erunt octo numeri ab vnitate continue proportionales in proportione dupla, quæ denominatur a 2. hoc modo 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. Nam horum vltimus 128. erit primus octo numerorum inueniendorum, qui minimi sint in proportione 3. ad 2. vt hic patet, 128. 192. 288. 432. 648. 972. 1458. 2187. si maiores numeri ad minores referantur. Eademque de reliquis est ratio.

BOETIVS autem, & alij regulam hanc ita explicãt, vt & nos quinto lib. in tractatione proportionum declarauimus. Sumantur tot numeri continue ab vnitate multiplices secundum denominationem partis aliquotæ, cuius in data proportione fit mentio, quot numeros continue proportionales oportet inuenire in data proportione. Nam vltimus numerus erit primus inueniendorum. Vt in dato exemplo, quia desiderantur octo numeri minimi in proportione sesquialtera, sumendi sunt octo numeri ab vnitate dupli, vt prius, qui nimirum denominantur a denominatore partis secundæ, seu dimidiæ, cuius mentio fit in proportione sesquialtera, hoc est, a 2. Quod si optentur quinque numeri minimi in proportione sesquiquin-

ta, sumendi erunt quinque numeri ab vnitate quintupli; vt hic 1. 5. 25. 125. 625. Nam 625. est primus quinque numerorum in proportione sesquiquinta, vt hic apparet; 625. 750. 900. 1080. 1296. Atque ita de cæteris. Porro hac arte non possunt inueniri (quod mirum videri possit) plures numeri continue proportionales, quam propositi sunt. Neque enim post 1296. in vltimo exemplo alius numerus inuenietur, qui habeat ad 1296. proportionem sesquiquintam; sicut nec in priori exemplo post 2187. alius potest reperiri, qui ad 2187. proportionem sesquialteram habeat. Ratio autem huius rei est, quod extremi hac arte inuenti sint inter se primi, vt ex demonstratione liquet. Hinc enim fit, vt vltimus non possit esse ad alium quempiam numerum, vt primus ad secundum, veluti propos. 17. lib. 9. demonstrabitur.

3. THEOR. 2. PROPOS. 3.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales minimi omnium eandē cum eis rationem habentium; Illorum extremi sunt inter se primi.

SINT numeri A, B, C, D, minimi deinceps proportionales. Dico extremos A, & D, inter se primos esse. Inueniantur enim duo E, F, minimi in ratione A, ad B, vel B, ad C, vel C, ad D. Deinde iuxta viam præcedentis problematis, tres minimi G, H, I, in eadem ratione, nec non quatuor K, L, M, N, & sic deinceps, donec multitudo K, L, M, N, æqualis sit multitudini A, B, C, D. Quoniam igitur A, B, C, D, minimi sunt in sua proportione, & in eadem quoque proportione minimi sumpti sunt K, L, M, N, illis multitudine æquales; erunt singuli singulis æquales, ne minores minimis dentur in eadem proportione, nimirum A, ipsi K, & D, ipsi N. Id quod nos Geometricè demon-

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27.
E, 2. F, 3.
G, 4. H, 6. I, 9.
K, 8. L, 12. M, 18. N, 27.

demonstrauimus ad finem coroll. 1. superioris propos. Sunt autem per coroll. 2. propos. præcedentis K, & N, inter se primi. Primi ergo quoque sunt A, & D. Quocirca, si sint quotcunque numeri deinceps proportionales minimi omnium eandem cum eis, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

HÆC propositio intelligenda est de numeris minimis continue proportionalibus, vt ex eius demonstratione, & verbis Euclidis apparere potest. Nam si A, B, C, D, non essent proportionales continue, inueniri non possent, ex præcedenti problemate, K, L, M, N, totidem minimi in eadem proportione. Immo si diuersæ sint proportiones, dabuntur aliquando minimi numeri deinceps proportionales, hoc est, continuati in suis proportionibus diuersis, quorum extremi non sunt inter se primi. Sunt enim hi numeri 6. 10. 13. 18. minimi in continuatione suarum proportionum, cum tamen extremi 6. & 18. compositi sint inter se. Itaque hoc Theorema primi est conuersum, quo ad numeros continue proportionales. Etenim numeri quotcunque continue proportionales, quorum extremi inter se sint primi, minimi sunt in sua proportione, vt constat ex 1. theor. Et vicissim, numeri extremi quotcunque minimorum continue proportionalium, inter se primi sunt, velut hic demonstratum est. At vero primum theorema, prout spectat ad numeros non continue proportionales, conuerti nequit. Nam licet numeri quotcunque non continue proportionales, quorum extremi sunt inter se primi, minimi sint in continuatione suarum proportionum, vt ex scholio propos. 1. huius lib. liquet; Tamen non semper e contrario, numeri extremi quotcunque minimorum non continue proportionalium, inter se primi sunt, vt manifestum est in exemplo nuper prolato 6. 10. 13. 18.

PROBL. 2. PROPOS. 4. 4.

RATIONIBVS datis quotcunq; in minimis numeris, reperire numeros deinceps minimos in datis rationibus.

SINT primum datæ duæ rationes in minimis numeris A, ad B, & C, ad D; oporteatque inuenire tres numeros minimos deinceps proportionales, in datis proportionibus.[a] Inuento numero E, minimo, quem metiantur B, & C, secundus & tertius; quoties B, ipsum E, metitur, toties A, metiatur ipsum F; & quoties C, eundem E, toties ipsum G, metiatur D. Dico F, E, G, minimos esse in proportionibus datis. Quod enim deinceps datas proportiones habeant, ita ostendemus. Quoniam A, & B, æque metiuntur ipsos F, & E, hoc est, per eundem numerum; metiantur per H.

A, 6. B, 5. C, 4 D, 3.
H, 4. F, 24. E, 20. G, 15.
I----- K ----- L ----

[a] 36. sept.

Quo posito,[b] A, & B, multiplicantes ipsum H, producent F, & E. [c] Quare erit vt A, ad B, ita F, ad E. Eadem ratione, cum C, & D, æque metiantur ipsos E, & G; erit vt C, ad D, ita E, ad G. Igitur F, E, G, deinceps proportionales sunt in rationibus A, ad B, & C, ad D. Quod autem minimi sint, sic manifestum erit. Si non sunt minimi, erunt aliqui illis minores, singulis singuli, in eisdem rationibus: sint, si fieri potest, I, K, L. Quia igitur A, & B, minimi sunt in sua proportione; [d] ipsi æque metientur I, & K, in eadem proportione existentes, nimirum B, ipsum K, consequens consequentem. Eademque ratione C, & D, æque metientur K, & L, nimirum C, ipsum K, antecedens antecedentem. Quare cum B, & C, ipsum K, metiantur; [e] metietur eundem K, numerus E, minimus, quem B, & C, metiuntur, minorem maior. Quod est absurdum. Non igitur erunt alij numeri minores ipsis F, E, G, in rationibus A, ad B, & C, ad D; Ac propterea ipsi F, E, G, minimi sunt in datis rationibus.

[b] 9. pron.
[c] 18. sept.
[d] 21. sept.
[e] 37. sept.

SINT deinde datæ tres rationes in numeris minimis A, ad B; C, ad D; & E, ad F; inueniendique sint quatuor minimi deinceps proportionales in datis rationibus.[f] Inuento rursum numero G, minimo, quem metiantur B, secundus, & C, tertius; quoties B, ipsum G, metitur, toties metiatur A, ipsum H; & quoties C, ipsum G, toties D, ipsum I, metiatur. Quibus peractis, aut E, ipsum I, metitur, aut non. Metiatur primum; Et quoties E, ipsum I, metitur, toties F, metiatur ipsum K. Dico H, G, I, K, minimos esse in datis rationibus. Quod enim sint in datis rationibus deinceps proportionales, constat. Cum enim A, & B, ipsos H, & G, æque metiantur; erit vt prius, quemadmodum A, ad B, ita H, ad G. Eadem ratione erit, vt C, ad D, ita G, ad I: & vt E, ad F, ita I, ad K; quòd tam C, & D, ipsos G, & I, quàm E, & F, ipsos I, & K, metiantur æque. Igitur H, G, I, K, deinceps proportionales sunt in datis rationibus. Quod autem sint minimi, sic ostendemus. Si non sunt minimi, sint in eisdem rationibus minores ipsis, singuli singulis, si fieri potest L, M, N, O. Quia igitur A, & B, minimi sunt in sua proportione; [a] ipsi metientur æque L, & M, eandem habentes rationem, nimirum B, consequens consequentem M. Eodem modo C, & D, æque metientur M, & N, nimirum C, antecedens antecedentem M. Quocirca cum B, & C, ipsum M, metiantur; [b] metietur eundem M, & numerus G, minimus, quem B, & C, metiuntur, minorem maior. Quod est absurdum. Non ergo erunt alij numeri deinceps proportionales in rationibus datis minores ipsis H, G, I, K; Ac proinde H, G, I, K, in datis rationibus minimi sunt.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 5. F, 7.
H, 24. G, 20. I, 15. K, 21.
L---- M------ N---- O-----

[a] 21. sept.
[b] 37. sept.

SED iam E, non metiatur ipsum I. [c] Inuento ergo numero K, minimo, quem E, & I, metiantur; quoties I, ipsum K, metitur, toties quoque G, ipsum L; & H, ipsum M, metiatur; & quoties E, metitur K, toties metiatur F, ipsum N. Dico M, L, K, N, esse minimos in proportionibus datis. Cum enim H, G, I, ipsos M, L, K, æque metiantur; erit vt supra, quemadmodum H, ad G, ita M, ad L; & vt G, ad I, ita L, ad K. Est autem eadem ratione, vt H, ad G, ita A, ad B; & vt G, ad I, ita C, ad D; quòd & A, B, ipsos H, G; & C, D, ipsos G, I, metiantur æque. Igitur vt A, ad B, ita M, ad L; & vt C, ad D, ita L, ad K. Atqui vt E, ad F, ita quoque

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7.
H, 24. G, 20. I, 15.
M, 48. L, 40. K, 30. N, 105.
O----- P---- Q---- R-----

[c] 36. sept.

A,6. B,5. C,4. D,3. E,2. F,7. H,24. G,20. I,15. M,48. L,40. K,30. N,105. O----- P---- Q---- R-----

est K, ad N, cum E, F, æque ipsos K, N, metiantur. Sunt ergo M, L, K, N, deinceps proportionales in datis rationibus. Dico & minimos eos esse in eisdem rationibus. Si namque non sunt minimi, dentur ipsis minores in rationibus eisdem O, P, Q, R, si fieri potest. Quoniam ergo A, B, in sua proportione minimi sunt; [a] ipsi æque metientur O, P, in eadem ratione existentes, nimirum B, consequens consequentem P. Eodem argumento C, D, ipsos P, Q, metientur æque, videlicet antecedens C, antecedentem P; Atq; adeo cum B, & C, ipsum P, metiantur; [b] metietur quoque G, minimus, quem metiuntur B, & C, eundem P. Quia verò ostensum est, esse vt G, ad I, ita L, ad K, hoc est, ita P, ad Q; erit permutando, vt G, ad P, ita I, ad Q: Atque idcirco, cum metiatur G, ipsum P, metietur & I, ipsum Q. Metitur autem & E, eundem Q; [c] quod E, F, in sua proportione minimi æque metiantur Q, R, eiusdem rationis, nimirum antecedens E, antecedentem Q. Ergo cum metiantur I, E, ipsum Q; [d] metietur etiam K, quem minimum metiuntur I, E, eundem Q, maior minorem. Quod est absurdum. Non dabuntur ergo alij numeri deinceps proportionales in datis rationibus minores quam M, L, K, N; propterea que ipsi M, L, K, N, minimi sunt.

[a] 21. sept.

[b] 37. sept.

[c] 21. sept.

[d] 37. sept.

QVOD si quatuor rationes datæ fuerint; inueniendi prius erunt numeri deinceps proportionales in tribus prioribus rationibus; deinde cum quarta posteriori agendum, vt nuper cũ tertia proportione data. Veluti si quarta proportio data sit in numeris minimis S, ad T; inueniemus primum M, L, K, N, minimos deinceps proportionales in tribus proportionibus A, ad B; C, ad D; & E, ad F. Deinde si S, ipsum N, metiatur, accipiemus O, quem T, toties metiatur, quoties S, ipsum N, metitur. Nam M, L, K, N, O, erunt deinceps proportionales

A,6. B,5. C,4. D,3. E,2. F,7. M,48. L,40. K,30. N,105. O,70.

A,6. B,5. C,4. D,3. E,2. F,7. S,9. T,2. M,48. L,40. K,30. N,105. R,144. Q,120. P,90. O,315. V,70.

tionales in datis rationibus minimi. Si vero S, ipsum N, non metiatur; [a] sumemus O, quem S, & N, minimum metiantur. Et quoties N, ipsum O, metitur, toties metiatur K, ipsum P; & L, ipsum Q; & M, ipsum R; quoties vero S, eundẽ O, metitur, toties T, ipsum V, metiatur. His enim peractis, erunt R, Q, P, O, V, deinceps proportionales minimi in rationibus A, ad B; C, ad D; E, ad F, & S, ad T. Quæ omnia eo argumento, quo prius, demonstrabimus. Eodem modo operabimur, si quinque, vel plures rationes datæ sint in minimis numeris. Itaque rationibus datis quotcunque in minimis numeris, &c. Quod faciendum erat.

[a] 36. sept.

SCHOLIVM.

SI omnes rationes, vel aliquæ datæ fuerint in numeris nõ minimis, absoluemus nihilo minus problema propositum; sed prius exhibendæ erunt rationes datæ in minimis numeris, antequam ad inuentionem minimorũ numerorũ deinceps proportionalium aggrediamur, vt ex demonstratione manifestũ est.

DIFFERT autem hoc problema ab eo, quod propositione 35. lib. 7. demonstratum est, quod hic non dantur numeri deinceps proportionales, ita vt quilibet intermedius sit & antecedens, & cõsequens, licet proportiones sint diuersæ, quemadmodum ibi.

PORRO inuentis minimis numeris deinceps proportionalibus in datis rationibus, si ij multiplicentur per quemcunque numerum eundem, procreabuntur alij in eisdem rationibus deinceps proportionales, vt constat ex ijs, quæ ad propos. 18. lib. 7. demonstrauimus.

THEOR. 3. PROPOS. 5.

5.

PLANI numeri rationem inter se habent ex lateribus compositam.

SINT

SINT duo numeri plani A, B, & latera prioris quæcunque C, D; posterioris vero E, F. Dico proportionem A, ad B, compositam esse ex laterum proportionibus, nimirum ex proportionibus C, ad E, & D, ad F; vel ex proportionibus C, ad F, & D, ad E; ita vt latera vnius sint antecedentia, & alterius consequentia, quemadmodum propos. 23. lib. 6. docuimus. Faciant D, & E, se mutuo multiplicantes numerum G. Quoniam igitur D, multiplicans C, & E, fecit A, & G; [a] erit A, ad G, vt C, ad E. Eodemque modo, quia E, multiplicans D, & F, fecit G, & B; erit G, ad B, vt D, ad F. Quare A, G, B, sunt deinceps proportionales in proportionibus laterum C, ad E, & D, ad F. [b] Componitur autem proportio A, ad B, ex proportionibus A, ad G, & G, ad B. Eadem ergo proportio A, ad B, ex proportionibus laterum C, ad E, & D, ad F, componitur.

A, 24. B, 48. G, 18. C, 4. D, 6. E, 3. F, 16.

[a] 17. sept.

[b] 27. defin.

EODEM argumento ostendemus, proportionem A, ad B, compositam esse ex proportionibus C, ad F, & D, ad E, si latera E, & F, loca inter se permutent, fiatque G, ex mutua D, & F, multiplicatione. Cum enim D, multiplicans C, & F, faciat A, & G; [c] erit A, ad G, vt C, ad F. Similiter cum F, multiplicans D, & E, faciat G, & B; erit G, ad B, vt D, ad E. Ac proinde rursum A, G, B, deinceps proportionales sunt in rationibus laterum C, ad F, & D, ad E. [d] Cum ergo proportio A, ad B, componatur ex proportionibus A, ad G, & G, ad B; Eadem ex proportionibus C, ad F, & D, ad E, componetur. Quare plani numeri rationem inter se habent ex lateribus compositam. Quod demonstrandum erat.

A, 24. B, 48. G, 96. C, 4. D, 6. F, 16. E, 3.

[c] 17. sept.

[d] 27. defin.

SCHOLIVM.

ESSET hoc loco disputandum de compositione proportionum, quemadmodum in expositione defin. 10. lib. 5. & defin. 5. lib. 6. & in scholio propos. 23. lib. 6. facturos nos hoc loco recepimus.

recepimus. Sed quia res hæc accuratè explicari non potest sine fractorum numerorum operationibus, quas ad finem lib. 9. demonstrabimus; differendam eam eundem in locum censuimus. Hoc Lectorem commonere volui, vt sciat, vbi res hæc pertractetur à nobis, & cur eam hic, vt polliciti sumus, non exponamus.

THEOR. 4. PROPOS. 6. 6.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem secundum non metiatur; neq; alius quisquam vllum metietur.

SINT continue proportionales A, B, C, D, E; & A, primus non metiatur B, secundum. Dico neque alium quenquam illorum vllum metiri. Quod enim nullus proximè insequêtem metiatur, manifestum est. Nam cum sit, vt A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E: A, vero ipsum B, non metiatur; neque B, ipsum C, neque C, ipsum D, neque D, ipsum E, metietur. Quod vero nec alius quisquam illorum vllum metiatur, sic demonstrabimus. [a] Sumptis tribus numeris minimis F, G, H, in ratione A. ad B; erit ex æquo, vt A, ad C, ita F, ad H. Quia vero est vt A, ad B, ita F, ad G; non metitur autem A, ipsum B; neque F, ipsum G, metietur; Ac propterea F, non erit vnitas, alias F, ipsum G, metietur, cum vnitas omnem numerum metiatur. [b] Quare cum F, & H, sint inter se primi, & F, non sit vnitas; nõ metietur F, ipsum H; Atque ob id neque A, ipsum C, metietur. Est enim ostensum esse A, ad C, vt F, ad H. Eadem ratione ostendemus, quod nec B, tertium a se numerum D, nec C, tertium E, metiatur. Quod si quatuor numeri minimi sumantur in ratione A, ad B, simili modo demonstra-

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81. F, 4. G, 6. H, 9.

[a] 2. octaui.

[b] 3. octaui.

monstrabimus, neque A, quartum D, neque B, quartum E, metiri. Atque ita de reliquis. Si itaque sint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

SI maiores numeri ad minores referantur, proponi poterit hæc propositio ad hunc modum.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem secundi non sit multiplex, neque alius quisquam vllius multiplex erit.

SINT enim continue proportionales A, B, C, D, E; & A, primus non sit multiplex secundi B. Dico neque alium quenquam illorum vllius esse multiplicem. Quod enim nullus proxime insequentis multiplex sit, constat. Nam cum sit, vt A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E: non sit autem A, ipsius B, multiplex; neque B, ipsius C; neque C, ipsius D; neque D, ipsius E, multiplex erit. Quod autem neq; alius quisquam illorum vllius sit multiplex, hoc pacto confirmabitur. Quoniã D, ipsius E, non est multiplex: non metietur e contrario E, ipsum D, per ea, quæ in defin. 5. lib. 7. scripsimus. Quoniam igitur sunt numeri deinceps proportionales quotcunque E, D, C, B, A; (Nam cum sit D, ad E, vt C, ad D; B, ad C; & A, ad B; erit conuertendo E, ad D, vt D, ad C; C, ad B; & B, ad A.) Et E, primus secundum D, non metitur; [a] neq; alius quisquam illorum vllum metietur. Quare e contrario, si maiores ad minores referantur, neque quisquam illorum vllius erit multiplex, per ea, quæ in defin. 5. lib. 7. scripsimus.

a 6. octaui.

SED & ex his sequens theorema demonstrabimus.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus vero secundum metiatur; & quicunquealius quemlibet sequentium metietur. Si primus autem secundi sit multiplex; & quicunque alius cuiuslibet sequentium multiplex erit.

SINT deinceps proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, E; & primus A, secundum B, metiatur. Dico & quemque illorum quemlibet sequentium metiri. Quod enim quilibet proxime insequentem metiatur, A, 3. B, 6. C, 12. D, 24. E, 48. perspicuum est. Nam cum sit, vt A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E; metiatur autem A, ipsum B; & B, ipsum C; & C, ipsum D; & D, ipsum E, metietur. Quod autem quilibet illorum quemlibet sequentium metiatur, nempe B, ipsos D, & E, hoc modo ostendetur. Quia B, ipsum C, metitur, & C, ipsum D; [a] metietur quoque B, ipsum D. Rursus quia D, ipsum E, metitur; [b] metietur quoque B, (ipsum D, metiens) eundem E. Et sic de reliquis.

a 11. pron.
b 11. pron.

SED iam primus A, multiplex sit B, secundi. Dico & quemque illorum cuiuslibet sequentium multiplicem esse. Cum enim sit vt A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E: sit autem A, ipsius B, multiplex; erit & B, ipsius C; & C, ipsius D; & D, ipsius E, multiplex. Quilibet ergo cuiuslibet proxime insequentis multiplex est. Rursus quia D, ipsius E, est multiplex; metietur e contrario E, ipsum D: sunt autem, per inuersam rationem, E, D, C, B, A, continue proportionales. Igitur & quilibet illorum quemlibet sequentium metietur, vt demonstratum est; Ac propterea e contrario, si maiores ad minores referantur, & quilibet cuiusque sequentium multiplex erit.

CONVERTEMVS etiam hanc propositionem sextam, & theorema, quod primo loco in scholio demonstrauimus, hac ratione.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quisquam nullum a secundo metiatur; neque primus secundum metietur. Et si primus, vel alius quisquam nullius a secundo sit multiplex: neque primus secundi multiplex erit.

SINT deinceps proportionales A, B, C, D, E; & primus A, vel alius quisque nullum à secundo B, metiatur. Dico neq; A, primum, metiri B, secũdum. Si enim A, primus secundum B, dicatur metiri; metietur quoque, per ea, quæ secundo loco in hoc scholio ostendimus, quicunque alius quemlibet sequentium. Quod est absurdum, cum neque primus, neque alius quisquam vllum a secundo metiri ponatur. Non ergo A, ipsum B, metietur.

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.

IAM vero A, primus, vel alius quisquam nullius a secundo B, sit multiplex. Dico neq; A, primum multiplicem esse B, secundi. Si namque A, primus multiplex esse dicatur B, secundi; multiplex quoque erit quicunque alius cuiuslibet sequentium, ex ijs, quæ secundo theoremate huius scholij demonstrauimus. Quod est absurdum. Neque enim primus, neque alius quisquam vllius a secundo multiplex esse ponitur. Non igitur A, ipsius B, multiplex erit.

A, 81. B, 54. C, 36. D, 24. E, 16.

7. THEOR. 5. PROPOS. 7.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem extremum metiatur, is etiam metietur secundum.

SINT deinceps proportionales A, B, C, D, E; & A, primus

primus extremum E, metiatur. Dico & A, primum metiri B, secundum. Si enim A, ipsum B, non dicatur metiri: neq; alius quisquam vllum metietur. Quare nec A, ipsum E. Quod est absurdum. Ponitur enim A, metiri E. Igitur A, primus B, secundum metietur; Atque idcirco, si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat demonstrandum.

A, 3. B, 6. C, 12. D, 24. E, 48.

a 6. octaui.

SCHOLIVM.

VT theorema, quod secundo loco in scholio præcedentis propos. demonstrauimus, conuertamus, amplificabimus hanc propos. hoc modo.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quisquam quemlibet a secundo metiatur; metietur & primus secundum. Et si primus, vel alius quisquã cuiuslibet a secundo sit multiplex; primus quoque secundi multiplex erit.

QVOD eodem modo demonstrabimus. Si enim primus non dicatur metiri secundum, vel illius esse multiplex; neque alius quisquam vllum metietur; vel illius multiplex erit, ex propos. 6. & 1. theoremate scholij præcedentis.

THEOR. 6. PROPOS. 8. 8.

SI inter duos numeros medij continua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri: tot & inter alios eandem cum illis habentes rationem medij continua proportione cadent.

CADANT

CADANT inter duos numeros A, B, medij proportionales continue C, D; sitque vt A, ad B, ita E, ad F. Dico tot medios numeros continue proportionales cadere inter E, & F, quot inter A, & B. Sumptis enim totidem numeris G, H, I, K, minimis in ratione A, ad C, quot sunt numeri A, C, D, B; erit ex æquo, vt A, ad B, atq; adeo vt E, ad F, ita G, ad K. [a] Quare cum G, & K, inter se primi sint, quippe qui extremi sint minimorũ numerorum; [b] ac propterea in sua proportione minimi; [c] æque metietur G, ipsum E, & K, ipsum F. Quoties ergo G, & K, ipsos E, & F, metiuntur, toties H, & I, alios numeros L, & M, metiantur, ita vt numeri G, H, I, K, numeros E, L, M, F, æque metiantur, singuli singulos. [d] Quia igitur G, H, I, K, multiplicantes numerum, per quem metiuntur numeros E, L, M, F, ipsos E, L, M, F, producũt; in eisdem rationibus erunt E, L, M, F, in quibus G, H, I, K, vt ad propos. 18. lib. 7. demonstrauimus. At G, H, I, K, sunt continue proportionales. Igitur & E, L, M, F, continue proportionales sunt; Atque idcirco, cum multitudo E, L, M, F, æqualis sit multitudini A, C, D, B; tot cadent medij proportionales inter E, & F, quot inter A, & B. Si igitur inter duos numeros medij continua proportione ceciderint, &c. Quod demonstrandum erat.

A, 24.	C, 36.	D, 54.	B. 81.
G, 8.	H, 12.	I, 18.	K, 27.
E, 32.	L, 48.	M, 72.	F, 108.
A, 40.	C, 20.	D, 10.	B, 5.
G, 8.	H, 4.	I, 2.	K, 1.
E, 8.	L, 4.	M, 2.	F, 1.
A, 27.	C, 9.	D, 3.	B, 1.
G, 27.	H, 9.	I, 3.	K, 1.
E, 108.	L, 36.	M, 12.	F, 4.

[a] 3. octaui.
[b] 23. sept.
[c] 21. sept.
[d] 9. pron.

SCHOLIVM.

NON solum ex demonstratione constat, totidem medios proportionales cadere inter E, & F, quot inter A, & B; verum etiam eandem esse proportionem numerorum E, L, M, F, quæ est numerorum A, C, D, B. Ostensum enim est E, L, M, F, in eadem esse proportione, in qua G, H, I, K: Sed hi eandem habent, ex constructione, quam A, C, D, B. Igitur

Igitur & E, L, M, F, eandem habent, quam A, C, D, B.

EADEM hæc propositio vera est, si existentibus numeris A, & B, sumatur vel E, vel F, vnitas. Item si vel A, vel B, fuerit vnitas, existentibus E, & F, numeris; vt in exemplis apparet.

CONSTAT etiam ex hoc theoremate, inter numeros duplæ proportionis, vel superparticularis cuiusuis, vel superbipartientis, non posse cadere numerum medium proportionalẽ. Cum enim dupla proportio in minimis numeris reperiatur inter binarium, & vnitatem; superparticularis vero inter numeros sola vnitate differentes; superbipartiens denique inter numeros, quorum differentia est binarius: si inter duos numeros duplæ proportionis, vel superparticularis, vel superbipartientis, medius numerus caderet proportionalis; caderet quoque, per hoc theorema, numerus aliquis medius proportionalis inter binarium, & vnitatem; vel inter numeros sola vnitate differentes, vel etiam binario, nimirum inter numeros minimos, qui easdem cum illis proportiones habent: quod fieri nulla ratione potest. Nam neque inter binarium & vnitatem, neque inter duos numeros sola vnitate differentes, vllus numerus interponitur, tantum abest, vt aliquem medium proportionalem ipsi recipiant. Similiter inter duos numeros binario inter se distantes interijcitur solum numerus, qui ab vtroque vnitate differt; Quem nulla posse ratione esse inter illos medium proportionalem, in hunc modum demonstrabimus. Differant numeri AB, CD, (siue CD, vnitas sit, & AB, ternarius, siue non,) binario, inter quos cadat numerus EF, minor vnitate quam AB, maior vero quam CD, vnitate quoque. Dico EF, non esse medium proportionalẽ inter AB, CD. Si enim dicatur esse AB, ad EF, vt EF, ad CD: ablato ex AB, numero AG, ipsi EF, æquali, vt reliqua sit vnitas GB; & ex EF, numero EH, ipsi CD, æquali, vt relinquatur etiam vnitas HF; erit quoq; vt AB, totus ad EF, totum, ita AG, ablatus ad EH, ablatum; cum AG, EH, ipsis EF, CD, æquales sint, ex constructione. [a] Igitur erit quoque reliquus GB, ad reliquum

A .. G . B	A ..... G . B
E . H . F	E ..... H . F
C . D	C ..... D

HF, hoc est, vnitas ad vnitatem, vt totus AB, ad totum EF, maior ad minorem. Quod est absurdum. Non ergo EF, medius proportionalis est inter AB, & CD.

ITA QVE inter numeros triplæ proportionis medius proportionalis cadere non potest. Alioquin caderet etiam medius proportionalis, ex hoc theoremate, inter 3. & 1. minimos numeros proportionis triplæ, qui binario inter se differunt. quod fieri non posse, proxime demonstrauimus.

PARI ratione inter numeros quintuplæ proportionis cadere non potest medius proportionalis. Si enim cadere dicatur, cadet quoque, ex hoc theoremate, medius proportionalis inter 5. & 1. minimos numeros proportionis quintuplæ. quod fieri non posse, ita demonstrabimus. Cadat primum, si fieri potest, inter quinarium AB, & vnitatem C, medius proportionalis binarius, vel ternarius D: ita vt sit AB, ad D, vt D, ad C: Et conuertendo C, ad D, vt D, ad AB. Et quoniam vnitas C, metitur D; metietur quoque D, quinarium AB. At binarius, vel ternarius D, metitur quoque ternarium AE. Igitur D, metitur totum AE, & ablatum AB:

A.....B.E
D.. D...
C.

[a] 11. prom. [a] ac proinde & D, numerus metietur reliquam vnitatē BE. Quod est absurdum.

CADAT deinde, si fieri potest, inter quinarium AB, & vnitatem C, medius proportionalis quaternarius D. Ostendemus ergo, vt prius, D, metiri quinariū AB: Metitur autem quaternarius D, quaternarium etiam AE. Igitur D, metitur totum AB, & ablatum AE:

A....E.B
D....
C.

[b] 11. prom. [b] ac proinde & D, numerus reliquam vnitatem EB, metietur. Quod est absurdum.

EX quibus fit, neque illud interuallum Musicum, quod in dupla proportione consistit, vt Diapason, vel, vt vulgo dicitur, Octaua; neque illud, quod in sesquioctaua proportione reperitur, cuiusmodi est Tonus, seu vulgo Secunda, bifariam posse secari, hoc est, in duas proportiones æquales. Illa enim proportio bifariam (quod ad propositum attinet) secari dicitur, inter cuius terminos medius proportionalis cadit: Vt quia inter hos terminos 24. & 6. proportionis quadruplæ cadit medius proportionalis numerus 12. hoc modo. 24. 12. 6. Idcirco proportio

proportio quadrupla bifariam diuisa esse dicitur in duas duplas proportiones. Cum ergo ostensum sit, inter numeros duplæ proportionis, & superparticularis, qualis est sesquioctaua, non cadere medium numerum proportionalem; perspicuum est, Diapason, & Tonum, bifariam secari non posse. Vnde Diapason prima sui diuisione in Diapenten, & Diatessaron, quorum interuallorum illud in proportione sesquialtera, hoc vero in sesquitertia consistit, apud Musicos secatur, vt hic apparet. 2. 3. 4. Est enim hic proportio dupla diuisa in proportionem sesquialteram, & sesquitertiam, tanquam in maximas sui partes inter se inæquales. Ita quoque Tonus in duo semitonia, quorum alterum maius, alterum minus dicitur, secari solet. Sed de his plura apud Musicos reperies.

RVRSVM ex his demonstrari potest, proportionem diametri cuiusuis quadrati ad latus eiusdem, numeris non posse exprimi, sed esse irrationalem. Cum enim per ea, quæ ad posf. 47. lib. 1. demonstrauimus, quadratum diametri duplum sit quadrati ex latere descripti; quadratorum vero proportio sit duplicata proportionis laterum; fit, vt proportio quadrati ex diametro descripti ad quadratum lateris duplicata sit proportionis diametri ad latus. Cum ergo illa proportio, cuius duplicata est proportio dupla, numeris exprimi nequeat, quòd inter numeros duplæ proportionis medius proportionalis non cadat, qui illam bifariam secet, vt ostendimus; manifestum est, nec proportionem diametri ad latus numeris exprimi posse, sed esse irrationalem, seu, quod idem est, diametrum esse lateri incommensurabilem. qua de re plura ad 9. & vltimam posf. lib. 10. scribemus.

THEOR. 7. PROPOS. 9. 9.

SI duo numeri sint inter se primi, & inter eos medij cõtinua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter vtrumque eorum, ac

vnitatem medij continua proportione cadent.

CADANT inter numeros A, B, inter se primos medij continue proportionales C, D. Dico totidem cadere continue proportionales inter vnitatem, & A, nec non inter vnitatem, & B, quot inter A, & B, cadunt. Inuentis enim duobus numeris E, & F, minimis in ratione A, ad C; [a] sumantur in eadē proportione tres minimi G, H, I; & quatuor K, L, M, N, & sic deinceps, donec multitudo assumptorum æqualis sit multitudini A, C, D, B.

A,8. C,12. D,18. B, 27.
Vnitas.
1.
E, 2. F, 3.
G, 4. H, 6. I, 9.
K,8. L,12. M,18. N,27.

[a] 2. octaui.

Quoniam ergo A, B, extremi inter se primi sunt; [b] erunt A, C, D, B, minimi in proportione E, ad F. Sunt autem & totidem K, L, M, N, ex constructione, in eadem proportione minimi. Igitur K, L, M, N, ipsis A, C, D, B, æquales sunt, singuli singulis, vt K, ipsi A; & N, ipsi B, nec minores minimis dentur. Quia vero, vt constat ex demonstratione propos. 2. huius lib. E, seipsum multiplicans produxit G, multiplicans vero ipsum G, fecit K, [c] metietur E, ipsum G, per E, & G, ipsum K, per eundem E: [d] Metitur autem & vnitas ipsum E, per E. Aeque igitur metietur vnitas ipsum E, & E, ipsum G, & G, ipsum K; Ac propterea eadem pars erit vnitas ipsius E, & E, ipsius G, & G, ipsius K. [e] Proportionales ergo sunt deinceps, vnitas, & numeri E, G, K. Simili ratione, cum manifestum sit ex eadem demonstratione propos. 2. huius lib. quòd F, se ipsum multiplicans producat I, multiplicans vero ipsum I, faciat N; [f] metietur F, ipsum I, per F, & I, ipsum N, per eundem F: [g] Metitur autem & vnitas ipsum F, per F. Aeque igitur metietur vnitas ipsum F, & F, ipsum I, & I, ipsum N; Ac propterea eadem pars erit vnitas ipsius F, & F, ipsius I, & I, ipsius N. [h] Proportionales ergo sunt cõtinue, vnitas, & numeri F, I, N; Ac proinde cum tam multitudo E, G, K, quam F, I, N, vnà cum vnitate, æqualis sit multi-

[b] 1. octaui.
[c] 7. pron.
[d] 5. pron.
[e] 20. defin.
[f] 7. pron.
[g] 5. pron.
[h] 20. defin.

multitudini K, L, M, N, vel A, C, D, B; (vt perspicuũ est ex propos. 2. huius lib. Nam duo E, F, sunt secundi ab vnitate: & tres G, H, I, tertij, & quatuor K, L, M, N, quarti, &c.) tot cadent medij continuè proportionales numeri inter vnitatem, & K, numerum, seu A, sibi æqualem; & inter vnitatem, & numerum N, siue B, sibi æqualẽ, quot inter numeros A, B. Si duo ergo numeri sint inter se primi, & inter eos medij, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM

PERSPICVVM autem est, numeros, qui in continua proportione cadunt inter numeros A, & B, atque vnitatem, habere proportiones denominatas à minimis numeris proportionis A, ad C; hoc est, quas habẽt E, & F, numeri ad vnitatem; id quod in scholio propos. 2. huius lib. quoque asseruimus.

CONSTAT etiam ex demonstratione hac, si numerus seipsum multiplicans aliquem fecerit; & rursum multiplicet productum, & sic deinceps: omnes productos esse continue proportionales ab vnitate. Ostensum enim est & E, G, K, & F, I, N, qui hac ratione sunt procreati, ex demonstratione propos. 2. huius lib. continue esse proportionales ab vnitate.

THEOR. 8. PROPOS. 10. 10.

SI inter duos numeros, & vnitatem, continue proportionales ceciderint numeri; quot inter vtrumque ipsorum, & vnitatem deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipsos medij continua proportione cadent.

CADANT inter vtrumq; numerorum A, B, & vnitatem, quotcunq; numeri medij continue proportionales; inter A, quidẽ & vnitatẽ, numeri C, D, E: At vero inter B, & vnitatẽ, numeri F, G, H, illis multitudine æquales. Dico totidẽ medios continue proportionales cadere inter A, & B, quot inter vtrumque A, B, & vnitatem.

Multiplicantes enim se mutuo C, & F, faciant I. Deinde C, multiplicans I, & G, faciat K, & L. Rursus idem C, multiplicans K, L, & H, faciat M, N, & O, totidem inter A, & B, quot sūt inter vtrumque A, B, & vnitatē. Quoniamigitur est, vt vnitas ad C, ita C, ad D; D, ad E; & E, ad A; æque metietur vnitas ipsum C, & C, ipsum D, & D, ipsum E, & E, ipsum A: [a] Metitur autem vnitas ipsum C, per C. Igitur & C, ipsum D, & D, ipsum E, & E, ipsum A, per C, metietur. [b] Quare C, seipsum multiplicans fecit D; multiplicans autem D, fecit E, & multiplicans E, fecit A. Eadem ratione F, seipsum multiplicans fecit G, & multiplicans G, fecit H, & multiplicans H, fecit B. Itaque cum C, multiplicans C, & F, fecerit D, & I; [c] erit, vt C, ad F, ita D, ad I. Similiter, quia F, multiplicans C, & F, fecit I, & G; [d] erit vt C, ad F, ita I, ad G. Sunt igitur tres D, I, G, continue proportionales in ratione C, ad F. Rursus quia C, multiplicans D, I, G, fecit E, K, L; habebunt E, K, L, per ea, quæ ad propos. 18. lib. 7. ostendimus, eandem proportionem continuam, quam D, I, G, hoc est, quam C, ad F. Eodem modo, quia C, & F, multiplicantes G, fecerunt L, & H; [e] erit vt C, ad F, ita L, ad H. Quatuor ergo numeri E, K, L, H, continue proportionales sunt in ratione C, ad F. Postremo, quia C, multiplicans E, K, L, H, fecit A, M, N, O, habebunt, ex ijs, quæ a nobis sunt demonstrata ad propos. 18. lib. 7. A, M, N, O, eandem continuam proportionem, quam E, K, L, H, hoc est, quam C, ad F. Eadem ratione, cum C, & F, multiplicantes H, fecerint O, & B, [f] erit, vt C, ad F, ita O, ad B. Quinque igitur numeri A, M, N, O, B, continue proportionales sunt in ratione C, ad F; Ac proinde tot medij proportionales cadunt inter A, & B, quot inter A, vel B, & vnitatem, cum multitudo M, N, O, facta sit æqualis multitudini C, D, E, vel F, G, H. Quocirca si inter duos numeros, & vnitatem, continue proportionales ceciderint numeri, &c. Quod erat demonstrandum.

A, 81. M, 162. N, 324. O, 648. B, 1296.
E, 27. K, 54. L, 108. H, 216.
D, 9. I, 18. G, 36.
C, 3. F, 6.
1.
Vnitas.

[a] 5. pron.
[b] 9. pron.
[c] 17. sept.
[d] 17. sept.
[e] 18. sept.
[f] 18. sept.

SCHOLIVM.

EX *his constat, numeros, qui medij proportionales cadunt inter A, & B, proportionem habere, quam duo numeri vnitati propinquiores, quales sunt C, & F.*

PATET *etiam ex hac demonstratione, si quotquot numeri fuerint ab vnitate continue proportionales, secundum ab vnitate in se multiplicatum producere tertium, & ex eodem in hunc fieri quartum; & ex eodem in hunc gigni quintum, & sic deinceps. Demonstratum enim est, ex eo quod C, D, E, A, continue proportionales sunt ab vnitate; D, tertium fieri ex C, secundo in se; & E, ex C, in D; & A, ex eodem C, in E, &c.*

LIBET *hoc loco nonnulla alia theoremata demonstrare ad numeros continue proportionales pertinentia, quæ tum ad ea, quæ sequuntur, tum ad alia multa erunt vtilia; hinc initium sumentes.*

I.

SI sint ab vnitate duo ordines numerorum continue proportionalium, & multitudine æqualium; habebunt tertij ab vnitate proportionem duplicatam eius, quam habent secundi ab vnitate; quarti vero eiusdem triplicatam; & quinti quadruplicatam; & semper deinceps vno amplius.

SINT *numeri A, B, C, D, continue ab vnitate proportionales, & ab eadem totidem alij E, F, G, H. Dico proportionem B, tertij ab vnitate ad F, ab eadem tertium, duplicatam esse eius, quam habet A, secundus ad E, secundum, &c. Quoniam enim inter vtrumque numerorum B, F, & vnitatem cadit medius vnus proportionalis; inter B, quidem &*

D,81. M,108. N,144. O,192. H,256.
C,27. K,36. L,48. G,64.
B,9. I,12. F,16.
A,3. E,4.
1.
Vnitas.

*10.octa.

vnitatem, numerus A; At inter F,& vnitatem numerus E; *cadet quoq; inter B,& F, vnus medius proportionalis: atque adeo, per scholium huius propos. in ratione A, ad E. Cadat igitur, & sit I. Eodem modo cadent inter C, & G, duo medij in eadem proportione A, ad E, qui sint K, L; quot nimirum cadunt inter vtrumque C, G, & vnitatem. Nec non inter D, H, tres, qui sint M, N, O, in eadem ratione A, ad E, proportionales. Quoniam igitur ex defin. B, ad F, proportionem habet duplicatam eius, quam habet B, ad I; Est autem vt B, ad I, ita A, ad E; Habebit quoque B, ad F, rationem duplicatam eius, quam habet A, ad E. Non aliter habebit C, ad G, rationem triplicatam rationis A, ad E; quia ratio C, ad G, triplicata est proportionis C, ad K; & est vt C, ad K, ita A, ad E. Sic etiam D, ad H, rationē habebit quadruplicatam rationis A, ad E, & sic de cæteris.

HOC idem demonstrabimus, si fuerint duo ordines numerorum continue proportionalium, ab aliquo numero eodem incipientes. Vnde hoc idem theorema ita proponemus.

II.

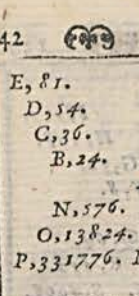
SI sint ab aliquo numero eodem duo ordines numerorum continue proportionalium, & multitudine æqualium; Habebunt tertij ab illo numero proportionem duplicatam eius, quam habent secundi ab eodem; quarti vero eiusdem triplicatam; & quinti quadruplicatam; & semper deinceps vno amplius.

*SINT ab A, numero continue proportionales B, C, D, E, & ab eodem totidem alij F, G, H, I. Dico rursum, proportionis B, ad F, esse duplicatam proportionem C, ad G; & D, ad H, triplicatam: & E, ad I, quadruplicatam. Ex A, in se fiat K, & ex A, in K, fiat L; & ex A, in L, fiat M. Similiter ex B, in se fiat N; & ex B, in N, fiat O; & ex B, in O, fiat P. Postremo ex F, quoq; in se fiat Q; & ex F, in Q fiat R; & ex F, in R, fiat S. Quibus peractis, erunt A, K, L, M, continue proportionales ab vnitate, vt cōstat ex scholio propos. 9. huius lib. Eademq; ratione erunt B, N, O, P, ab vnitate proportionales; necnon & F, Q, R, S. Quia igitur ratio N, ad K, duplicata est rationis B, ad A, ex theoremate 1. huius scholij: Est autem, ex defin. eiusdem rationis B, ad A, duplicata quoque ratio C, ad A; Erit C, ad A, vt N, ad K. Eodem modo erit A, ad G, vt K, ad Q. Nam ex eodem 1. theoremate est ratio K, ad Q, duplicata rationis A, ad F; & eiusdem, ex defin. duplicata est ratio A, ad G. Quare cum sit C, ad A, vt N, ad K; & A, ad G, vt K, ad Q; erit ex æquo C, ad G, vt N, ad Q: Atqui ratio N, ad Q, duplicata est rationis B, ad F, ex theoremate 1. huius scholij; quòd tam B, N, quam F, Q, sint ab vnitate cōtinuè proportionales, ex scholio propos. 9. huius lib. Igitur & ratio C, ad G, duplicata est rationis B, ad F. Eisdē argumētis erit ratio D, ad H, triplicata rationis B, ad F. Nam ratio O, ad L, ex 1. theoremate, triplicata est rationis B, ad A; quòd tam B, N, O, quàm A, K, L, sint ab vnitate continuè proportionales, ex scholio propos. 9. huius lib. & eiusdē triplicata est ratio D, ad A, ex defin. Igitur est D, ad A, vt O, ad L. Eodemque modo est A, ad H, vt L, ad R: quòd vtraque proportio triplicata sit proportionis A, ad F:

E,162. I,512.
D,54. Vnitas. H,128.
C,18. 1. G,32.
B,6. F,8.
A,2.
N,36. K,4. Q,64.
O,216. L,8. R,512.
P,1296. M,16. S,4096.

E,81. I,1.
D,54. Vnitas. H,2.
C,36. 1. G,4.
B,24. F,8.
A,16.
N,576. K,256. Q,64.
O,13824. L,4096. R,512.
P,331776. M,65536. S,4096.

Proportio



Proportio quidem A, ad H, ex defin. at proportio L, ad R, ex 1. theor. huius scholij, propterea quòd tam A, K, L, quam F, Q, R, cõtinuè proportionales sunt ab vnitate, ex scholio propos. 9. huius lib. Est ergo ex æquo D, ad H, vt O, ad R. Sed ratio O, ad R, triplicata est rationis B, ad F, ex 1. theor. eò quòd tam B, N, O, quàm F, Q, R, sunt continuè proportionales ab vnitate ex scholio propos. 9. huius lib. Igitur & ratio D, ad H, triplicata est eiusdem rationis B, ad F. Non secus demonstrabimus rationem E, ad I, esse quadruplicatam rationis B, ad F. Atque ita deinceps.

IDEM omnino demonstrabitur, si numeri vnius ordinis desinant in vnitatem, vt ex hac subiecta figura est manifestum, in qua I, est vnitas.

CÆTERVM theorema hoc demonstrabimus etiam in lineis ab vna & eadem linea proportionalibus, lib. 14. propos. 28. licet non in quotcunque lineis. Vnde multo generalius est hoc in numeris, quàm illud in lineis. Ex his autem in hunc modum demonstratis efficiemus propositionem hanc 10. Euclidis magis vniuersalem, hoc modo.

III.

SI inter duos numeros, & aliquem alium numerum assumptum, continue proportionales ceciderint numeri; quot inter vtrumque ipsorum, & assumptum, deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipsos medij continua proportione cadent.

CADANT inter vtrumque numerorum A, B, & assumptum numerum C, quotlibet numeri continue proportionales; inter A, quidem & C, numeri D, E, F; inter B, vero & C,

& C, totidem numeri G, H, I. Dico tot quoque medios continue proportionales cadere inter A, & B, quot inter A, & C, & inter B, & C. Item tot inter F, & I, quot inter F, & C, & inter I, & C. Et tot inter E, & H, quot inter E, & C, & inter H, & C. Sumptis enim tribus K, L, M, minimis in ratione D, ad G; erit ex defin. ratio K, ad M, duplicata rationis K, ad L, hoc est, D, ad G: Sed per theor. 2. huius scholij, ratio quoque E, ad H, duplicata est eiusdem rationis D, ad G. Igitur est vt K, ad M, ita E, ad H; Atque adeo cum inter K, & M, cadat vnus medius proportionalis L;[a] cadet quoque vnus medius, nimirum N, inter E, & H; quemadmodum & inter E, & C, & inter H, & C, vnus medius cadit. Simili modo, si in eadem proportione D, ad G, sumantur quatuor minimi numeri, ostendemus, inter F, & I, duos medios cadere, sicut & inter F, & C, & inter I, & C, duo medij cadunt. Et eadem ratione inter A, & B, tres medij cadent, si in eadem proportione D, ad G, sumantur quinque numeri minimi.

[a] 8. octaui.

HOC etiam verum est, si loco alterius numeri, nimirum B, vnitas assumatur, veluti perspicuũ est in hac subiecta figura in qua

caduntque tam inter A, & C, quam inter B, & C, tres numeri continue proportionales, quot scilicet inter A, & B, cadunt, &c.

EX his etiam apparet, numeros, qui medij proportionales cadunt inter A, & B; necnon inter F, & I; atque inter E, & H, proportionem habere, quam duo numeri D, & G, numero assumpto C, propinquiores.

THEOR.

11.

THEOR. 9. PROPOS. 11.

DVORVM quadratorum numerorum vnus medius proportionalis est numerus: Et quadratus ad quadratum duplicatam habet lateris ad latus rationẽ.

SINT quadrati numeri A, & B, quorum latera C, & D. Dico inter A, & B, vnum medium proportionalem numerum cadere: & proportionem A, ad B, quadrati ad quadratum, esse duplicatam proportionis C, ad D, lateris ad latus. Multiplicantes enim se mutuo C, & D, faciant E. Quia igitur C, multiplicans seipsum fecit A, quadratum, ex defin. quadrati; & ipsum D, multiplicãs fecit E, ex constructione; [a] erit vt A, 9. E, 21. B, 49. C, 3. D, 7. C, ad D, ita A, ad E. Rursus, quia D, multiplicans C, fecit E, ex constructione; & multiplicans seipsum, ex defin. quadrati, fecit B, quadratum; [b] erit quoque, vt C, ad D, ita E, ad B. Quare A, E, B, continue proportionales sunt in ratione laterum C, & D. Ac proinde inter quadratos A, & B, medius continue proportionalis cadit E. Quia vero, ex eo quod A, E, B, continue proportionales sunt, numerus A, ad B, duplicatam rationem habet eius, quam habet A, ad E; duplicatam quoque rationem habebit A, quadratus ad B, quadratum, eius, quam habet C, latus ad latus D; cum hæc proportio eadem sit, quæ A, ad E. Duorum ergo quadratorum numerorum vnus medius proportionalis est, &c. Quod demonstrandum erat.

[a] 17. sept.

[b] 17. sept.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM est ex dictis, inter duos quadratos numeros cadere numerum medium proportionalem in continua proportione lateris ad latus. Nam eadem est proportio quadrati A, ad E, medium proportionalem, quæ lateris C, ad latus D, vt demonstratum est.

PARI ratione liquet, numerũ mediũ proportionalem E, & vtrũlibet quadratorum A, B, esse inter se compositos. Cum enim A, E, B, proportionales sint ostensi in ratione C, ad D, hoc est, esse A, ad E, & E, ad B, vt C, ad D; metiatur autem latus D, quadratum suum B, consequens consequentem, si de proportionibus E, ad B, & C, ad D, loquamur; metietur & C, ipsum E, antecedens antecedentem; quandoquidem est E, ad B, vt C, ad D. Metitur autem & latus C, quadratum suum A. Igitur E, & A, mensuram communem habent C; atque adeo inter se sunt compositi. Similiter cum sit A, ad E, vt C, ad D; & metiatur latus C, suum quadratum A, antecedens antecedentem; metietur quoque D, ipsum E, consequens consequentem. Quare cum & latus D, metiatur suum quadratum B; habebunt E, & B, communem mensuram D; Ideoque compositi erunt inter se. Perspicuum autem est ex hac demonstratione, priorum numerorum A, E, communem mensuram esse C, latus prioris quadrati A; posteriorum vero E, B, mensuram communem esse D, latus quadrati posterioris B.

THEOR. 10. PROPOS. 12.

11.

DVORVM cuborum numerorum duo medij proportionales sunt numeri: Et cubus ad cubum triplicatam habet lateris ad latus rationem.

SINT numeri cubi A, & B, quorum latera C, & D. Dico inter A, & B, duos medios numeros continue proportionales cadere: Et proportionẽ A, ad B, cubi ad cubũ, tripli-

A,27. H,36. I,48. B,64. E,9. G,12. F,16. C,3. D,4.

triplicatam esse proportionis C, ad D, lateris ad latus. Multiplicans enim C, seipsum faciat E; & D, seipsum multiplicans faciat F; At C, & D, se mutuo multiplicantes faciant G; Multiplicantes vero G, faciant H, & I. Quoniam igitur C, seipsum, & D, multiplicans fecit E, & G; [a] erit, vt C, ad D, ita E, ad G. Eadem ratione, cum D, multiplicans C, & seipsum, fecerit G, & F; [b] erit quoque vt C, ad D, ita G, ad F; proptereaque E, G, F, continue proportionales sunt in ratione C, ad D. Rursus, quia ex defin. cubi, C, ipsum E, multiplicans fecit A; & ex constructione multiplicans ipsum G, fecit H; [c] erit vt E, ad G, hoc est, vt C, ad D, ita A, ad H. Similiter cum D, ipsum G, multiplicans fecerit, ex constructione, numerum I; multiplicans vero ipsum F, ex defin. cubi, fecerit cubum B; [d] erit quoque, vt G, ad F, hoc est, vt C, ad D, ita I, ad B: [e] Est autem & H, ad I, vt C, ad D; quod C, & D, ipsum G, multiplicantes fecerunt ex constructione, H, & I. Igitur A, H, I, B, continue sunt proportionales in ratione C, ad D; Atque adeo inter cubos A, & B, duo medij H, & I, cadunt continue proportionales. Quoniam vero, ex eo quod A, H, I, B, continue sunt proportionales, numerus A, ad B, triplicatam habet rationem eius, quam habet A, ad H; triplicatam quoque rationem habebit A, ad B, cubus ad cubum, eius, quam habet C, ad D, latus ad latus; cum sit C, ad D, vt A, ad H. Quam ob rem duorum cuborum numerorum duo medij proportionales sunt numeri, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 17. sept.
[b] 17. sept.
[c] 17. sept.
[d] 17. sept.
[e] 18. sept.

SCHOLIVM.

HIC quoque manifestum est, inter duos cubos cadere duos numeros medios proportionales in continua proportione laterum ad latus. Ostensum enim est, ita esse A, ad H, & H, ad I, & I, ad B, vt C, ad D.

EODEM modo constat, duos numeros medios proportionales H, I, & vtrumlibet cuborum A, B, esse inter se compositos. Cum enim A, H, I, B, ostensi sint proportionales in ratione C, ad D; hoc est, esse A, ad H, & I, ad B, vt C, ad D: Metiatur autem latus D, cubum suum B, consequens consequentem, si de proportionibus I, ad B, & C, ad D, loquamur; metietur quoque C, ipsum I, antecedens antecedentem, quandoquidem est I, ad B, vt C, ad D: Metitur autem & latus C, cubum suum A; immo & ipsum H, quòd H, factus sit ex multiplicatione C, in G, ex constructione. Igitur A, H, I, communem habent mensuram C; atque adeo inter se compositi sunt. Similiter cum sit A, ad H, vt C, ad D; metiatur autem latus C, cubum suum A, antecedens antecedentem, metietur quoque D, ipsum H, consequens consequentem: Metitur autem & latus D, cubum suum B; immo & ipsum I, quod I, factus sit ex multiplicatione D, in G, ex constructione. Igitur H, I, B, communem mensuram habent D; Ac proinde sunt inter se compositi. Manifestum autem etiam hic est, priorum trium numerorum A, H, I, communem mensuram esse C, latus cubi prioris A; posteriorum verò trium H, I, B, mensuram communem esse D, latus posterioris cubi B.

A,27. H,36. I,48. B,64. E,9. G,12. F,16. C,3. D,4.

THEOR. 11. PROPOS. 13. 12.

SI sint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quisq; seipsum faciat aliquos; qui ab illis producti fuerint, proportionales erunt: Et si numeri primum positi multiplicantes iam factos fecerint aliquos: ipsi quoque proportionales erunt: Et semper circa extremos hoc eueniet.

SINT continue proportionales A, B, C, qui seipsos multiplicantes faciant D, E, F; multiplicantes autem ipsos D, E, F, faciant G, H, I; & rursum multiplicãtes ipsos G, H, I,

G,H,I,faciant K,L,M,& ita deinceps. Dico quoque D, E,F,& G,H,I,& K,L,M,continue esse proportionales. Multiplicantes enim A,& B, se mutuo faciant N; & B, C,se mutuo multiplicantes faciant O. Deinde A,multiplicans N,E, faciat P, Q. Item B, multiplicans O, F,

A, 2. B,4. C, 8.
D,4. N,8. E,16. O,32. F,64.
G,8. P,16. Q,32. H,64. R,128. S,256. I,512.
K, 16. T, 32. V, 64. X, 128. L,256. Y,512. Z,1024. a,2048. M,4096.

faciat R,S. Simili modo A,multiplicans P, Q, H, faciat T,V,X;& B,multiplicans R,S,I,faciat Y,Z, a. Quoniam igitur A,multiplicans seipsum,& B,fecit D,& N; [a] erit vt A,ad B,ita D,ad N. Eodem modo,quia B,multiplicans A,& seipsum,fecit N,& E;erit etiam,vt A, ad B, ita N, ad E. Sunt igitur D,N,E,continue proportionales in ratione A,ad B. Rursus,quia B,seipsum, & numerum C, multiplicans fecit E,& O; [b] erit vt B,ad C, ita E,ad O. Eademque ratione,cum C, multiplicans B, & seipsum, fecerit O,& F; erit, vt B,ad C,ita O,ad F; proptereaque & E, O, F,continue proportionales sunt in ratione B, ad C,seu A,ad B. Quare cum D,N,E,in eadem ratione sint continue proportionales,in qua E, O, F;erit ex æquo D, ad E, vt E,ad F; atque adeo D,E,F,continue proportionales sunt.

DEINDE, quia A,multiplicans D, N, E, fecit G, P,Q; erunt ex ijs,quæ ad propos. 18. lib. 7. ostendimus, G, P, Q, in eadem ratione,in qua D, N, E, hoc est, in ratione A,ad B, proportionales. Item quia A,& B,multiplicantes E,fecerunt Q, & H; [c] erit quoque, vt A,ad B,ita Q, ad H. Sunt ergo G, P, Q, H, proportionales in ratione A,ad B. Similiter, quia B, multiplicans E, O,F,fecit H,R,S; erunt ex demonstratis ad propos. 18.lib.7.H,R,S,proportionales in ratione E, O, F, hoc est,B,ad C, seu A,ad B. Et eodem modo,cum B,C,multiplicantes F,fecerint S,& I; [d] erit vt B,ad C, hoc est, vt A,ad B,ita S,ad I;proptereaque & H,R,S,I,proportionales sunt in ratione A,ad B. Quo circa,cũ G, P, Q, H, eandem

[a] 17. sept.
[b] 17. sept.
[c] 18. sept.
[d] 18. sept.

eandem habeant proportionem continuam,quam H,R, S,I; erit ex æquo G, ad H, vt H,ad I; Ac proinde G,H, I, continue sunt proportionales.

NON dissimili argumento demonstrabimus & K, L, M, esse continue proportionales; & eodem modo in alijs procedemus. Igitur si sint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quisque seipsum, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

SVNT autem, vt ex demonstratione liquet, numeri primo loco ꝓducti D,E,F, proportionales in duplicata ratione datorum numerorũ A,B,C. Nam D,ad E, habet proportionẽ duplicatam eius,quam habet D,ad N,hoc est, A,ad B, &c.

ITA quoque numeri secundo loco geniti G,H,I, erunt in ratione triplicata A,ad B: Et numeri tertio loco procreati, in quadruplicata, & sic deinceps semper vno amplius.

BREVIVS propositionẽ totam demonstrabimus hac ratione. Fiant ex A,B,C, continue proportionalibus in seipsos, numeri D, E, F; & in hos ex eisdem numeri G, H, I; & rursum ex eisdẽ in hos numeri K, L, M. Dico D,E,F; & G,H,I; & K, L, M, esse quoque continue proportionales. Nã ex scholio propos. 9. huius lib. tam A,D,G, K, quam B,E,H,L; & D,F,I,M,continue sunt ab vnitate proportionales. Quare ex 1. theoremate scholij propos. 10. huius lib. erit D,ad E,in duplicata ratione A,ad B,vel B,ad C. Sed eiusdem rationis B, ad C,duplicata est ratio E,ad F,per idem theorema. Igitur D,E,F,cõtinue sunt ꝓportionales in duplicata ratione A, ad B,& B,ad C. Eodẽ modo ostẽdemus G,H,I,esse proportionales cõtinue in triplicata ratione rationis A,ad B,& B,ad C: At vero K,L,M,in quadruplicata, atque ita de cæteris.

A, 2.	B,4.	C,8.
D,4.	E,16.	F,64.
G,8.	H,64.	I,512.
K,16.	L,256.	M,4096.

EX qua rursum demonstratione apparet,numeros primo loco productos esse in duplicata ratione datorum numerorum; secundo vero loco procreatos, in triplicata, &c. Id quod luce clarius ex 1. theor. scholij propos. 10. huius lib. elicitur.

QVAMVIS autem in vtraque demonstratione huius propos. 13. dati sint tantum tres numeri continue proportionales A, B, C; eãdem tamen propositionem demonstrabimus, etiamsi plures fuerint, quam tres. Sint namq; numeri plures, quam tres A, B, C, D, continue proportionales, qui se ipsos multiplicantes faciant E, F, G, H; postea vero multiplicantes ipsos E, F, G, H, faciant I, K, L, M, & sic deinceps. Quoniam igitur E, F, G, ex demonstratis, proportionales sunt in ratione A, ad B: Item F, G, H, in ratione B, ad C, hoc est, in eadem ratione A, ad B; cum illi producti sint ex A, B, C, proportionalibus inse ipsos: hi vero ex B, C, D, proportionalibus quoque in se ipsos: Erunt E, F, G, H, continue proportionales. Non secus proportionales erunt I, K, L, M; & alij deinceps eodem modo producti.

A, 2. B, 4. C, 8. D. 16.
E, 4. F, 16. G, 64. H, 256.
I, 8. K, 64. L, 512. M, 4096.

13. PROBL. 12. PROPOS. 14.

SI quadratus numerus quadratum numerum metiatur: & latus vnius metietur latus alterius. Et si vnius quadrati latus metiatur latus alterius; & quadratus quadratum metietur.

METIATVR quadratus A, cuius latus C, quadratum B, cuius latus D. Dico & latus C, latus D, metiri. Multiplicantes enim se mutuo C, & D, faciant E. Quoniam igitur, vt liquet ex demonstratione propos. 11. huius lib. A, E, B, continue proportionales sunt in ratione C, ad D; Metitur autem A, primus extremum B; a metietur quoque A, primus secundum E. Quare cum sit vt A, ad E, ita C, ad D; & C, latus latus D, metietur.

A, 4. E, 12. B, 36.
C, 2. D, 6.

a 7. octaui.

METIA-

METIATVR iam C, latus latus D. Dico & quadratum A, quadratum B, metiri. Eodem enim modo erit, vt C, ad D, ita A, ad E, propterea quod A, E, B, continue proportionales sunt in ratione C, ad D, vt demonstratum est propos. 11. huius lib. Quare cum C, metiatur D, metietur quoque A, primus E, secundum; ac proinde & extremum B, metietur, ex theoremate 2. scholij propos. 6. huius lib. Si quadratus ergo numerus quadratum numerum metiatur, &c. Quod erat ostendendum.

14. THEOR. 13. PROPOS. 15.

SI cubus numerus cubum numerum metiatur; & latus vnius metietur latus alterius. Et si latus vnius cubi latus alterius metiatur; & cubus cubum metietur.

METIATVR cubus A, cuius latus C, cubum B, cuius latus D. Dico & latus C, metiri latus D. Vterque enim C, & D, se ipsum multiplicans faciat E, & F; multiplicantes autem se mutuo faciant G: Multiplicantes denique G, faciant H, I. Quoniam igitur, vt apparet ex demonstratione propos. 12. huius lib. tam E, G, F, quam A, H, I, B, continue sunt proportionales in ratione C, ad D; Metitur autem A, primus B, extremum; a metietur quoque idem A, primus H, secundum. Cum ergo sit, vt A, ad H, ita C, ad D; metietur & C, latus latus D.

A, 8. H, 24. I, 72. B, 216.
E, 4. G, 12. F, 36.
C, 2. D, 6.

a 7. octaui.

METIATVR iam C, latus latus D. Dico & A, cubum metiri cubum B. Eodem enim argumento erit, vt C, ad D, ita A, ad H, propterea quod A, H, I, B, continue proportionales sunt in ratione G, ad D, vt ostensum est propos. 12. huius lib. Quapropter cum latus C, metiatur latus D; metietur & A, ipsum H; atque idcirco & extremum B,

mum B, cubus cubum, ex ijs, quæ ad propos. 6. huius lib. demonstrauimus. Itaque si cubus numerus cubum numerum metiatur, &c. Quod erat demonstrandum.

15. THEOR. 14. PROPOS. 16.

SI quadratus numerus quadratum numerum non metiatur; neque latus vnius metietur alterius latus. Et si latus vnius quadrati non metiatur latus alterius: neque quadratus quadratum metietur.

SINT quadrati A, & B, quorum latera C, & D; Non metiatur autem A, ipsum B. Dico neque C, latus metiri latus D. Si enim fieri potest, metiatur C, ipsum D. Quia igitur C, latus quadrati A, metitur D, latus quadrati B, [a] metietur & quadratus A, quadratū B. Quod est absurdum; Ponitur enim non metiri. Non ergo latus C, metitur latus D.

A, 16. B, 81. C, 4. D, 9.

[a] 14. octa.

SED iam latus C, non metiatur latus D. Dico quod nec quadratus A, quadratum B, metietur. Si namque A, metiri dicatur ipsum B; [b] metietur quoque C, latus illius latus huius D. Quod est absurdum. Ponitur enim non metiri. Igitur quadratus A, quadratum B, non metietur. Quapropter si quadratus numerus quadratum numerum non metiatur, &c. Quod erat ostendendum.

[b] 14. octa.

15. THEOR. 15. PROPOS. 17.

SI cubus numerus cubum numerum non metiatur: neque latus vnius latus alterius

alterius metietur. Et si latus cubi vnius latus alterius non metiatur: neque cubus cubum metietur.

SINT cubi A, & B, quorum latera C, & D; Non metiatur autem A, ipsum B. Dico quod nec latus C, latus D, metietur. Si enim C, dicatur metiri D; [a] metietur quoque A, cubus cubum B. Quod est absurdum. Cum ponatur non metiri. Non ergo latus C, latus D, metietur.

A, 8. B, 27. C, 2. D, 3.

[a] 15. octa.

SED iam C, latus non metiatur latus D. Dico quod nec cubus A, cubum B, metietur. Nam si metiri dicatur; [b] metietur etiam C, latus latus D. Quod est absurdum. Ponitur enim nō metiri. Non igitur A, cubus cubum B, metietur. Quocirca, si cubus numerus cubum numerum non metiatur, &c. Quod demonstrandum erat.

[b] 15. octa.

SCHOLIVM.

PROXIME antecedentes quatuor propositiones hoc etiam modo proponi possunt, si maiores numeri ad minores referantur.

SI quadratus numerus quadrati numeri, & cubus cubi, sit multiplex; & vnius latus lateris alterius multiplex erit. Et si vnius quadrati, & cubi latus lateris alterius sit multiplex; & quadratus quadrati, & cubus cubi multiplex erit. Si vero quadratus quadrati, & cubus cubi non sit multiplex; neque latus lateris erit multiplex. Et si latus lateris non sit multiplex; neque quadratus quadrati, neque cubus cubi erit multiplex.

NAM si quadratus A, quadrati B, & cubus A, cubi B, sit multiplex; metietur B, quadratus quadratum A, & cubus B, cubum A. [a] Igitur & latus D, latus C, metietur; ac proinde latus C, lateris D, multiplex erit.

[a] 14. & 15. octaui.

QVOD si latus C, lateris D, multiplex

A, 36. B, 9. sit; metietur latus D, latus C. [b] Igitur & B,

C, 6. D, 3. ipsum A, quadratus quadratum, & cubus cubum metietur; Ac propterea A, ipsius B,

A, 64. B, 8. quadratus quadrati, & cubus cubi, tri-

C, 4. D, 2. multiplex.

[b] 14. & 15. octaui.

AT vero si A, ipsius B, quadratus qua-

A, 49. B, 9. drati, & cubus cubi, non sit multiplex; non

C, 7. D, 3. metietur B, ipsum A, quadratus quadrati, aut cubus cubum. [c] Igitur neque latus D,

A, 125. B, 8. latus C, metietur. Quare C, latus lateris D,

C, 5. D, 2. non erit multiplex.

[c] 16. & 17. octaui.

SIMILITER si C, latus lateris D, non sit multiplex; non metietur D, latus latus C. [d] Igitur non B, ipsum A, quadratus quadratum, nec cubus cubum metietur; Atque adeo A, ipsius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, multiplex non erit.

[d] 16. & 17. octaui.

16. THEOR. 16. PROPOS. 18.

DVORVM similium planorum numerorum vnus medius proportionalis est numerus: Et planus ad planum duplicatam habet lateris homologi ad latus homologum rationem.

SINT plani numeri similes A, B, & latera illius sint C, D; huius vero illis proportionalia E, F: ita vt C, D, se mutuo multiplicantes faciant A; & E, F, mutuo se multiplicantes faciant B; sitque vt C, ad D, ita E, ad F. Dico inter A, & B, cadere vnum numerum medium proportionalem, & proportionem A, ad B, esse duplicatam proportionis

portionis laterum homologorum C, E, vel D, F. Multiplicantes enim se mutuo D, E, faciant G. Quoniam igitur est C, ad D, vt E, ad F; erit permutando C, ad E, vt D, ad F. Et quia D, multiplicans C, & E, fecit A, & G; [a] erit A, ad G, vt C, ad E, hoc est, vt D, ad F.

A, 12. G, 18. B, 27.
C, 6. D, 2. E, 9. F, 3.

[a] 17. sept.

Similiter quia E, multiplicans D, & F, fecit G, & B; [b] erit quoque G, ad B, vt D, ad F. Proportionales ergo sunt A, G, B, in ratione C, ad E, vel D, ad F; Atque adeo inter A, & B, medius proportionalis cadit G.

[b] 17. sept.

QVIA vero, cum A, G, B, sint continuè proportionales, A; ad B, duplicatam habet rationem eius, quã habet A, ad G, hoc est, C, ad E, vel D, ad F; perspicuum est proportionem numeri plani A, ad planum B, esse duplicatam eius, quam habet C, ad E, vel D, ad F, latus homologum ad latus homologum. Duorum igitur similium planorum numerorum, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

QVIA ostensum est A, G, B, esse proportionales in ratione C, ad E, vel D, ad F; manifestum est, inter duos similes planos A, & B, cadere medium proportionalem G, in ratione laterum homologorum C, E, vel D, F, assumptorum.

CONSTAT etiam ex dictis, medium proportionalem G, & vtrumlibet planorum A, B, esse inter se compositos. Cum enim ostensi sint A, G, B, proportionales in ratione C, ad E, vel D, ad F, id est, esse A, ad G, & G, ad B, vt C, ad E, vel D, ad F; metiantur autem E, F, latera numerum B, cuius sunt latera, consequentes consequentem, si de proportionibus G, ad B, & C, ad E, vel D, ad F, loquamur; metientur quoque C, D, ipsum G, antecedentes antecedentẽ, quòd sit G, ad B, vt C, ad E, vel D, ad F. Atqui & C, D, latera metiuntur numerum A, cuius sunt latera. Igitur G, A, mensuram communem habent tam C, quam D; Ac proinde compositi sunt inter se. Rursus cum sit A, ad G, vt C, ad E, vel D, ad F: metiantur autem C, D, latera suum planum A, antecedentes

antecedentem; metientur etiam E, F, ipsum G, consequentes consequentem. Quare cum & E, F, latera suum planum B, metiantur, habebunt G, B, communem mensuram tam E, quam F; ideoque erunt inter se compositi.

EX qua demonstratione etiam manifestum relinquitur, priorum duorum numerorum A, G, communes mensuras esse C, D, latera prioris plani A; posteriorum autem G, B, mensuras communes esse E, F, latera plani posterioris B.

18. THEOR. 17. PROPOS. 19.

DVORVM similium solidorum numerorū duo medij proportionales sunt numeri: Et solidus ad solidum triplicatam rationem habet lateris homologi ad latus homologum.

SINT solidi numeri similes A, B, & latera illius sint C, D, E, huius vero illis proportionalia F, G, H, ita vt sit C, ad D, quemadmodum F, ad G; & D, ad E, sicut G, ad H. Dico inter A, & B, cadere duos medios proportionales, & proportionē A, ad B, esse triplicatam eius, quā habēt latera homologa C, F, vel D, G, vel E, H.

A, 30. M, 60. N, 120. B, 240.
I, 6. L, 12. K, 24.
C, 2. D, 3. E, 5. F, 4. G, 6. H. 10.

Multiplicantes enim se mutuo C, D, faciant I; & F, G, se mutuo multiplicantes faciant K. Itē D, F, se mutuo multiplicātes faciant L. Postremo E, H, ipsum L, multiplicātes faciant M, N. Quia igitur C, D, E, ipsis F, G, H, proportionales sunt; erunt & permutando proportionales, nimirum vt C, ad F, ita D, ad G, & E, ad H. Quoniam vero D, multiplicans C, & F, fecit I, & L; [a] erit vt C, ad F, ita I, ad L. Simili modo, quia F, multiplicans D, & G, fecit L, & K; [a] erit quoque vt D, ad G, ita L, ad K. Sunt ergo I, L, K, continue proportionales in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. Et quoniam A, solidus factus est ex mutua multiplicatione laterum C, D, E; factus est autem I, ex multiplicatione mutua C, D; fit vt E, multiplicans I, faciat A. Eodem modo cum B, solidus factus sit ex mutua multiplicatione laterum F, G, H; & K, factus ex mutua multiplicatione F, G; numerus H, ipsum K, multiplicans faciet B. Quare cum E, multiplicans I, & L, fecerit A, & M, [b] erit A, ad M, vt I, ad L, hoc est, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. Eadem ratione, cum H, multiplicans L, K, fecerit N, & B; [c] erit N, ad B, vt L, ad K, hoc est, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. [d] Est autem & M, ad N, vt E, ad H; quod E, H, multiplicantes L, fecerint ipsos M, & N. Igitur A, M, N, B, continue sunt proportionales in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; Atque idcirco inter A, B, solidos similes duo medij M, N, continue proportionales cadunt.

[a] 17. sept.
[b] 17. sept.
[c] 17. sept.
[d] 18. sept.

QVONIAM vero, cum A, M, N, B, sint proportionales continue; proportio A, B, triplicata est eius, quam habet A, ad M; Est autem A, ad M, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; Habebit quoque A, ad B, solidus ad solidum, proportionem triplicatam eius, quam habet C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H, latus ad latus homologum. Quocirca, Duorum similium solidorum numerorum duo medij, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

CVM demonstratum sit A, M, N, B, proportionales esse in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; liquet inter duos similes solidos A, & B, cadere duos medios proportionales M, & N, in ratione laterum homologorum C, F, vel D, G, vel E, H, assumptorum.

Ex ijs, quæ dicta sunt, perspicuum etiā est, duos medios proportionales M, N, & vtrumlibet solidorum A, B, inter se esse compositos. Cum enim A, M, N, B, ostensi sint proportionales in ra-

in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; hoc est, esse A, ad M, & M, ad N, & N, ad B, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; metiantur autem F, G, H, latera suum solidum B, consequentes consequentem, si de proportionibus N, ad B, & C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H, loquamur; metientur quoque C, D, E, ipsum N, antecedentes antecedentem; quòd sit N, ad B, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. Atqui & C, D, E, ipsum M, metiuntur; (Cum enim M, factus sit, per constructionem, ex E, in L; metietur E, ipsum M. Deinde quia M, N, B, proportionales sunt ipsis I, L, K; metitur autem K, ipsum B, quod B, factus sit ex K, in H; metietur quoque I, ipsum M; Metiuntur autem & C, D, latera planum suum I.

a 11. pron. a Igitur & C, D, metientur ipsum M; Atque adeo C, D, E, ipsum M, metientur.) Nec non & ipsum A, nimirum latera suum solidum. Ergo A, M, N, habent communem mensuram tam C, quam D, quam E; Ideoque compositi inter se sunt. Rursus quia est A, ad M, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; metiuntur autem C, D, E, latera solidum suum A, antecedentes antecedentem; metientur quoque F, G, H, ipsum M, consequentes consequentem. Metiuntur vero & F, G, H, ipsum N;

A, 30. M, 60. N, 120. B, 240.
I, 6. L, 12. K, 24.
C, 2. D, 3. E, 5. F, 4. G, 6. H, 10.

(Cum enim N, factus sit ex H, in L, per constructionem; metietur H, ipsum N. Deinde quia A, M, N, ipsis I, L, K, proportionales sunt: metitur autem I, ipsum A, quòd A, factus sit ex I, in E; metietur etiam K, ipsum N. Cum ergo & F, G, latera metiantur planum suum K; metientur quoque F, G, ipsum N; atque adeo F, G, H, ipsum N, metientur.) Nec non & ipsum B, nimirum latera suum solidum. Igitur M, N, B, communem habent mensuram tam F, quam G, quam H. Quare sunt inter se compositi. Ex quibus liquido constat, priorum trium numerorum A, M, N, communes esse mensuras C, D, E, latera prioris solidi A; At vero F, G, H, latera posterioris solidi B, communes mensuras esse posteriorum trium numerorum M, N, B.

QVI A vero solidus numerus tria latera habet, ex quorum mutua multiplicatione gignitur, demonstremus hoc loco, eundem numerum solidum procreari, siue primum latus ducatur

catur in secundum, & numerus procreatus in tertium; siue primum in tertium, & numerus genitus in secundum; siue denique secundum in tertium, & productus numerus in primum: Quin etiam, propositis quotuis numeris, eundem semper numerum gigni ex eorum multiplicatione mutua, quomodocunq; ordinem inter se permutent. Qua quidem res magnum vsum habet in rebus Arithmeticis. Proponatur ergo eiusmodi theorema.

DATIS quotlibet numeris, procreabitur ex eorum mutua multiplicatione idem semper numerus, quomodocunque ordinem inter se permutent.

SINT primum tres numeri dati A, B, C, & ex A, in B, fiat D; & ex D, in C, fiat E. Dico eundem E, procreari, si ex A, in C, fiat F, & F, in B, multiplicetur: Item si ex B, in C, fiat G, & G, in A, multiplicetur. Quoniam enim C, multiplicans D, facit E;

A, 3. B, 5. C, 8.
D, 15. E, 120. F, 24. G, 40.

a 15. defin. a erit vt E, ad D, ita C, ad vnitatem: Sed vt C, ad vnitatem, b ita quoque est F, ad A; quòd A, multiplicans C, faciat F. Igitur erit vt E, ad D, ita F, ad A: Vt autem D, ad B, c ita est A, ad vnitatem; propterea quòd A, multiplicans B, facit D. Igitur ex æqualitate erit, vt E, ad B, ita F, ad vnitatem: d atque idcirco numerus ex E, in vnitatem factus, hoc est, ipsemet numerus E, æqualis erit numero facto ex B, in F, producto ex A, in C. Quemadmodum igitur numerus E, fit ex A, in B, & ex producto in C; ita idem E, fit ex A, in C, & ex producto in B. Quod est primum.

b 15. defin. c 15. defin. d 19. sept.

RVRSVS quia ex C, in D, fit E; e erit vt E, ad D, ita C, ad vnitatem: Sed vt C, ad vnitatem, f ita etiam est G, ad B, eò quòd G, factus est ex B, in C. Igitur erit, vt E, ad D, ita G, ad B: Vt autem D, ad A, g ita est B, ad vnitatem, propterea quòd D, factus est ex A,

e 15. defin. f 15. defin. g 15. defin.

ex A, in B. Igitur ex æquo erit, vt E, ad A, ita G, ad vnitatem: [2] ac proinde numerus factus ex E, in vnitatem, id est, ipsemet numerus E, æqualis erit numero genito ex A, in G, productum ex B, in C. Quemadmodum igitur E, gignitur ex A, in B, & ex producto in C; ita idem E, procreatur ex B, in C, & ex producto in A. Quod est secundum.

[2] 19. sept.

SINT deinde quatuor numeri A, B, C, D: atq; ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, fiat E. Dico eundē E, gigni ex A, in B, & ex producto in D, & ex producto in C, & ex producto in C: Itē ex A, in C, & ex producto in B, & ex producto in D: Itē ex A, in C, & ex ꝓducto in D, & ex producto in B: Itē ex A, in D, & ex producto in B, & ex ꝓducto in C: Itē ex A, in D, & ex producto in C, & ex ꝓducto in B: Itē ex B, in C, & ex ꝓducto in A, & ex producto in D: Itē ex B, in C, & ex producto in D, & ex ꝓducto in A: Itē ex B, in D, & ex producto in A, & ex producto in C: Item ex B, in D, & ex producto in C, & ex producto in A: Item ex C, in D, & ex producto in A, & ex producto in B: Item ex C, in D, & ex producto in B, & ex producto in A; ita vt præter primam multiplicationem, qua omnes quatuor numeri ordinatim multiplicantur inter se, fiant 11. multiplicationes diuersæ producentes eundem semper numerum. Quoniam enim vt in tribus ostensum est, idem numerus fit, siue genitus numerus ex A, in B, ducatur prius in C, deinde hic productus in D; siue prius in D, deinde hic productus in C, constat id, quod primo loco proponitur.

A, 2. B, 3. C, 4. D, 5. E, 120.

DEINDE quia vt in tribus est ostensum, idem numerus sit ex A, in B, & ex producto in C, qui fit ex A, in C, & ex producto in B, perspicuum est, eundem numerū gigni tū ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, tū ex A, in C, & ex producto in B, & ex producto in D. quod est secūdū.

TERTIO quoniam, vt in tribus est ostensum, idem numerus procreatur, siue genitus ex A, in C, ducatur prius in B, deinde hic productus in D; siue prius in D, deinde hic ꝓductus in B, patet, eundē generari numerū tū ex A, in C, & ex producto in B, & ex producto in D, tum ex A, in C, & ex producto in D, & ex producto in B, Cū ergo ille sit æqualis proxime ostēsus primo ꝓducto, erit & hic æqualis eidē, ꝙ est tertiū.

QVARTO quia, vt in tribus ostensum est, idē numerus fit ex

fit ex A, in B, & ex producto in D, qui ex A, in D, & ex producto in B; gignetur quoq; idē numerus ex A, in B, & ex producto in D, & ex producto in C, qui ex A, in D, & ex producto in B, & ex producto in C. Sed ille ostensus est primo loco æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & hic. Quod est quartum.

QVINTO quoniā, vt demonstratū est in tribus, idem numerus gignitur ex A, in C, & ex producto in D, qui ex A, in D, & ex producto in C; producetur idē numerus ex A, in C, & ex producto in D, et ex producto in B, qui ex A, in D, & ex producto in C, & ex producto in B. Cū ergo ille sit ostensus tertio loco æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D; erit & hic eidem æqualis. Quod est quintū.

SEXTO, quia, vt in tribus demonstrauimus, idem numerus fit ex A, in B, & ex producto in C, qui fit ex B, in C, & ex producto in A; liquet eundem procreari numerum tam ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, quàm ex B, in C, & ex producto in A, & ex producto in D. Quod est sextū.

SEPTIMO quia, vt in tribus ostēdimus, idē numerus gignitur, siue ꝓductus ex B, in C, ducatur prius in A, deinde hic ꝓductus in D, siue prius in D, deinde hic ꝓductus in A; cōstat eūdē numerū fieri ex B, in C, & ex ꝓducto in D, & ex ꝓducto in A, qui fit ex B, in C, & ex ꝓducto in A, & ex ꝓducto in D. Sed hic proximè ostēsus est æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex ꝓducto in C, & ex ꝓducto in D. Igitur & ille. ꝙ est septimū.

OCTAVO quia, vt in tribus ostensum est, idem numerus procreatur ex A, in B, & ex producto in D, qui ex B, in D, & ex producto in A; gignetur quoq; idem numerus ex A, in B, & ex producto in D, & ex producto in C, qui ex B, in D, & ex producto in A, & ex producto in C. Sed ille primo loco ostensus est æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & hic. Quod est octauum.

NONO quia, vt demonstratum est in tribus, idem numerus fit ex B, in C, & ex producto in D, qui ex B; in D, & ex producto in C; procreabitur idem quoque numerus ex B, in C, & ex producto in D, & ex producto in A, qui ex B, in D, & ex ꝓducto in C, & ex producto in A. Sed ille ostensus est septimo loco æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Ergo & hic. Quod est nonum.

DECIMO

DECIMO quoniam, vt in tribus est demonstratum, idem gignitur numerus ex A, in C, & ex producto in D, qui ex C, in D, & ex producto in A; producetur quoque idem numerus ex A, in C, & ex producto in D, & ex producto in B, qui ex C, in D, & ex producto in A, & ex producto in B. Sed ille, vt tertio loco est ostensum, æqualis est ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in B. Igitur & hic. Quod est decimum.

A, 2. B, 3. C, 4. D, 5. E, 120.

POSTREMO quoniam, vt ostensum est in tribus, idem numerus gignitur ex B, in C, & ex producto in D, qui ex C, in D, & ex producto in B; procreabitur quoque idem numerus ex B, in C, & ex producto in D, & ex producto in A, qui ex ex C, in D, & ex producto in B, & ex producto in A. Sed ille septimo loco ostensus est æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & hic eidem æqualis erit. Quod est vndecimum.

EODEM argumentandi modo vtendum est in quinq; vel pluribus numeris; dummodo interdum in quinq; assumatur id quod iam in quatuor demonstratum est; & in sex, quod in quinque, &c.

A. B. C. D. E.
A. B. C. E. D.
A. B. E. D. C.
B. C. A. D. E.

Vt in quinque numeris A, B, C, D, E, apparet, quorum ordinem ter immutauimus, idemque semper numerus ex continua eorum multiplicatione inter se procreatur. Nam productus ex A, in B, cum C, D, E, constituit quatuor numeros. Ergo quomodocunque inter se ordinem permutent, eundem semper gignent numerum: ac proinde tam secundus ordo, quàm tertius, eundem numerum producet, quem primus. Item quia tres numeri A, B, C, quomodocunque ordinem commutent, eundem efficiunt numerum: fit vt quartus ordo eundem prorsus numerum procreet, quem primus, & sic de cæteris.

17. THEOR. 18. PROPOS. 20.

SI inter duos numeros vnus medius proportionalis cadat numerus; Similes plani erunt illi numeri.

CADAT

CADAT inter A, & B, medius proportionalis C. Dico A, & B, esse planos similes. Sumantur D, & E, minimi in ratione A, C, B. Quia igitur D, E, minimi sunt in ratione A, ad C; [a] metientur D, & E, ipsos A, & C, æque: metiantur per F. Similiter æque metientur ipsos C, & B: metiantur per G. [b] Itaque F, multiplicans D, & E, faciet A, & C:

A, 18. C, 24. B, 32.
D, 3. E, 4. F, 6. G, 8.

[c] Item G, eosdem D, & E, multiplicans faciet C, & B. Quia ergo E, multiplicans F, & G, fecit C, & B; [d] erit, vt C, ad B, ita F, ad G: Vt autem C, ad B, ita erat D, ad E. Igitur erit vt D, ad E, ita F, ad G; & permutando vt D, ad F, ita E, ad G. Quoniam vero F, multiplicans D, fecit A; erit A, planus, cuius latera D, F. Simili modo, quia G, multiplicans E, fecit B; erit & B, planus cuius latera E, G. Cum ergo hæc latera ostensa sint esse proportionalia, hoc est, D, ad F, vt E, ad G; erunt ex defin. A, B, plani similes. Quare si inter duos numeros vnus, &c. Quod demonstrandum erat.

[a] 21. sept.
[b] 9. pron.
[c] 9. pron.
[d] 17. sept.

THEOR. 19. PROPOS. 21. 19.

SI inter duos numeros duo medij proportionales cadant numeri; Similes solidi sunt illi numeri.

CADANT inter A, & B, duo medij proportionales C, D. Dico A, & B, esse similes solidos. Sumantur tres E, F, G, minimi in ratione A, C, D, B. Quoniam igitur inter E, & G, medius cadit proportionalis F; [e] erunt E, & G, plani similes: sint ipsius E, latera H, I; ipsius vero G, latera

A, 24. C, 72. D, 216. B, 648.
E, 1. F, 3. G, 9.
H, 1. I, 1. M, 24. K, 3. L, 3. N, 72.
A, 8. C, 12. D, 18. B, 27.
E, 4. F, 6. G, 9.
H, 2. I, 2. M, 2. K, 3. L, 3. N, 3.

[e] 20. octa.

A, 24. C, 72. D, 216. B, 648. E, 1. F, 3. G, 9.
H, 1. I, 1. M, 24. K, 3. L, 3. N, 72.

latera illis proportionalia K, L. Et quia E, F, G, cum minimi sint in ratione A, C, D, [a] æque metiuntur ipsos A, C, D, eiusdem rationis cum illis; metiantur per M. Eodemque modo, [b] quia E, F, G, minimi æque metiuntur C, D, B, eandem habentes rationem cum illis; metiantur per N; [c] ita vt M, multiplicans E, F, G, faciat A, C, D; & N, multiplicans eosdem E, F, G, faciat C, D, B. Factus est autem E, ex multiplicatione mutua suorum laterum H, & I; nec non G, ex mutua multiplicatione suorum laterum K, & L. Igitur A, producitur ex mutua multiplicatione H, I, M; & B, ex mutua multiplicatione K, L, N; atque adeo A, solidus est numerus, ex defin. latera habens H, I, M; & B, solidus etiam, latera habens K, L, N. Quia vero M, & N, multiplicantes F, faciunt C, & D, vt ostendimus; [d] erit C, ad D, vt M, ad N: [e] Sunt autem C, & D, in eadem ratione, in qua E, & F; quòd N, multiplicans E, & F, fecerit ipsos C, & D; Nec non & E, F, eandem habent rationem, quam H, K, vel I, L. Etenim inter planos similes E, G, cadit F, medius proportionalis, per coroll. propos. 19. huius lib. in ratione laterum homologorum H, K, vel I, L. Igitur erit quoque H, ad K, & I, ad L, vt M, ad N; & permutando H, ad I, vt K, ad L; & I, ad M, vt L, ad N. Proportionalia ergo sunt latera H, I, M, lateribus K, L, N; ac propterea similes sunt numeri solidi A, & B. Quam ob rem, si inter duos numeros duo medij proportionales cadant numeri, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 21. sept.
[b] 21. sept.
[c] 9. prop.
[d] 18. sept.
[e] 17. sept.

SCHOLIVM.

DVO exempla apposuimus, in quorum priori liquido constat, vnitatem E, esse planum numerum, & vnitates H, I, eius latera, licet improprie, vt in definitione numeri plani innuimus. Si enim vnitatem a numeris planis excludamus, non

non poterimus hac argumentatione Euclidis demonstrare, numeros A, & B, qui includunt duos medios proportionales C, & D, esse solidos similes. Quod idem continget in alijs omnibus numeris, qui habent duos medios proportionales in ratione multiplici, cuiusmodi sunt etiam A, B, in eodem priori exemplo. Hoc autem est absurdum, cum Euclides propositionem generaliter proponat, eamque sine vlla exceptione demonstret.

THEOR. 20. PROPOS. 22. 20.

SI tres numeri deinceps sint proportionales, primus autem sit quadratus; Et tertius quadratus erit.

SINT tres numeri A, B, C, continue proportionales, sitque primus eorum A, quadratus. Dico & tertium C, quadratum esse. Nam cum inter A, & C, cadat medius proportionalis A, 9. B, 54. C, 324. [a] erunt A, & C, plani similes. Quare existente A, quadrato, erit & C, ei similis, quadratus. Si igitur tres numeri deinceps sint proportionales, &c. Quod demonstrandum erat.

[a] 20. octaui

THEOR. 21. PROPOS. 23. 21.

SI quatuor numeri deinceps sint proportionales, primus autem sit cubus; Et quartus cubus erit.

SINT quatuor numeri A, B, C, D, proportionales continue, & A, primus sit cubus. Dico & quartum D, cubum esse. Cum enim inter A, & D, cadant duo medij A, 27. B, 45. C, 75. D, 125, proportionales B, C; [a] erunt A, & D, solidi similes. Quare existente A, cubo, erit & D, illi similis, cubus. Quā ob rē, si quatuor numeri deinceps sint proportionales, &c. Quod erat ostendendū.

[a] 21. octaui

SCHOLIVM.

HAEC est apud omnes interpretes Euclidis, quos ego vidi, vulgata demonstratio præcedentium duarum propositionum; quam qui diligẽter examinare velit, inueniet sane mãcam esse, & imperfectam. Cum enim ad defin. 21. lib. 7. tradiderimus, duos numeros planos, vel solidos posse similes esse, quamuis non quibuscunque lateribus vnius exhiberi possint alia latera alterius proportionalia; dummodo quibusdam lateribus vnius proportionalia sint quædam alterius; Iure optimo quis inficiari poterit, si duorum planorum similium vnus fuerit quadratus, alterum quoque quadratum esse, & si duorum similium solidorum vnus cubus fuerit, alterum etiam esse cubum: quod tamen in demonstratione pro concesso, atque omnibus perspicuo assumebatur. Nam positis duobus numeris planis 36. & 64. similibus, satis est, vt duobus lateribus prioris, qualia sunt 3. & 12. exhibeantur alia duo latera posterioris, nimirum 4. & 16. proportionalia. Vnde etiamsi prior sit quadratus, habens duo latera æqualia 6. & 6. merito dubitare quis possit, immo omnino negare, posteriorem habere alia duo latera his proportionalia, hoc est, inter se quoque æqualia, atque adeo esse quadratum: quemadmodum etiam manifestum est, hisce lateribus prioris 4. & 9. vel 2. & 18. non respondere alia latera in posteriori proportionalia. Si igitur his lateribus prioris numeri non reperiuntur alia latera in posteriori proportionalia, quanquam ipsi numeri sint similes, cur sine demonstratione vlla cõcedemus, his lateribus prioris æqualibus 6. & 6. assignari posse in posteriori alia duo proportionalia, videlicet & inter se æqualia? Idem dicendum est de solidis similibus. Quapropter vtramque propositionem Euclidis aliter demonstrabimus, ad hunc, qui sequitur, modum.

SINT tres numeri A, B, C, continue proportionales, & primus A, quadratus. Dico & C, tertium esse quadratum. Sumpto enim D, latere quadrati A; cum D, ex defin. in se faciat A; erunt D, & A, ex scholio propos. 9. huius lib. ab vnitate continue proportionales; eritque conuertendo A, ad D, vt D, ad vnitatem; atque adeo cum inter numerum A, eundem, & tam numerum C, quam vnitatem, cadant

A, 36. B, 48, C, 64.
D, 6. E, 8.
vni-. tas

cadant medij proportionales multitudine æquales, nimirum vnus; cadent quoque totidem, ex theor. 3. scholij propos. 10. huius lib. inter unitatem, atque C, numerum, nimirum vnus, qui sit E. Quoniam igitur vnitas & E, C, numeri sunt continue proportionales; producetur C, ex E, in se ipsum, ex scholio propos. 10. huius lib. Ac proinde C, quadratus erit, ex defin. cuius latus E.

ALITER. Sumptis tribus numeris D, E, F, minimis in ratione A, ad B, & B, ad C; metietur D, ipsum A, & F, ipsum C, æque, ex ijs, quæ ostendimus ad propos. 21. lib. 7. Et quoniã extremi D, F, minimorũ trium numerorũ, per coroll. 1. propos 2. huius lib. sunt quadrati: Est autem & A, quadratus, ex hypothesi; [a] cadet inter A, & D, quadratos medius vnus proportionalis, vt G. Quia vero est, ex æquo, vt A, ad C, ita D, ad F; & permutando, vt A, ad D, ita C; ad F; [b] cadet quoque inter C, & F, vnus proportionalis medius, nimirum H. Cum ergo F, primus metiatur C, vltimum; [c] metietur idem & secundum H. Sumpto autem I, latere quadrati F; metiatur I, toties numerum K, quoties F, ipsum H, metitur; ita vt H, ad F; & K, ad I, eandem habeant proportionem multiplicem. Sit quoque L, quadratus ipsius K. [d] Itaque quia ratio L, ad F, quadrati ad quadratum, duplicata est rationis K, ad I, lateris ad latus, hoc est, H, ad F: Est autem & ratio C, ad F, eiusdem rationis H, ad F, ex defin. duplicata, quod conuertendo sint proportionales etiam C, H, F; erit L, ad F, vt C, ad F; Ac proinde I, & C, æquales sunt. Existente ergo L, quadrato, ex constructione, & C, quadratus erit.

ALITER. [e] Quoniam A, & C, similes plani sunt; sint eorum latera proportionalia, D, E, quidem ipsius A; at F, G, ipsius C; ita vt sit D, ad E, sicut F, ad G: assumaturque H, latus quadrati A. Quoniam igitur idem numerus A, producitur ex D, in E, & ex H, in se, [f] erunt D, H, E, continue proportionales. Cum ergo sit F, ad G, vt D, ad E; cadatque inter D, & E, medius

A, 36. B, 48. C, 64.
H, 6. I, 8.
D, 3. E, 12. F, 4. G, 16.

[a] 11. octaui
[b] 8. octaui
[c] 7. octaui
[d] 11. octaui
[e] 20. octaui
[f] 20. sept.

a 8. octaui. dius proportionalis H,[a] cadet quoque inter F, & G, vnus medius proportionalis, qui sit I. Quare cum F, I, G, sint continue proportionales; b idē numerus fiet ex F, in G, qui ex I, in se ipsum. Fit autem C, ex F, in G. Igitur & idem C, fiet ex I, in se ipsum: Atque adeo C, quadratus erit, ex definitione, cuius latus I.

A,36. B,48. C,64.
H,6. I,8.
D,6. E,6. F,8. G,8.

b 20. sept.

SINT rursum quatuor numeri A, B, C, D, continue proportionales, & A, primus, sit cubus. Dico & D, quartum, cubum esse. Sumpto enim E, latere cubi A; fiat ex E, in seipsum numerus F, ac proinde, ex defin. ex E, in F, cubus A. Quia ergo E, in se facit F, & in F, facit A; erunt, ex scholio propos. 9. huius lib. E, F, A, continue proportionales ab vnitate; atque idcirco conuertēdo ꝓportionales quoque erunt numeri A, F, E, & vnitas. Itaque cum inter numerum D, & vnitatē, ac eundem numerum A, cadant medij proportionales multitudine æquales, videlicet duo; cadent, ex theorem. 3. scholij propos. 10. huius lib. totidem medij inter vnitatem, & numerum D, qui sint G, H. Itaque quia vnitas, & numeri G, H, D, continue sunt proportionales: fiet H, ex G, in se, & D, ex G, in productum H, vt ad propos. 10. huius lib. a nobis est demonstratū. Quare D, cubus est, ex definitione, cuius latus G.

A,64. B.160. C,400. D,1000.
F,16. H,100.
E,4. G,10.
vni-.tas

ALITER. Inuentis quatuor numeris minimis E, F, G, H, in ratione A, ad B, & B, ad C, & C, ad D, metietur E, ipsum A, & H, ipsum D, æque, per ea, quæ ad propos. 21. lib. 7. demonstrauimus. Et quia E, H, extremi quatuor minimorum, cubi sunt, ex 1. coroll. propos. 2. huius lib. Est aūt & A, cubus, ex hypothesi; c cadent inter E, A, cubos duo medij proportionales, qui sint I, K. Quoniam autem, ex æquo, est vt A, ad D, ita E, ad H; & per-

A,64. B,160. C,400. D,1000.
K,32. M,500.
I,16. L,250.
E,8. F,20. G.50. H,125.
P.1000. O,10. N,5.

c 12. octaui

& permutando, vt A, ad E, ita D, ad H;[a] cadent quoque inter H, D, duo medij proportionales, qui sint L, M. Cum ergo H, primus metiatur D, extremum, b metietur idem & L, secundum. Sumpto deinde N, latere cubi H; metiatur N, toties numerum O, quoties H, ipsum L, ita vt L, ad H, & O, ad N, eandrm habeant proportionem multiplicem: sit quoque P, cubus ipsius O. c Itaque cum ratio P, ad H, cubi ad cubum, triplicata sit rationis O, ad N, lateris ad latus, hoc est L, ad H: Sit autem & ratio D, ad H, eiusdem rationis L, ad H, ex defin. triplicata, quod conuertendo proportionales etiam sint D, M, L, H; erit P, ad H, vt D, ad H; Ac propterea P, & D, æquales erunt. Quare cum P. cubus sit, ex constructione, cubus quoque erit D.

a 8. octaui
b 7. octaui.
c 12. octaui

THEOR. 22. PROPOS. 24. 22.

SI duo numeri rationem habeant inter se, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, primus autem sit quadratus, & secundus quadratus erit.

SIT enim A, ad B, vt C, quadratus ad quadratum D; sitque A quadratus. Dico & B, esse quadratū. Cum enim sit A, ad B, vt C, ad D; d cadat aūtem inter C, & D, quadratos vnus medius proportionalis, videlicet E; e cadet quoque inter A, & B, medius vnus, qui sit F. Quia igitur tres numeri sunt continue proportionales A, F, B; & A, primus est quadratus; f erit & B, tertius, quadratus. Quare si duo numeri rationem habeant inter se, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, &c. Quod erat ostendendū.

A,36. F.48. B.64.
C,9. E,12. D,16.

d 11. octaui
e 8. octaui
f 22. octaui

COROLLARIVM.

LIQVET ex his, proportionem cuiusuis numeri quadrati ad quemlibet numerum non quadratum exhiberi

exhiberi nullo modo posse in duobus numeris quadratis. Si enim exhiberetur, [a] essent ambo priores numeri habentes proportionem, quam quadrati proportionis exhibitæ, etiam quadrati, cum primus ponatur quadratus. Quod est absurdum. Ponitur enim secundus, non quadratus. Vnde numeri in dupla proportione, proportionem non habent, quam quadratus ad quadratum. Si enim haberent, essent omnes hi dupli numeri 4.8.16.32.64.128. &c. quadrati. Primo enim 4. existente quadrato, [b] esset & 8. quadratus. Igitur & 16. & 32. &c. quod est absurdum. [c] Nam inter 4. & 8: & inter 8. & 16. & inter 16. & 32. &c. caderet medius proportionalis, si essent quadrati: cum tamen in scholio propos. 8. huius lib. demonstratum sit, inter numeros duplæ proportionis quosuis non posse cadere medium proportionalem.

[a] 24. octaui
[b] 24. octaui
[c] 11. octaui

SIMILI modo numeri in quintupla proportione proportionem non habebunt, quam quadratus numerus ad numerum quadratum. Si enim haberent, [d] caderet inter eos medius proportionalis. [e] Igitur & inter 5. & 1. minimos numeros quintuplæ proportionis, quod fieri non posse, demonstratum a nobis est in scholio propos. 8. huius lib.

[d] 11. octaui
[e] 8. octaui

23. THEOR. 23. PROPOS. 25.

SI duo numeri rationem inter se habeant, quam cubus numerus ad cubum numerum, primus autem sit cubus, & secundus cubus erit.

SIT enim A, ad B, vt C, cubus ad D, cubũ; sitq; A, cubus. Dico & B cubum esse. Cum enim sit A, ad B, vt C, ad D; [f] cadant autem inter C, & D, cubos duo medij proportionales, qui sint E, F; [g] cadent quoque

[f] 12. octaui
[g] 8. octaui

A. 8. G. 12. H. 18. B. 27.
C. 64. E. 96. F. 144. D. 216.

quoque inter A, & B, duo medij, qui sint G, H. Quia igitur quatuor numeri A, G, H, B, sunt continue proportionales, & A, primus est cubus; [a] erit & B, quartus cubus. Quocirca, si duo numeri rationem inter se habeant, quam cubus numerus ad cubum numerum, &c. Quod demonstrandum erat.

[a] 23. octaui

COROLLARIVM.

PATET etiam ex his, proportionem cuiusuis numeri cubi ad quemlibet numerum non cubum, non posse reperiri in duobus numeris cubis. Si enim reperiretur, [b] essent ambo priores numeri habentes proportionem, quam cubi proportionis repertæ, etiam cubi, cum primus ponatur cubus. Quod est absurdum. Ponitur enim secundus, non cubus.

[b] 25. octaui

THEOR. 24. PROPOS. 26. 24.

SIMILES plani numeri rationem inter se habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

SINT plani similes A, & B. Dico esse vt A, ad B, ita aliquem numerum quadratum ad alium quendã quadratum. Cum enim A, & B, sint plani similes; [c] cadet inter eos vnus medius proportionalis, videlicet C. Sumptis ergo tribus numeris D, E, F, minimis in ratione cõtinua A, C, B; erunt extremi D, & F, quadrati, ex coroll. 1. propos. 2. huius lib. Quare cum sit, ex æquo A, ad B, vt D, ad F, manifestum est, ita esse A, ad B, vt est quadratus aliquis, videlicet D, ad quadratum alium, vt ad F. Ergo

A. 20. C. 30. B. 45.
D. 4. E. 6. F. 9.

[c] 18. octaui

similes plani numeri rationē inter se habent, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM

FACILE etiam demonstrabimus conuersum huius, videlicet.

NVMERI, qui proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, similes plani sunt.

HABEANT numeri A, B, proportionem inter se, quam quadrati C, D. Dico A, B, esse planos similes. [a] Quoniam enim inter quadratos C, D, cadit vnus medius proportionalis: Et est, vt C, ad D, ita A, ad B; [b] cadet quoque medius proportionalis inter A, & B. [c] Quare A, & B, plani similes sunt.

A, 8. B, 18. C, 16. D, 36.

[a] 11. octaui [b] 8. octaui [c] 20. octaui

EX hoc perspicuum est planos numeros, qui similes non sunt, proportionem non habere, quam quadratus ad quadratum. Si enim haberent; essent, vt modo demonstratum est, plani similes. quod est absurdum. ponuntur enim non similes.

25. THEOR. 25. PROPOS. 27.

SIMILES solidi numeri rationem habent inter se, quam cubus numerus ad cubum numerum.

SINT similes solidi A, B. Dico esse, vt A, ad B, ita cubum quempiam numerum ad alium quendam cubum. Quia enim A, B, sunt solidi similes; [a] cadent inter eos duo medij proportionales. qui sint C, D. Sumptis autem quatuor numeris E, F, G, H, minimis in continua proportione A, C, D, B; erūt extremi E, H, ex coroll. 1. propos. 8. huius lib. cubi. Quare, cum ex æquo sit A, ad B, vt E, ad H; constat ita esse A, ad B, vt est cubus aliquis, nimirum E, ad alium cubum, videlicet ad H. Similes ergo solidi numeri rationem habent inter se, &c. Quod erat ostendendum.

A, 240. C, 360. D, 540. B, 810.
E, 8. F, 12. G, 18. H, 27.

[a] 19. octaui

SCHOLIVM.

CONVERSVM huius etiam demonstrabimus; scilicet.

NVMERI, qui proportionem habent, quam cubus numerus ad cubum numerum, sunt solidi similes.

NVMERI enim A, B, proportionem habeant inter se, quam cubi C, D. Dico A, B, solidos esse similes. Nam cum sit A, ad B, vt C, ad D; [a] cadant autem inter C, D, cubos duo medij proportionales; [b] cadent quoque inter A, B, duo medij. [c] Sunt ergo A, & B, solidi similes.

A, 16. B, 54. C, 64. D, 216.

[a] 12. octaui [b] 8. octaui [c] 21. octaui

EX his omnibus perspicue infertur, nullos numeros habentes duplam proportionem, vel superparticularem, vel superbipartientem, esse similes planos, vel solidos. Si enim essent similes plani, [a] caderet inter eos medius vnus proportionalis, quod fieri non posse, iam dudum ostensum est in scholio propos. 8. huius lib. Eadem ratione non erunt similes solidi, cum inter eos cadere non possint duo medij proportionales. [c] Nam alias caderent quoque duo medij inter minimos earūdem proportionum numeros. Quod fieri non potest, quod hi vel sola vnitate, vel certe binario tantum inter se distent, vt in scholio prædicto traditum est; inter quos certum est, non posse intercipi duos numeros, nedum duos medios proportionales.

[a] 18. octaui [c] 8. octaui

SIMILITER nec duo quiuis numeri primi esse possunt plani similes, vel solidi, cum non possint habere latera proportionalia. Nam quilibet numerus planus, qui sit numerus

rus primus, latera habet solummodo vnitatem, & seipsum, quamuis improprie. Vt hi numeri plani 19. & 23. latera habent 1. 19. & 1. 23. cum ex horum mutua multiplicatione producantur, quæ constat non esse proportionalia. Quinis vero numerus solidus, qui numerus etiam primus sit, latera tantum habet duas vnitates, & se ipsum. Vt hi numeri solidi 29. & 47. latera habent 1. 1. 29. & 1. 1. 47. cum ex mutua horum multiplicatione producantur. Perspicuum autem est, ea non posse esse proportionalia.

RVRSVS neque duo quicunque numeri inter se primi, qui quadrati non sint, vel cubi, (quamuis neuter eorum primus sit) plani similes, vel solidi similes esse possunt. Si enim duo huiusmodi numeri inter se primi, dicantur esse plani vel solidi similes; [a] cadet inter illos vnus medius proportionalis, vel duo. Cum ergo extremi duo ponantur inter se primi, erunt omnes tres, vel quatuor inter se primi, cum nullus numerus illos omnes, tanquam communis mensura metiri possit, propter duos extremos inter se primos. Quare minimi erunt continuè proportionales, vt in scholio propos. 24. lib. 7. demonstrauimus. Ac propterea ex coroll. 1. propos. 2. huius lib. extremi duo quadrati erunt, vel cubi. quod absurdum est. Pronuntur enim neque quadrati, neque cubi.

[a] 18. & 19. octani

EX his sequitur, si duo numeri sint plani, vel solidi similes, quorum minor sit primus, minorem numerare maiorem. Nam si eum non numeraret; [b] essent duo propositi numeri inter se primi: ac proinde, vt proximè ostendimus, non possent esse plani, vel solidi similes. quod absurdum est, & contra hypothesim. Verum hoc ostensiuè quoque ita demonstrabimus. Sint primum duo numeri plani similes A, B, sitq; A, minor, primus. Dico A, ipsum B, metiri. Nam cum A, & B, ponantur plani similes, habebunt latera proportionalia. Cum ergo latera numeri primi A, sint C, vnitas, & numerus D, ipsi A, æqualis, quòd nullus alius numerus, præter C, vnitatem, & numerum D, ipsi A, æqualem, metiatur primum numerum A: sint E, F, latera numeri B, lateribus C, D, proportionalia, ita vt sit C, ad E, vt D, ad F. Erit igitur per mutando C, ad D, vt E, ad F. [c] Igitur numerus

[b] 31. sept.

A, 3. B, 48.
C, 1. D, 3. E, 4. F, 12.

[c] 19. sept.

rus factus ex C, primo in F, quartum æqualis erit ei, qui fit ex D, secundo in E, tertiũ: Fit autem ex C, vnitate in F, ipse met numerus F. Idem ergo numerus F, fiet ex D, in E. [a] Quare D, ipsum F, metietur. [b] Metitur autem F, ipsum B, quòd B, signatur ex E, in F. [c] Igitur & D, id est, A, illi æqualis, eundem B, metietur. quod est propositum.

[a] 4. pron.
[b] 4. pron.
[c] 11. pron.

HINC Perspicuum est, duos numeros inter se primos, quorum minor primus sit, non posse esse planos similes. Nam si essent similes, metiretur minor maiorem, vt proximè ostendimus. Cum ergo & seipsum metiatur, non essent inter se primi, sed compositi. quod est contra hypothesim.

SINT deinde duo solidi similes A, B, sitque A, minor primus. Dico A, ipsum B, metiri. Nam cum A, & B, sint solidi similes, habebunt latera proportionalia. Cum ergo latera numeri primi A, sint B, C, vnitates, & numerus D, ipsi A, æqualis, quòd nullus alius numerus, præter vnitatem, & numerum D, ipsi A, æqualem, metiatur numerum primum A: sint E, F, G, latera numeri B, lateribus B, C, D, proportionalia, ita vt sit B, ad E, vt C, ad F, & D, ad G.

A, 3. B, 24.
B, 1. C. 1. D, 3. E, 2. F, 2 G, 6.

Quia igitur est C, ad F, vt D, ad G, erit permutando C, ad D, vt F, ad G. [d] Igitur numerus factus ex C, primo in G, quartum æqualis erit ei, qui fit ex D, secundo in F, tertium: Fit autem ex C, vnitate in G, ipsemet numerus G. Idem ergo numerus G, fiet ex D, in F. [e] Quare D, ipsum G, metietur. [f] Metitur autẽ G, ipsum B, quòd G, latus sit ipsius B. [g] Igitur & D, hoc est, A, illi æqualis, eundem B, metietur. quod est propositum.

[d] 19. sept.
[e] 4. pron.
[f] 4. pron.
[g] 11. pron.

ATQVE ex hoc etiam constat, duos numeros inter se primos, quorum minor primus sit, non posse esse solidos similes. Nam si essent similes, metiretur minor maiorem, vt proximè ostendimus. Cum ergo & se ipsum metiatur, non essent inter se primi, sed inter se compositi. quod est contra hypothesim.

ITAQVE facilis admodum est inuentio duorum planorum, vel solidorum non similium. Si enim accipiantur duo numeri habentes proportionem duplam, vel superparticularem, vel superbipartientem; vel certe duo numeri primi, vel duo inter se primi, quorum neuter quadratus sit, aut cubus;

erunt

erunt illi ipsi per ea, quæ tradita sunt, plani seu solidi non similes.

RVRSVS quilibet duo numeri, quorum alter quadratus sit, alter uero non quadratus, plani sunt non similes; quales sunt 16. & 20. Si enim essent plani similes, [a] haberent proportionem, quam quadratus ad quadratum. Existente igitur 16. quadrato, [b] esset & 20. quadratus, quod est absurdum: ponitur enim non quadratus.

[a] 26. octaui

[b] 24. octaui

PARI ratione quilibet duo numeri, quorum alter cubus sit, alter vero non cubus, solidi sunt non similes, vt 27. & 40. Si enim essent solidi similes, [c] haberent proportionem, quam cubus ad cubum. Cum igitur 27. cubus sit, [d] esset & 40. cubus: quod est absurdum. ponitur enim non cubus.

[c] 27. octaui

[d] 25. octaui

FINIS ELEMENTI OCTAVI.

EVCLI-

EVCLIDIS

ELEMENTVM NONVM.

THEOR. 1. PROPOS. 1. 1.

SI duo similes plani numeri multiplicantes se mutuo faciant quendam; Productus quadratus erit.

DVO numeri plani similes A, B, se mutuo multiplicantes faciant C. Dico C, quadratum esse. Multiplicans enim A, se ipsum faciat D, quadratum. Quoniam igitur A, multiplicãs A, & B, produxit D, & C, [a] erit vt A, ad B, ita D, ad C. At inter A, & B, cum sint plani similes, [b] vnus medius cadit proportionalis. [c] Igitur & inter D, & C, vnus medius proportionalis cadet. Cadat ergo E, vt sint continue proportionales D, E, C. Itaq; cũ tres D, E, C, continue sint proportionales, sitq; primus D, quadratus, ex constructione; [d] erit quoque C, tertius, quadratus. Si duo ergo similes plani numeri multiplicantes se mutuo, &c. Quod erat demonstrandum.

A, 6. B, 54.
D, 36. E, 108. C, 324.

[a] 17. septimi.

[b] 18. octaui

[c] 8. octaui

[d] 22. octaui

THEO-

2.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI duo numeri se mutuo multiplicantes faciant quadratum; similes plani erunt.

DVO numeri A,B, se mutuo multiplicantes faciant C, quadratū. Dico A, B, esse similes planos. Multiplicans enim A, seipsum faciat D, quadratū.

A,6. B,54. D,36. C,324.

Quoniam igitur A, multiplicās A, & B, fecit D, & C,[a] erit vt A, ad B, ita D, ad C.[b] At inter D, & C, quadratos vnus medius cadit proportionalis.[c] Igitur & inter A, & B, vnus medius proportionalis cadet;[d] Ac propterea A, & B, similes plani sunt. Quare si duo numeri se mutuo multiplicantes, &c. Quod demonstrandū erat.

[a] 17 sept. 11. octaui
[b] 8. octaui
[c] 20. octaui

SCHOLIVM.

EX his demonstrabimus quatuor insequentia theoremata non inutilia.

I.

SI duo numeri quadrati se mutuo multiplicantes faciant quempiam: Productus quadratus erit.

DVO quadrati A, B, se mutuo multiplicātes faciāt C. Dico C, esse quadratum.

A,4. B,25. C,100.

Cum enim A, & B, sint similes plani, nimirum quadrati;[e] erit C, ex eis productus, quadratus.

[e] 1. noni

II.

SI duo numeri se mutuo multiplicantes faciant quadratum; alter autem sit quadratus; Et reliquus quadratus erit.

DVO numeri A, B, se mutuo multiplicantes faciant C, quadratum; sitque A, quadratus.

Dico & B, quadratum esse. Cum enim A, & B, se mutuo multiplicantes faciant C, quadratū:[a] erunt A, & B, similes plani:[b] atque adeo inter eos vnus medius cadet proportionalis, videlicet D.[c] Quare A, existente quadrato, erit & B, quadratus.

A,9. D,12. B,16. C,144.

[a] 2. noni
[b] 18. octaui
[c] 22. octaui

III.

SI duo numeri se mutuo multiplicantes faciant non quadratum, alter autem sit quadratus; Reliquus non quadratus erit.

DVO numeri A, B, se mutuo multiplicantes faciant C, non quadratum; sitque A, quadratus.

Dico B, non quadratum esse. Si enim B, dicatur esse quadratus, erit & C, productus ex quadratis A, B, quadratus, per theor. 1. huius scholij; Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non igitur quadratus est B, numerus.

A,4. B,20 C,80.

IIII.

SI duo numeri, quadratus & non quadratus, se mutuo multiplicantes faciant aliquem; Productus non quadratus erit.

DVO numeri A, quadratus, & B, non quadratus, se mutuo multiplicantes faciant C. Dico C, non esse quadratum.

Nam si C, foret quadratus, cum producatur ex A, in B, sitque A, quadratus; esset & B, ex theor. 2. huius scholij, quadratus: Quod est absurdum, & contra hypotesim. Non igitur C, quadratus erit.

A,9. B,20. C,180.

THEO-

3.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI cubus numerus seipsum multiplicans procreet aliquem; Productus cubus erit.

FACIAT cubus A, seipsum multiplicans numerũ B. Dico B, esse cubum. Sit enim C, latus cubi A; & ex C, in se fiat D, & idcirco ex C, in D, ipse cubus A, gignatur. Quia igitur C, seipsum multiplicãs fecit D: [a] metietur C, ipsum D, per C: [b] Metitur autem & vnitas ipsum C, per C. Igitur eadem pars est vnitas ipsius C, quæ C, ipsius D, nimirum denominata a C; Ac proinde [c] vt vnitas ad C, ita C, ad D. Rursus quia C, multiplicans D, fecit A; [d] metietur D, ipsum A, per C, Metiebatur autem & C, ipsum D, per C. Eadem ergo pars est C, ipsius D, quæ D, ipsius A; [e] ideoque vt C, ad D, ita D, ad A: sed vt C, ad D, ita erat vnitas ad C. Igitur vt vnitas ad C, ita C, ad D, & D, ad A; Atque adeo inter vnitatem & numerum A, duo medij proportionales cadunt numeri C, D. [f] At quia A, ipsum B, metitur per A, quòd A, se ipsum multiplicans fecerit B; [g] metitur vero & vnitas ipsum A, per A; Eadem erit pars vnitas ipsius A, quæ A, ipsius B; [h] Ac propterea erit vt vnitas ad A, ita A, ad B. Quare cum inter vnitatem & numerum A, cadant duo medij proportionales C, & D; [i] cadent totidem inter A, & B, nimirũ E, & F. Cũ ergo quatuor numeri A, E, F, B, sint continue proportionales, & A, primus sit cubus, [k] erit quoque B, quartus cubus. Si cubus igitur numerus se ipsum multiplicans, &c. Quod erat demonstrandum.

a 7. pron.
b 5. pron.
c 20. defin.
d 7. pron.
e 20. defin.
f 7. pron.
g 5. pron.
h 19. defin.
i 8. Octaui.
k 23. Octaui.

4.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI cubus numerus cubum numerum multiplicans faciat aliquem; Factus cubus erit.

FIAT ex cubo A, in cubum B, numerus C. Dico C, cubum esse. Multiplicans enim A, se ipsum faciat D; [a] eritq; D, cubus. Quoniã vero A multiplicans A, & B, fecit D, & C; [b] erit vt A, ad B, ita D ad C. [c] At inter A, & B, cubos duo medij proportionales cadunt, [d] Igitur & inter D, & C, duo medij proportionales cadent; [e] Ac propterea D, existente cubo, & C, cubus erit. Quocirca si cubus numerus cubũ numerum multiplicans, &c. Quod erat ostendendum.

	A,	B,
	A, 8.	B, 27.
	D, 64.	C, 216.

a 3. noni.
b 17. sept.
c 12. octaui
d 8. octaui.
e 23. octaui

THEOR. 5. PROPOS. 5.

5.

SI cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat cubum; Et multiplicatus cubus erit.

FIAT ex cubo A, in numerum B, numerus cubus C. Dico & B, cubum esse. Multiplicans enim A, se ipsum faciat D, [a] qui cubus erit. Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, fecit D, & C; [b] erit vt A, ad B, ita D, ad C. [c] At inter D, & C, cubos duo cadunt medij proportionales. [d] Totidem igitur & inter A, & B, cadent; [k] Ac proinde existente A, cubo, & B, cubus erit. Quamobrem si cubus numerus numerum quendam multiplicans, &c. Quod ostendendum erat.

	A,	B,
	A, 8.	B, 27.
	D, 64.	C, 216.

a 3. noni.
b 17. sept.
c 12. octaui
d 8. Octaui
k 23. octaui

SCHOLIVM.

EX his & hæc, quæ sequuntur, facile demonstrabuntur, videlicet.

I

SI cubus numerus non cubum numerum multi-

multiplicans faciat aliquem; Factus non cubus erit.

FIAT ex A, cubo in B, non cubum numerus C. Dico C, non esse cubum. Si enim C, sit cubus; [a] *& multiplicatus B, cubus erit. quod non ponitur.*

A,8. B,20. C,160.

[a] 5. noni

II.

SI cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat non cubum; Et multiplicatus non cubus erit.

FIAT ex cubo A, in numerum B, non cubus C. Dico & B, non esse cubum. Si namque B, sit cubus, [b] *& factus C, cubus erit. quod est contra hypothesim.*

A,8. B,17. C,136.

[b] 4. noni

6. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI numerus seipsum multiplicans cubum faciat: Et ipse cubus erit.

MVLTIPLICANS seipsum numerus A, faciat B, cubū. Dico & A, cubū esse. Fiat enim ex A, in B, numerus C, qui cubus erit, cum A, in se faciat B, & ipse C, ex A, in B, gignatur, atque adeo æqualis æqualiter æqualis sit, vt perspicuum est ex ijs, quæ ad definitionem cubi scripsimus. Quia igitur B, cubus multiplicans numerum quempiam A, facit cubum C; [c] erit & A, cubus. Quare si numerus se ipsum multiplicans cubum faciat, &c. Quod erat demonstrandum.

A,8. B,64. C,512.

[c] 5. noni

SCHOLIVM.

ALIAM demonstrationem interpretes Euclidis hoc loco

loco adducunt, & quidem longiorem. Postquam enim demonstrarunt C, factum ex A, in B, esse cubum, inferunt: [a] *Ergo inter B, & C, cubos duo medij proportionales cadunt.* [b] *Quoniam vero est vt B, ad C, ita A, ad B, quod A, multiplicans A, & B, ipsos B, & C, fecit;* [c] *cadent quoque inter A, & B, duo medij proportionales.* [d] *Atque adeo existente B, cubo, & A, cubus erit. Verum nostra demonstratio brevior est, & planior, vt perspicuum est.*

A,8. B,64. C,512.

[a] 12. octaui
[b] 17. sept.
[c] 8. octaui
[d] 23. octaui

7. THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI compositus numerus numerum aliquem multiplicans, quempiam faciat; Factus solidus erit.

NVMERVS compositus A, multiplicans numerum quemlibet B, faciat C, Dico C, esse solidum. Cum enim A, sit compositus, [e] metietur eum, præter vnitatē, numerus aliquis: metiatur D, ipsum A, per E. Quo posito, [f] multiplicante D, ipsum E, producetur A. Cum ergo B, ipsum A, multiplicās fecerit C; procreabitur C, ex mutua multiplicatione trium numerorū D, E, B; Ac propterea solidus erit ex defin. cuius latera D, E, B. Quapropter si compositus numerus numerum aliquem multiplicans, &c. Quod erat ostendendum.

A,6. B,11. C,66. D,2. E,3.

[e] 13. defin.
[f] 9. pron.

8. THEOR. 8. PROPOS. 8.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint: Tertius quidem ab vnitate quadratus est, & vnum intermittentes omnes: Quartus autem est cubus, & duos intermittētes omnes: Septimus vero cubus simul, & quadratus, & quinque intermittētes omnes.

SINT ab vnitate continue proportionales numeri quotcunque A,B,C,D,E,F,G,H,I,K,L,M. Dico tertiũ quidẽ B, ab vnitate esse quadraũ,& vnũ intermittẽtes

Vnitas. A,3. B,9. C,27. D,81. E,243. F,729. G,2187. H,6561. I,19683. I,K.59049. L,177147. M,531441.

omnes, quales sunt D,F,H,K,M: Quartum autem C, cubum,& duos intermittentes omnes, cuiusmodi sunt F,I. M: septimum vero F, cubũ simul,& quadratum, & quinque intermittentes omnes, nimirum M Quoniam enim est vnitas ad A, vt A, ad B;æque metietur vnitas numerum A,& numerus A, numerum B: [a] Metitur autem vnitas numerum A, per A. Ergo & A, ipsum B, per A, metietur; [b] Atque adeo A, multiplicans A, ipsum B, producet. Quare B, quadratus est. Quia vero tres deinceps proportionales sunt B,C,D,& est B, quadratus; [c] erit & D, quadratus. Eadem ratione assumptis tribus deinceps proportionalibus D,E,F, cum D, sit quadratus, [d] & F, quadratus erit; Nec non & omnes vnum intermittentes.

[a] 5. pron.
[b] 9. pron.
[c] 22. octaui
[d] 22. octaui

RVRSVS quia est vnitas ad A, vt B, ad C; æque metietur vnitas numerũ A,& numerus B, numerũ C; [e] Metitur autem vnitas ipsum A, per A. Igitur & B, ipsum C, per A, metietur; [f] atque adeo B, ipsum A, multiplicans procreabit numerum C. Quare cum A, seipsum multiplicans faciat B, multiplicans vero B, faciat C, vt est ostensum; erit C, cubus. Quia vero quatuor deinceps proportionales sunt C,D,E,F,& est C, cubus; [g] erit & F, cubus. Eodem argumento, assumptis quatuor deinceps proportionalibus F,G,H,I, cum F, sit cubus; [h] & I, cubus erit; atque omnes semper duos intermittentes.

[e] 5. pron.
[f] 9. pron.
[g] 23. octaui
[h] 23. octaui

POSTREMO quia F, septimus ab vnitate ostensus est & quadratus, & cubus: ipse erit cubus simul & quadratus: Atque eodem modo M, septimus ab F, intermissis nimirũ quinque G, H, I, K, L, cubus erit simul & quadratus; Nec non & omnes quinque intermittẽtes. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHO-

SCHOLIVM.

HOC theorema potest quoque hoc modo proponi.

SI sint quotcunque numeri ab vnitate continue proportionales, omnes positi in locis imparibus, nimirum in tertio, quinto, septimo, nono, vndecimo, &c. sunt quadrati. Omnes autem, qui sequuntur proxime numeros positos in locis, tertio, sexto, nono, duodecimo, decimoquinto, decimooctauo, & alijs, quę ternarius metitur, cuiusmodi sunt numeri quartus, septimus, decimus, tertius decimus, decimus sextus, decimusnonus, &c. sunt cubi. Omnes vero qui proxime sequuntur numeros positos in locis sexto, duodecimo, decimooctauo, vigesimoquarto, & alijs, quę metitur senarius, quales sunt septimus, tertius decimus, decimusnonus, vigesimus quintus, &c. sunt cubi simul, & quadrati.

NAM primi ordinis numeri omnes semper vnum intermittunt post tertium ab vnitate: At secundi ordinis numeri omittunt semper duos numeros post quartum ab vnitate. Numeri denique tertij ordinis quinque semper interponunt post se ptimum ab vnitate, quemadmodum in theoremate proponit Euclides.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero post vnitatem sit quadratus, Et reli-

qui omnes quadrati erunt. At si qui post vnitatem, sit cubus; & reliqui omnes cubi erunt.

SINT ab vnitate continue proportionales numeri quotcunque A, B, C, D, E, F, sitque primum A, proximus

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

vnitati quadratus. Dico & reliquos omnes quadratos esse. Quod enim tertius ab vnitate, & omnes vnum intermittentes, quales sunt B, D, F, quadrati sint, [a] iam demonstratum est. Quod vero & reliqui intermedij C, & E, quadrati sint, ita perspicuum fiet. Cum tres continue propor

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

tionales sint A, B, C; sitque A, quadratus; erit & C, quadratus. Eodemque modo, assumptis tribus continue proportionalibus C, D, E, cũ C, sit quadratus; & E, quadratus erit. Omnes igitur A, B, C, D, E, F, quadrati sunt. Idẽ ostẽdemus, si plures numeri sint cõtinue proportionales.

SIT iam A, proximus vnitati cubus. Dico & reliquos cubos esse. Quod enim quartus ab vnitate, & omnes

Vnitas. A, 8. B, 64. C, 512. D, 4096. E, 32768. F, 262144.

duos intermittentes, cuiusmodi sunt C, & F, sint cubi; [d] iam est demonstratum. Quod autem & reliqui B, D, E, cubi sint, sic ostendemus. Cum sit vnitas ad A, vt A, ad B; æque metietur vnitas numerum A, & numerus A, numerum B. [e] Metitur autem vnitas numerũ A, per ipsum-met A Igitur, & A, ipsum B, per seipsum metietur; [f] Atque adeo cubus A, seipsum multiplicans numerum B, procreabit. [g] Quare B, cubus est. Quoniam vero quatuor continue proportionales sunt A, B, C, D, estque A, cubus, [h] & D, cubus erit. Eademq; ratione, assumptis quatuor

[a] 8. noni
[b] 22. octaui
[c] 22. octaui
[d] 8. noni
[e] 1. preni
[f] 9. pron.
[g] 3. noni
[h] 23. octaui

tuor deinceps proportionalibus B, C, D, E, cum B, cubus sit; [a] & E, cubus erit. Omnes igitur A, B, C, D, E, F, cubi sunt. Non secus demonstrabimus, omnes cubos esse, si plures continue proportionales fuerint. Quocirca, si ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

[a] 23. octaui

SCHOLIVM.

NON *demonstrauit Geometra, si numerus, qui post vnitatem, sit cubus simul & quadratus, & reliquos omnes esse cubos simul, & quadratos; quia perspicue hoc ipsum ex demonstratis colligitur. Nam si proximus vnitati sit cubus simul, & quadratus: qua parte est cubus, ea ratione omnes reliqui cubi erunt; qua vero parte est quadratus, ea ratione & reliqui omnes quadrati erunt, vt demonstratum est. Omnes igitur erunt cubi simul, & quadrati.*

VERVM *tota propositio facilius ita poterit demonstrari. Sit primum A, proximus vnitati, quadratus. Dico & omnes quadratos esse. Quoniam enim ex scholio propos. 10. lib. 8. A, seipsum multiplicans facit B; erit ex defin. B, quadratus. Item quia ex eodem scholio, A, multiplicans B, facit C, sunt.*

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

que A, B, quadrati; erit & C, quadratus, ex scholio propos. 2. huius lib. Rursus quia ex eodem scholio propos. 10. lib. 8. A, multiplicans C, facit D, suntq; A, C, quadrati; erit ex eodẽ scholio propos. 2. huius lib. & D, quadratus: Atque ita deinceps: cum ex illo scholio propos. 10. lib. A, multiplicans D, producat E; & multiplicans E, faciat F, &c.

SIT *deinde A, proximus vnitati, cubus. Dico & omnes esse cubos. Quia enim ex scholio propos. 10. lib. 8. cubus A, seip-*

Vnitas. A, 8. B, 64. C, 512. D, 4096. E, 32768. F, 262144.

sum multiplicans facit B; [b] erit & B, cubus. Item quia ex eodem scholio, A, multiplicans B, facit C, suntq; A, B, cubi; [c] erit & C, cubus. Rursus quia ex eodem scholio, A, multiplicans C, facit D, suntq; A, C, cubi; [d] erit quoque D, cubus. Atque ita de cæteris, cum ex eo scholio, A, multiplicans D, gignat E; & multiplicans E, procreet F, &c.

[b] 3. noni
[c] 4. noni
[d] 4. noni

10. THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero post vnitatem, non sit quadratus, neque alius vllus quadratus erit, præter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes omnes. At si, qui post vnitatem, non sit cubus, neque alius vllus cubus erit, præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes.

SINT ab vnitate quotcũq; numeri deinceps proportionales A,B,C,D,E,F,G,H,I,&c.& primum A, proximus vnitati nõ sit quadratus. Dico nec aliũ vllũ esse quadratũ, præter tertiũ ab vnitate, & vnũ intermittẽtes omnes, hoc est, pręter B,D,F,H.&c. Si enim pręter hos alius

Vnitas. A,2.B,4 C,8 D,16.E,32.F, 64. G, 128.H,256. I,512. K,1024. L,2048. M,4096.

est quadratus, sit quadratus E. [a] Cum ergo & D, sit quadratus; sitque vt D, ad E, vel E, ad F, ita A, ad B, & conuertendo vt E, ad D, vel F, ad E, ita B, ad A; habebit B, ad A, rationem, quam quadratus numerus E, ad quadratum numerum D, vel quadratus F, ad quadratum E: sed B, tertius ab vnitate est quadratus. [c] Igitur & A, primus ab vnitate quadratus erit. Quod est absurdum: ponitur enim A, non quadratus. Non ergo E, quadratus est. Eadem ratione ostendemus, nullum alium, præter dictos, quadratum esse.

[a] 8. noni
[b] 8. noni
[c] 24. octaui

SED iam A, proximus vnitati non sit cubus. Dico nec alium vllum esse cubum, pręter quartum ab vnitate, & duos

& duos intermittẽtes omnes, videlicet præter C, F, I &c. Nam si præter hos alius potest esse cubus, sit D, cubus. [a] Cũ ergo & F, cubus sit, sitque ex æquo vt D, ad F, ita A, ad C, (quod tres D, E, F, eandem habeant rationem, quã tres A, B, C,) & conuertendo vt F, ad D, ita C, ad A; habebit C, ad A, rationem, quam cubus F, ad cubum D: [b] Sed C, est cubus, cum sit quartus ab unitate. [c] Igitur & A, primus ab vnitate cubus erit. quod est contra hypothesim. Non igitur D, cubus est. Quod si E, credatur esse cubus; [d] cum & C, cubus sit, sitque ex æquo, vt C, cubus ad E, cubum, ita A, ad C, & conuertendo vt cubus E, ad cubum C, ita C, ad A; existente C, cubo, [e] erit, & A, cubus. quod non ponitur. Non ergo E, cubus est. Quemadmodum autem ostensum est duos D, & E, inter duos cubos C, & F, cubos non esse, ita quoque eadem ratione ostendemus neque G, & H, inter cubos F, & I, neque vllos alios duos, inter duos cubos, esse cubos. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri, &c. Quod demonstrandum erat.

[a] 8. noni.
[b] 8. noni
[c] 25. octaui
[d] 8. noni.
[e] 25. octaui

SCHOLIVM.

NON est autem necesse, si numerus, qui post vnitatem, non sit cubus simul, & quadratus, nullum alium esse cubum simul, & quadratum, præter septimum ab vnitate, & quinque intermittentes omnes; cum aliquando tertius ab unitate, aliquando vero quartus possit esse cubus simul, & quadratus, non existente primo ab vnitate cubo simul, & quadrato.

SIT enim primum A, qui post vnitatem, cubus quidem, non autem simul & quadratus.

Dico B, tertium esse cubum simul & quadratum; cubum quidem, [f] *quod primo existente cubo, omnes cubi sint,* [g] *quadratum vero, quod tertius sit ab unitate.*

Vnitas. B,8. B,64.

SIT deinde A, post vnitatem quadratus quidem, non autem simul & cubus. Dico quartum C, esse cubũ simul & quadratũ; [h] *Cubum quidem, quod quartus sit ab unitate; quadratum vero,*

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64.

[f] 9. noni.
[g] 8. noni
8. noni

[a] 9. noni

ro, [a] quod primo existente quadrato, omnes sint quadrati.

SIT postremo A, post vnitatem neque cubus, neque quadratus. Dico nullum alium esse cubum simul & quadratum, præter septimum F, & quinque intermittentes omnes. Cum

Vnitas. A,6. B,36. C,216. D,1296. E,7776. F,46656.

[b] 10. noni

enim primo non existente quadrato, [b] nullus alius quadratus sit, præter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes omnes, cuiusmodi sunt, vt in scholio propos. 8. huius lib. docuimus, tertius, quintus, septimus, nonus, vndecimus, decimustertius, decimusquintus, decimusseptimus, decimusnonus, &c. Primo autem non existente cubo, [c] nullus alius sit cubus, præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes, quales sunt, vt ex eodem scholio apparet, quartus, septimus, decimus, tertiusdecimus, decimusextus, decimusnonus, &c. perspicuum est, tantummodo septimum, tertiumdecimum, decimumnonum, qui quidem omnes quinque intermittunt, quadratos esse simul, & cubos, & sic de cæteris. Nam in hac loca sola incidunt quadratus, & cubus simul, vt liquido constat ei, qui recte propositionem hanc & octauam huius libri expenderit.

[c] 10. noni

12. THEOR. 11. PROPOS. 11.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; Minor maiorem metitur per aliquem eorum, qui in proportionalibus sunt numeris.

SINT ab vnitate quotcunque numeri continue proportionales A,B,C,D,E,F,G. Dico quemlibet minorem, vt C, quemlibet maiorem, vt G, metiri per aliquem

Vnitas. A,3. B,9. C,27. D,81. E,243. F,729. G,2187.

quem numerorum A,B,C,D,E,F,G. Cum enim sit ex æquo vt C, ad G, ita vnitas ad D; (quòd quinque numeri C, D, E, F, G, eandem habeant rationem continuam quam vnitas & quatuor numeri A, B, C, D,) [a] æque metietur vnitas numerum D, atque numerus C, numerum G; [b] Sed vnitas metitur numerum D, per ipsummet D. Igitur & C, numerus numerum G, per D, metietur. Eadem ratione metietur E, ipsum F, per A, quod sit vt E, ad F, ita vnitas ad A, &c. Sic quoque metietur A, ipsum G, per F, cum sit ex æquo vt A, ad G, ita vnitas ad F, &c. Atque ita de reliquis eodem modo. Si igitur ab vnitate quotcunq; numeri deinceps proportionales fuerint, &c. quod erat ostendendum.

[a] 10. defin. 5. prop.

[b] 5. prop.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem est ex his, quantum abest maior numerus a minore metiente, tantum distare ab vnitate eum numerum, per quem minor maiorem metitur; propterea quod eadem esse debet proportio minoris ad maiorem, quæ vnitatis ad eum, per quem metitur minor maiorem, vt

Vnitas. A,3. B,9. C,27. D,81. E,243. F,729. G,2187.

ex demonstratione apparet. Itaque B, metietur F, per D; Et C, metietur F, per G, nimirum per se ipsum; &c. quia tam inter B, & F, quàm inter vnitatem & D, tres numeri interponuntur: Et tam inter C, & F, quàm inter vnitatem & G, duo interiecti sunt numeri.

HINC rursus efficitur, quemlibet numerum, qui se ipsum multiplicet, producere numerum, qui in numeris proportionalibus tantum ab eo distat, quantum ipse ab vnitate: Si verò minor aliquis maiorem quempiam multiplicet, procreari numerum, qui tantum a maiore distat; quantum minor ab vnitate, propterea quod si numerus numerum metiens multiplicet eum, per quem metitur, [c] producatur ille, quem metitur. Ergo C, se ipsum multiplicans gignet F; cum F, tantum absit a C, quantum C, ab vnitate; ac propterea C, ipsum F, per C, metiatur, vt diximus. Sic quoque

[c] 9. prop.

que

que B, multiplicans D, faciet eundem F; quòd D, ipsum F, metiatur per B, &c. & sic de reliquis.

11. THEOR. 12. PROPOS. 12.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; quicunque primorum numerorum vltimũ metiuntur, ijdem & eum, qui vnitati proximus est, metientur.

SINT ab unitate deinceps proportionales quotcunque numeri A,B,C,D. Dico quoscunque primorum numerorum, qui metiuntur vltimum D, metiri quoque A, proximum unitati. Metiatur enim numerus primus E, ipsum D. Dico eundem E, primum metiri etiam numerum A, vnitati proximum. Si namque non metitur ipsum A; [a] erit E, cum primus sit, ad A, primus: hoc est, A,& E, inter se primi erunt, & A, seipsum multiplicãs facit B, vt ex scholio propos. præcedentis constat, [h] erit B, ad E, primus. Quia ergo A, & B, ad E, primi sunt; fit autem C, ex A, in B, per idem scholium præcedentis propos. [i] erit C, ad E, primus. Rursus eodem modo, quia A,& C, ad E, primi sunt; & fit D, ex A, in C, ex eodem scholio præcedentis propos. [k] erit D, ad E, primus. Non igitur E, ipsum D, metitur. Quod est contra hypothesim. Metitur ergo E, ipsum A. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod ostendendum erat.

Vnitas. A,10. B,100. C,1000. D,10000. E,5. H,20. G,200. F, 2000. Metiatur E, ipsum D, per F, [b] atque adeo E, multiplicans F, faciat D. Quia vero & A, ipsum D, metitur per C; ac proinde A, multiplicans C, facit D, vt in scholio præcedẽtis propos. ostendimus; producetur idem numerus D, ex A, primo in C, quartum, & ex E, secundo in F, tertium, [c] Quare erit vt A, primus ad E, secundum, ita F, tertius ad C, quartum. Cum ergo A,& E, sint inter se primi; [d] ac proinde in sua proportione minimi; [e] metietur æque A, ipsum F, & E, ipsum C. Metiatur E, ipsum C, per G, [f] atque adeo E, multiplicans G, faciat C. Quia vero & A, ex scholio eodem præcedentis propos. metitur C, per B, [g] atque adeo A, multiplicans B, facit C; procreabitur idem numerus C, ex A, primo in B, quartum, & ex E, secundo in G, tertium. [h] Erit igitur vt A, primus ad E, secundum, ita G, tertius

[a] 31. sept.
[b] 9. pron.
[c] 19. sept.
[d] 23. sept.
[e] 21. sept.
[f] 9. pron.
[g] 9. pron.
[h] 19. sept.

tertius ad B, quartum. Quapropter cum A,& E, sint inter se primi; [a] ac propterea in sua proportione minimi; [b] metietur æque A, ipsum G,& E, ipsum B. Metiatur E, ipsũ B, per H: [c] ita vt E, multiplicans H, faciat B. Metitur autem & A, ipsum B, per A, atque idcirco A, se ipsum multiplicans facit B, vt ex eodem scholio præcedentis propos. apparet. Gignitur ergo idem numerus B, ex E, primo in H, tertiũ,& ex A, medio in seipsum, [d] Quare erit vt E, primus ad A, secundum, ita A, secundus ad H, tertium. Cum ergo E,& A, inter se primi sint; [e] ac proinde in sua proportione minimi; [f] æque metietur E, ipsum A, & A, ipsum H. Quod est contra hypothesim. ponitur enim E, ipsum A, non metiri. Quare falsum est E, ipsum A, non metiri. Nam ex eo quod E, non dicatur metiri ipsum A, semper demonstrabitur E, ipsum A, metiri; Quod est absurdum. Metitur ergo E, ipsum A. Eodem argumento ostendemus quoscunque alios numeros primos ipsum D, metientes metiri quoque ipsum A; Eademque erit ratio si C, vel B, vltimus numerus statuatur.

ALITER. Metiatur E, numerus primus vltimum D. Dico & E, ipsum A, metiri. Si enim nõ metiatur; [g] erit E, ad A, primus. Quia igitur A,& E, inter se primi sunt, & A, seipsum multiplicãs facit B, vt ex scholio propos. præcedentis constat, [h] erit B, ad E, primus. Quia ergo A, & B, ad E, primi sunt; fit autem C, ex A, in B, per idem scholium præcedentis propos. [i] erit C, ad E, primus. Rursus eodem modo, quia A,& C, ad E, primi sunt; & fit D, ex A, in C, ex eodem scholio præcedentis propos. [k] erit D, ad E, primus. Non igitur E, ipsum D, metitur. Quod est contra hypothesim. Metitur ergo E, ipsum A. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod ostendendum erat.

Vnitas. A,6. B,36. C,216. D,1296. E, 3.

[a] 23. sept.
[b] 21. sept.
[c] 9. pron.
[d] 20. sept.
[e] 23. sept.
[f] 21. sept.
[g] 31. sept.
[h] 27. sept.
[i] 26. sept.
[k] 26. sept.

COROLLARIVM.

ITAQVE *neque vllus numerus primus, qui*

maior

maior sit eo, qui proximus est vnitati, neque vllus minor proximum unitati non metiens, metiri potest vltimum. Si namque metiretur vltimum, metiretur quoque vnitati proximum, vt demonstratum est. quod non ponitur.

SCHOLIVM.

EST autem admirabilis prima huius propositionis demonstratio. Nam in ea Euclides ex eo, quod E, dicatur non metiri ipsum A, ostendit demõstratione affirmatiua E, ipsum A, metiri: quod uidetur fieri non posse. Nam si quis demonstrare instituat, Socratem esse album, ex eo, quod non est albus, paradoxum aliquid, & inopinatum in medium videatur afferre: Cui tamen non absimile quid factum hic est in numeris ab Euclide, & in alijs nonnullis propositionibus, quæ sequũtur. Cardanus quoque simile quid effecit in magnitudinibus, lib. 5. de propor. propos. 201. gloriaturque se primum omnium hanc rationem demonstrandi reperisse: quod arbitror eum nõ dicturum fuisse, si diligentius uim huius demonstrationis expendisset, vel certe, si expendit, eam in memoriam reuocasset; quandoquidem ipso longe prior Euclides usus est hoc etiam demonstrãdi modo, vt ex hoc theoremate 12. est manifestum. Eodem genere demostrandi usus est Theodosius lib. 1. sphæricorum propos. 12, vt ibidem monuimus.

CAETERVM ex demonstratis perspicuum est, quemcunque numerum primum, qui vltimum metitur, metiri etiam omnes alios ante ipsum. [a] *Cum enim metiatur proximum vnitati; hic autem omnes subsequentes,* [b] *quod semper minor maiorem metiatur per aliquem eorum, qui in proportionalibus sunt numeris;* [c] *manifestum est, quod & ille omnes metiatur.*

[a] *12. noni*
[b] *11. noni*
[c] *11. pron.*

13. THEOR. 13. PROPOS. 13.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero post vnitatem, primus sit; Maximum nullus alius metietur, præter eos, qui sunt in numeris proportionalibus.

SINT ab vnitate continue proportionales quotcũque numeri A, B, C, D, quorum A, proximus vnitati sit primus. Dico nullum alium numerum, præter ipsos A, B, C, metiri maximum D. Si enim fieri potest, metiatur numerus alius E, diuersus ab A, B, C, ipsum D. Manifestum autem est, E, non esse numerum primum. Si enim primus sit, & metiatur extremum D; [a] metietur quoque ipsum A, vnitati proximum, qui primus ponitur. Quod est absurdum. Non igitur E, primus est, sed compositus; [b] atque adeo eum aliquis numerus primus metietur. quem dico alium esse non posse, præter primum A. Si enim alius primus quam A, metiatur E; cum E, metiatur extremum D; [c] metietur quoque ille alius primus eundem D, [d] atq; adeo & ipsum A. primum, nimirum vnitati proximum. Quod est absurdum. Ergo non alius primus, quam A, ipsum E, metitur. Metiatur iam E, ipsum D, per F. Dico F, diuersum esse ab A, B, C. Si enim F, sit idem, qui aliquis ipsorum A, B, C; & E, metiatur D, per F; metietur vtique E, ipsum D, per aliquem ipsorum A, B, C; [e] & vicissim aliquis ipsorum A, B, C, (nimirum is, per quem E, ipsum D, metitur,) metietur D, per E. [f] Cũ ergo quilibet ipsorũ A, B, C, metiatur D, per aliquẽ ipsorũ A, B, C; erit E, idẽ qui aliquis ipsorũ A, B, C, qđ est cõtra hypothesim. ponitur. n. E, nõ idẽ, qui aliquis ipsorũ A, B, C. Nõ igitur F, idem est, qui aliquis ipsorum A, B, C, sed diuersus. Quoniã vero E, metitur D, per F; [g] metietur vicissim F, ipsum D, per E. Non erit autem F, primus: si enim sit primus, & metiatur D, vltimum; [h] metietur & A, proximum vnitati, qui primus est. quod est absurdum. Igitur F, non primus est, sed compositus; [i] atque adeo cum aliquis

Vnitas. A, 5. B, 25. C, 125. D, 625.
E ---- H ---- G ---- F ----

[a] *12. noni*
[b] *33. sept.*
[c] *11. pron.*
[d] *12. noni*
[e] *8. pron.*
[f] *11. noni*
[g] *8. pron.*
[h] *12. noni*
[i] *23. sept.*

Vnitas. A,5. B,25. C,125. D,625.
E--- H--- G--- F---

aliquis numerus primus metietur, quem rursus dico nullum alium esse posse præter primum A. Si namque alius primus quã A, metiatur F; cum F, metiatur D, extremum; a metietur quoque ille alius primus eundem D; b atque adeo & ipsum A, proximum vnitati, qui primus est. quod est absurdum. Ergo non alius primus quam A, ipsum F, metitur. Iam vero quoniã E, metitur D, per F; c fiet D, ex E, in F. Fit autem & D, ex A, in C, vt in scholio propos. 11 huius lib docuimus Idem igitur numerus D, fit ex A, primo in C, quartum, & ex E, secundo in F, tertium; d Ac proinde erit vt A, primus ad E, secundum, ita F, tertius ad C, quartum: Metitur autem A, ipsum E, vt ostensum est Ergo & F, ipsum C, metietur. Metiatur per G. Quoniam igitur F, diuersus ab A, B, metitur C, vltimum (relinquimus enim iam numerum D,) per G; ostendemus similiter, G, diuersum esse ab A, B, & nõ primum, sed compositum, quẽ solus A, primus metiatur: quemadmodum id ostensum est de numero F, per quem E, diuersus ab A, B, C, metiebatur D, vltimum.

SI enim G, sit idem, qui aliquis ipsorum A, B; metiaturq; F, ipsum C, per G; metietur vtique F, ipsum C, per aliquem ipsorum A, B; e & vicissim aliquis ipsorum A, B (videlicet is, per quem F, ipsum C, metitur) metietur C, per F. Cum ergo quilibet ipsorum A, B, metiatur C, per aliquem ipsorum A, B; erit F, idem qui aliquis ipsorum A, B. quod est absurdum. ostensum est enim F, non esse eundem, quem aliquem ipsorum A, B. Non ergo G, est idem qui aliquis ipsorum A, B, sed diuersus. Quoniã autem F, metitur C, per G; f metietur uicissim G, ipsum C, per F. Non erit autem G, primus. Si enim primus sit, metiaturque vltimum C; metietur quoque numerum primum A, vnitati proximum. quod est absurdum. Non ergo G, primus est, sed compositus; ac proinde eum aliquis primus metietur. quem dico nullum alium posse esse præter A. Nam si alius primus quam A, metiatur G, cum G, metiatur C, vltimum; k metietur quoque ille alius

a 11. pron, b 12 noni
c 9. pron.
d 19. sept.
e 8. pron.
f 11. noni.
g 8. pron.
h 12. noni
i 33. sept.
k 11. pron.

alius primus eundem C; a atque adeo & ipsum A, vnitati proximum, qui primus est. quod est absurdum. Ergo non alius primus quam A, ipsum G, metitur. b Iam vero quia C, fit ex F, in G; quòd F, metiatur C, per G; Fit autem idem C, ex A, in B, vt docuimus in scholio propos. 11. huius lib. Fiet idem numerus C, ex A, primo in B, quartum, & ex F, secundo in G, tertium. c Quare erit vt A, primus ad F, secundum, ita G, tertius ad B, quartum. Metitur autem A, ipsum F, vt demonstratũ est. Igitur & G, ipsum B, metietur. metiatur per H. Quia ergo G, diuersus ab A, metitur B, vltimũ (relinquimus enim iam numeros C, & D,) per H; ostendemus similiter H, diuersum esse ab A; quemadmodum id ostensum est de numeris F, & G.

NAM si H, idem sit qui A; metiaturque G, ipsum B, per H; metietur vtique G, ipsum B, per A, d Et vicissim A, ipsum B, per G, metietur. Cum igitur metiatur A, ipsum B, per A, vt constat ex scholio propos. 11. huius lib. erit G, idem qui A. quod est absurdum. ostensum est enim G, non esse eundem, quem A. Non ergo H, idem est, qui A, sed diuersus. e Iam uero quia B, fit ex G, in H; quòd G, ipsum B, metiatur per H: Fit autem & idem B, ex A, in se, vt in scholio propos. 11. huius lib docuimus; Fiet idem numerus B, ex H, primo in G, tertiũ, & ex A, medio in se ipsum. f Quare erit vt H primus ad A, secundum, ita A, secundus ad G, tertium: At A, metitur ipsum G, vt est demonstratum. Igitur, & H, ipsum A, metietur, numerum primum. Quod est absurdum. Quare si A, primus est, maximum D, nullus alius numerus metitur, præter ipsos A, B, C. Ac proinde si ab vnitate quotcunq; numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

a 12. noni
b 9. pron.
c 19. sept.
d 8. pron.
e 9. pron.
f 20. sept.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

14.

SI minimum numerum primi numeri metiantur: Nullus alius numerus primus illum metietur, præter eos, qui a principio metiebantur.

N SIT

SIT numerus A, minimus, quem metiantur primi numeri B, C, D. Dico nullum alium primum præter ipsos B, C, D, metiri ipsum A. Metiatur enim, si fieri potest, primus numerus E, diuersus à B, C, D, ipsum A, per numerum F. Quia igitur E, metitur A, per F; [a] multiplicans E, ipsum F, facit A. [b] Quare singuli B, C, D, alterum ipsorũ E, F, metientur: non quidem ipsum E, primum, & ab ipsis diuersum: ergo ipsum F, qui minor est quam A. Quod est absurdum. Ponitur enim A, minimus, quem primi B, C, D, metiantur. Si igitur minimum numerum primi numeri metiantur, &c. Quod demonstrandum erat.

A.....
B.. C... D.....
E---- F------

a 9. pron.
b 32. sept.

SCHOLIVM

ADDIT hoc loco Campanus sequens theorema ad ea quæ sequuntur, non inutile. Videlicet.

SI quotcunque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem rationem habentium cum ipsis: Numerus aliquem eorum metiens, metietur quoq; alterum duorum numerorum, qui in eadem ratione sumuntur minimi, vel certe ad alterum erit compositus.

SINT quotcunque numeri continue proportionales A, B, C, D, E, in sua proportione minimi, in qua sumantur etiam duo minimi F, G: Metiatur autem primò H, primum eorum minimorum A. Dico H, metiri quoque vel F, vel G, vel certe ad alterum eorum compositum esse. Sit enim H, non primus, sed compositus: c *Et sumantur in eadem proportione tres numeri minimi I, K, L; & quatuor M, N, O, P; & sic deinceps, donec habeantur tot, vno minus, quot sunt ipsi A, B, C, D, E.*

c 2. ottani

Quoniam

Quoniam igitur, vt constat ex modo proxime creandi quotlibet minimos tradito in 2. propos. lib. 8. numerus A, A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81. M, 8. N, 12. O, 18. P, 27. I, 4. K, 6. L, 9. H---- F, 2. G, 3.

fit ex F, in M; metitur autem H, ipsum A; erit H, compositus, ex scholio propos. 32. lib. 7. ad F, vel ad M. Si ad F, habemus propositum; si vero ad M, qui quidem fit ex F, in I, vt cõstat ex demõstratione propos. 2. lib. 8. erit, ex scholio eiusdẽ propos. 32. li. 7. rursus H, cõpositus vel ad F, vel ad I. Si ad F, habetur propositum: si vero ad I; cum I, gignatur ex F, in se ipsum; erit H, compositus ad F, ex eodem scholio propos. 32. lib. 7. Quod si H, sit primus, ostendemus eodem modo, ex propos. 32. lib. 7. non autem ex scholio, eum metiri ipsum F.

DEINDE *metiatur H, non primus secundum B. Quia ergo B, fit ex F, in N; erit vt prius H, compositus vel ad F, vel ad N. Si ad F, habetur propositum; si vero ad N, qui quidem fit ex F, in K; erit H, eodem modo compositus vel ad F, vel ad K. Si ad F, habetur propositum; si vero ad K, cum K, gignatur ex F, in G; erit quoque H, compositus vel ad F, vel ad G. Quòd si H, sit primus, demonstrabimus eadem ratione eum metiri vel F, vel G, ex propos. 32. lib. 7.*

RVRSVS *metiatur H, non primus tertium C; qui cum fiat ex F, in O; erit H, compositus vel ad F, vel ad O. Si ad F, habetur propositum; si vero ad O, qui quidem fit ex F, in L; erit H, compositus vel ad F, vel ad L. Si ad F, habetur propositum; si vero ad L, cum L, gignatur ex G, in se; compositus quoque erit H, ad G. Quòd si H, sit primus, probabimus eodem modo ex propos. 32. lib. 7. eum metiri ipsum G.*

PRAETEREA *metiatur H, non primus quartum D; qui cum fiat ex F, in P; erit H, compositus vel ad F, vel ad P. Si ad F, habetur propositum; si vero ad P, qui quidem fit ex G, in L; erit etiam H, compositus vel ad G, vel ad L. Si ad G, habetur propositum; si vero ad L; cum L, producatur ex G, in se; erit quoque H, ad G, compositus. Quòd si H, primus sit, ostendemus eodem modo ex propos. 32. lib. 7. eum metiri ipsum G.*

EODEM *modo si H, non primus metiatur vltimum E, ostendemus H, compositum esse ad G; Si uero H, primus*

sit, eum metiri ipsum G; atque ita in cæteris eadem semper erit demonstratio.

ITAQVE si H, metiatur primum numerum A, metietur idem ipsum F, vel ad eum compositus erit: Si verò H, metiatur vltimum E, metietur idem ipsum G, vel ad eum compositus erit: Si deniq; H, metiatur aliquem, præter primum & vltimum, metietur idem vel ipsum F, vel ipsum G, aut ad alterutrum erit compositus. Id quod perspicuum est ex ipsa demonstratione.

DEMONSTRATIO IN NVMERIS eorum, quæ in lineis secundo libro Euclides demonstrauit prioribus 10. theorematibus.

QVONIAM ad theorema sequens demonstrandum Theon quædam assumit in numeris, quæ demonstrata sunt de lineis libro secundo, perinde ac si eadem de numeris essent ostensa; non alienum instituto nostro duximus, nonnulla ex ijs, quæ Geometrice ab Euclide libro 2. demonstrata sunt de lineis, hoc loco de numeris demonstrare. Quod idē & Barlaam monachum fecisse a nonnullis est traditum. Sequemur autem eundem ordinem, quem Euclidem in secundo libro tenuisse conspicimus.

I.

SI fuerint duo numeri, seceturque ipsorum alter in quotcunque partes: Numerus planus comprehensus sub illis duobus numeris æqualis est numeris, qui sub numero indiuiso, & qualibet parte numeri diuisi continentur.

SINT duo numeri A B, & C, quorum A B, diuidatur in A D, D E, E B; Fiatque F, ex C, in A B: Item G H, ex C, in A D; & H I, ex C, in D E; & I K, ex C, in E B. Dico

Dico F, æqualem esse numeris G H, H I, I K, hoc est, toti numero G K, ex GH, HI, IK, composito.

A ... D .. E . B C ..
F .....
G ..... H .... I .. K

Quoniam enim C, multiplicans AB, fecit F; metietur A B, ipsum F, per C, hoc est, [a] 2. pron.
A B, pars erit ipsius F, denominata à C. Eadē ratione A D, ipsius G H; & D E, ipsius H I; & E B, ipsius I K, pars erit à C, denominata, eadem nimirum, qua A B, ipsius F. Quia vero per ea, quæ ad propos. 5. lib. 7. demonstrauimus, totus A B, totius G K, eadem pars est, quæ A D, ipsius G H; erit quoque A B, totus totius G K, pars eadem, quæ A B, ipsius F; [b] Ac proinde inter se æquales erunt F, & G K. [b] 4. pron.
Quod est propositum.

II.

SI numerus in duas partes diuidatur: Numeri plani sub toto, & singulis partibus comprehensi æquales sunt numero quadrato, qui a toto efficitur.

NVMERVS enim A B, diuidatur in A C, C B. Dico numeros, qui fiunt ex A B, toto in partes A C, C B, simul æquales esse numero quadrato, qui ex toto A B, efficitur. Sumpto enim numero D, qui æqualis sit ipsi A B; erit per theor. 1. numerus factus ex D, hoc est, ex A B, in A B, nimirum quadratus ipsius A B, æqualis numeris, qui fiunt ex D, hoc est, ex A B, in A C, & in C B. quod est propositum.

D ..... E .....
A ... C .. B

IDEM demonstrabitur, si A B, in plures partes, quam in duas secetur, vt ex apposita secunda figura apparere potest. Eadem enim ratione erit numerus factus ex E, hoc est, ex A B, in A B, nimirum quadratus ipsius A B, æqualis numeris, qui gignuntur ex E, hoc est, ex A B, in singulas partes A C, C D, D B.

E .....
A ... C .. D. B

III.

SI numerus in duas partes diuidatur: Numerus planus sub toto, & vna parte comprehensus æqualis est & illi, qui sub partibus continetur, numero, & illi, qui a prædicta parte efficitur, quadrato.

SIT numerus AB, diuisus in AC, CB. Dico numerum, qui fit ex toto AB, in partem AC, æqualem esse & ei, qui sub partibus AC, CB, continetur, & quadrato dictæ partis AC. Sumpto enim numero D, qui dictæ parti AC, æqualis sit; erit ex 1. theorem. numerus factus ex D, hoc est, ex, AC, in AB; vel (quod idem est) ex AB, in AC, æqualis numeris factis ex D, hoc est, ex AC, in CB, & ex D, hoc est, ex AC, in AC, quadrato scilicet ipsius AC. Quod est propositum.

D . . . .
A . . . . C . . . . . B

IIII.

SI numerus in duas partes diuidatur: Quadratus ex toto factus æqualis est quadratis, qui a partibus efficiuntur, vna cum numero plano, qui bis sub partibus continetur.

SIT numerus AB, diuisus in AC, CB. Dico numerum quadratum ex AB, factum æqualem esse quadratis partium AC, CB, vna cum numero, qui fit bis ex parte AC, in partem CB. Nam ex 2. theorem. numerus quadratus ipsius AB, æqualis est numeris, qui fiunt ex AB, in AC, & in CB. Est autem numerus, qui fit ex AB, in AC, per 3. theorema, æqualis numero geneto ex AC, in CB, vna cum quadrato ipsius AC: Item numerus, qui fit ex AB, in CB, eodem modo æqualis numero producto ex AC, in CB, vna cum quadrato ipsius CB. Igitur numerus quadratus ex AB, factus æqualis est quoque numeris quadratis partium AC, CB, vna cum numero bis, qui fit ex AC, in CB. Quod est propositum.

A . . . . . C . . . . B

V.

SI numerus secetur in duas partes æquales, & non æquales: Numerus planus sub partibus inæqualibus contentus, vna cum numero quadrato numeri inter duas sectiones medij, æqualis est quadrato, qui ex dimidio numero gignitur.

NVMERVS, n. AB, secetur in partes æquales AC, CB; & non æquales AD, DB. Dico numerum sub partibus inæqualibus AD, DB, contentum, vna cum quadrato numeri intermedij CD, (qui quidem excessus est inter semissem AC, vel CB, & alterutram partium inæqualium AD, DB.) esse æqualem quadrato, qui ex dimidio numero CB, efficitur. Nam cum numerus quadratus ipsius CB, per 4. theorema, æqualis sit quadratis partium CD, DB, vnà cum plano numero bis cõprehenso sub CD, DB; numero vero comprehenso semel sub CD, DB, vna cũ quadrato ipsius DB, æqualis sit, per 3. theorema, numerus factus ex CB, in DB; fit, vt si hic numerus factus ex CB, in DB, sumatur pro quadrato ipsius DB, vna cum numero facto ex CD, in DB; numerus quadratus ipsius CB, æqualis etiam sit reliquo quadrato ipsius CD, vna cum reliquo numero facto ex CD, in DB, semel, & numero ex CB; hoc est, ex AC, in DB, producto. Atqui ex 1. theorem. numeris, qui fiunt ex CD, in DB, & ex AC, in DB, æqualis est numerus, qui fit ex toto AD, in DB. Igitur quadratus ipsius CB, æqualis erit quadrato ipsius CD, vna cum numero qui fit ex AD, in DB; hoc est, numerus factus ex AD, in DB, vna

A . . . . . C . . . D . . B

cum quadrato ipsius C D, æqualis erit quadrato ipsius C B. Quod est propositum.

VI.

SI numerus in duas partes æquales diuidatur, & illi aliquis alius numerus adijciatur: Numerus qui fit ex toto cum adiecto in adiectum, vna cum quadrato dimidij numeri, æqualis est quadrato eius numeri, qui ex dimidio & adiecto componitur.

NVMERVS enim AB, secetur in partes æquales AC, C B, eique adijciatur numerus B D. Dico numerum factum ex toto AB, & adiecto B D, tanquam vno, nimirum ex A D, in adiectum B D, vna cum quadrato dimidij numeri CB, æqualem esse quadrato, qui fit ex CB, dimidio & adiecto B D, tanquam vno, hoc est, quadrato ipsius C D. Cum enim quadratus ipsius CD, per 4. theorema, æqualis sit quadratis partium C B, B D, vna cum numero bis comprehenso sub CB, B D, hoc est, quadratis partium C B, BD, vna cum numeris sub C B, B D, & sub A C, B D, comprehensis; numeris autem contentis sub C B, B D, & sub AC, BD, & sub B D, B D, hoc est, quadrato ipsius BD, æqualis sit. ex 1 theorem. numerus factus ex A D, in BD; fit, vt si hic numerus factus ex A D, in B D, sumatur pro quadrato partis B D, vna cum numeris factis ex C B, in B D, & ex AC, in BD, quadratus ipsius C D, æqualis etiam sit reliquo quadrato ipsius CB, vna cum numero facto ex A D, in B D; hoc est, numerus factus ex A D, in B D, vna cum quadrato ipsius C B, æqualis sit quadrato ipsius G D. quod est propositum.

A . . . . C . . . . B . . D

VII.

SI numerus in duas partes diuidatur: Quadratus totius, una cum quadrato unius partis, æqualis est numero, qui fit bis ex toto in dictam partem, una cum quadrato reliquæ partis.

DIVIDATVR numerus A B, in partes A C, C B. Dico quadratum totius A B, vna cum quadrato partis C B, æqualem esse numero bis, qui fit ex toto A B, in dictam partẽ CB, vna cum quadrato reliquæ partis A C.

Cum enim, ex 4. theorem. quadratus totius A B, æqualis sit quadratis partium AC, CB, vna cum numero, qui fit bis ex AC, in CB; si quadratus ipsius CB, addatur communis; erunt quadrati numerorum AB, CB, simul, æquales quadratis numerorum AC, C B, C B, vna cum numero qui fit bis ex A C, in CB. Atqui ei, qui fit ex AC, in CB, vna cum quadrato ipsius CB, æqualis est, per 3. theorema, numerus qui fit ex A B, in CB; Ac proinde ei, qui fit bis ex AC, in CB, vna cum quadrato ipsius CB, bis, æqualis est, qui fit bis ex AB, in CB. Igitur si pro numero, qui fit bis ex AC, in CB, vna cum quadrato ipsius CB, bis, sumatur numerus factus bis ex AB, in C B; erunt quadrati numerorum A B, CB, simul, æquales numero, qui fit bis ex A B, in C E, vna cum quadrato reliquæ partis AC. Quod est propositum.

A . . . C . . . B . . . D

VIII.

SI numerus in duas partes diuidatur: Qui fit quater ex toto in unam partem, una cum quadrato reliquæ partis, æqualis est quadrato numeri compositi ex toto & ptiori parte.

SECETVR numerus A B, in partes A C, CB. Dico numerum, qui fit quater ex toto A B, in partem C B, vna cum quadrato reliquæ partis AC, æqualem esse quadrato numeri qui ex toto AB, & prædicta parte CB, componitur. Addito enim numero B D, qui æqualis sit di-

A . . . . C . . . B . . . D

ctæ parti C B; cum quadratis totius A D, compositi ex A B, & B D, siue dictæ parte C B, sit æqualis per 4. theorema, quadratis numerorum A B, B D, vna cum numero qui fit bis ex A B, in B D, hoc est, quadratis numerorum A B, C B vna cum eo, qui fit bis ex A B, in C B; Sint autem, ex 7. theorem. quadrati numerorum A B, C B, simul æquales numero bis comprehenso sub A B, C B, vna cum quadrato numeri A C; fit, vt pro quadratis numerorum A B, C B, sumatur numerus factus bis ex A B, in C B, vna cũ quadrato ipsius A C, quadratus factus ex A D, æqualis sit numero, qui fit quater ex A B, in C B, una cum quadrato reliquæ partis A C. Quod est propositum.

IX.

Si numerus secetur in duas partes æquales, & non æquales: Quadrati qui ab inæqualibus partibus fiunt, dupli sunt quadratorum, qui a dimidio numero, & ab intermedio efficiuntur.

DIVISVS sit numerus AB, in partes æquales A C, CB, & non æquales AD, DB. Dico quadratos partium inæqualium A D, D B, duplos esse quadratorum, qui ex A C, dimidio, & ex C D, numero intermedio (qui quidem excessus est inter semissem AC, vel C B, & alterutram partium inæqualium AD, DB.) efficiuntur. Cum enim quadratus numeri A D, æqualis sit, ex 4. theorem. quadratis numerorum A C, CD, vna cum numero bis, qui fit ex AC, in CD; Si communis apponatur quadratus partis DB; erunt quadrati partium AD, DB, æquales quadratis partium AC, CD, DB, vna cum numero bis, qui fit ex AC, hoc est, ex CB, in CD. Atqui quadrato ipsius DB, vna cum numero bis, qui fit ex CB, in CD, æquales sunt ex 7. theor. quadrati, qui fiunt ex CB, hoc est, ex AC, & CD. Igitur, si pro quadrato ipsius D B, vnà cum eo, qui fit bis ex CB, in CD, sumantur quadrati ipsorum AC, CD, erunt

A . . . . C . . . . D . . B

quadrati partium A D, D B, æquales quadratis partium AC, CD, bis; Ac propterea quadrati partium A D, DB, dupli erunt quadratorum, qui ex partibus A C, C D, fiunt. Quod est propositum.

X.

SI numerus in duas partes æquales diuidatur, adijciatur autem illi alius quispiam numerus: Quadratus compositi numeri ex toto & adiecto, & quadratus numeri adiecti, simul dupli sunt eius quadrati, qui ex dimidio efficitur, & eius, qui fit a numero composito ex dimidio, & adiecto.

SIT numerus AB, diuisus in partes duas æquales AC, CB, eique adijciatur numerus BD. Dico quadratum numeri AD, compositi ex toto AB, & adiecto B D, & quadratũ adiecti numeri B D, vtrosque simul, duplos esse quadratorum, qui fiunt ex A C, dimidio, & ex C D, compositio ex CB, dimidio, & adiecto BD. Cum enim quadratus ipsius A D, æqualis sit, ex 4. theorem. quadratis partium AC, CD, vna cum numero bis, qui fit ex AC, hoc est, ex CB, in CD; si communis addatur quadratus partis BD; erunt quadrati numerorum A D, B D, æquales quadratis partium AC, CD, BD, vna cum numero bis, qui fit ex CB, in CD. Sed per 7. theorem. quadrato ipsius BD, vna cum numero bis qui fit ex CB, in CD, æquales sunt quadrati numerorũ CB, CD; & quadrato ipsius C B, æqualis est quadratus ipsius AC. Igitur si pro quadrato ipsius B D, vna cum numero, qui fit bis ex C B, in C D, sumantur quadrati numerorum CB, C D, hoc est, numerorum A C, C D: erunt quadrati numerorum A D, B D, æquales quadratis numerorum AC, C D, bis; Ac propterea quadrati numerorum AD, BD, dupli erunt quadratorum, qui ex A C, C D, efficiuntur. Quod est propositum.

IAM

IAM vero theorema 11. lib. 2. non posse numeris accommodari, hoc est, nullo modo fieri posse, vt numerus aliquis in duas partes diuidatur, ita vt numerus planus, qui ex toto in vnam partium fit, æqualis sit quadrato reliquæ partis, vt ibi monuimus, ita demonstrabimus.

DIVIDATVR, si fieri potest, numerus AB, in C, ita vt numerus factus ex toto AB, in partem CB, æqualis sit quadrato reliquæ partis AC. Quia igitur numerus contentus sub extremis AB, CB, æqualis est quadrato numeri medij AC;

A D E C B

a 20. sept. a erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB: Est autem AB, maior quam AC. Igitur & AC, maior est quam CB. Ablato iam CD, qui ipsi CB, sit æqualis, erit quoque vt AB, ad AC, ita AC, ad CD. Quoniam ergo totus AB, ad totum AC, est vt AC, ex toto AB, detractus ad CD, ex toto AC, detractum; b erit quoque vt totus AB, ad totum AC, vel vt detractus AC, ad detractum CD, ita CB, ex AB, residuus, hoc est, CD, ipsi CB, æqualis, ad AD, ex AC, residuum. Quia igitur est vt AC, ad CD, ita CD, ad AD; & est AC, maior quam CD; erit quoque CD, maior quam AD. Ablato ergo DE, qui ipsi AD, sit æqualis; erit etiam vt AC, ad CD, ita CD, ad DE. Itaque quia est, vt totus AC, ad totum CD, ita CD, ex toto AC, detractus ad DE, ex toto CD, detractum; c erit quoque vt totus AC, ad totum CD, vel vt detractus CD, ad detractum DE, ita AD, ex AC, residuus, hoc est, DE, ipsi AD, æqualis, ad EC, ex CD, residuum. Quare cum sit vt CD, ad DE, ita DE, ad EC; sit autem CD, maior, quam DE; erit etiam DE, maior, quam EC; Ac proinde ex ED, auferri poterit numerus ipsi EC, æqualis; & sic deinceps, nec unquam finis erit huius detractionis. Quod est absurdum: cum numerus non possit diuidi in infinitum. Non ergo numerus AB, diuidetur ita, vt planus numerus ex toto in vnam partiũ factus, æqualis sit quadrato reliquæ partis. Quod est propositum.

b 11. sept.

c 11. sept.

ALITER. Quoniam numerus AB, in C, ita diuisus est, vt is qui fit ex AB, in CB, æqualis sit quadrato reliquæ partis AC; erit numerus, qui quater fit ex AB, in CB, quadruplus quadrati ipsius AC; Ac proinde numerus, qui

qui fit quater ex AB, in CB, vna cum quadrato ipsius AC, quintuplus erit quadrati partis AC. Est autem numerus contentus quater sub AB, CB, vna cum quadrato ipsius AC, quadratus; quippe cum æqualis sit quadrato numero, qui fit ex numero composito ex AB, & CB, per 8. theorema. Igitur duo numeri quadrati (nimirum is, qui quater continetur sub AB, CB, vna cum quadrato ex AC; & quadratus ex AC,) proportionem habent, quam 5. ad 1. vel 25. ad 5. Quod est absurdum, vt constat ex coroll. propos. 24. lib. 8. Non ergo numerus AB, diuiditur ita in C, vt is qui producitur ex AB, in CB, æqualis sit quadrato ipsius AC. Quod est propositum.

A C B

VERVM hoc idem clarius demonstrabimus ad propos. 29. huius lib.

THEOR. 15. PROPOS. 15. 16.

SI tres numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem cum ipsis rationem habẽtium; Duo quilibet compositi, ad reliquum primi erũt.

SINT tres numeri A, B, C, minimi omnium eandem cum illis proportionem habẽtium. Dico quoslibet duos compositos, ad reliquum primos esse, nimirũ A, B, simul ad C; & B, C, simul ad A; & A, C, simul ad B. Sumptis enim duobus D, E, in eadem cum illis proportione minimis, ex scholio propos. 35. lib. 7. manifestũ est ex demonstratione propos. 2. lib. 8. D, seipsũ multiplicantẽ facere A; multiplicantẽ vero ipsum E, facere B; atq; E, seipsum multiplicantẽ facere C. a Quia igitur D, E, minimi in sua proportione inter se primi sunt; b erit & vterq; D, E, simul ad quẽlibet illorũ primus. Itaq; cũ tã cõpositus ex D, E,

A 9 B 12. C 16. D 3. E 4.

a 24. sept.
b 30. sept.

D,E, quam ipse D, ad E, primus sit; [a] erit quoq; numerus factus ex D,E, tanquam vno, in D, ad eundem E, primus: Qui autem fit ex D,E, tanquam vno, in D, æqualis est per 3. theorema scholij præcedētis, & numero A, facto ex D, in se, & numero B, facto ex D, in E. Igitur & A, B, compositi, primi sunt ad E; [b] Ac proinde & ad C, qui factus est ex E, in se, primi sunt A, B, simul compositi.

[a] 26. sept.

[b] 27. sept.

DEINDE quia, vt prius, [c] vterque D, E, simul primus est ad quemlibet ipsorū D, E; efficitur, (cum tam cō positus ex D, E, quam ipse E, primus sit ad D,) a numerum factum ex D, E, tanquam vno, in E, primum esse ad D: Qui autem fit ex D, E, tanquam vno, in E, æqualis est per 3. theorem. scholij antecedētis, & numero C, factus ex E, in se, & numero B, facto ex D, in E. Igitur & B, C, simul cōpositi, ad D, primi sunt, [d] atq; adeo & ad ipsum A, qui factus est ex D, in se, primi sunt B, & C, simul compositi.

[c] 30. sept.

[a] 26. sept.

B, 12. C, 16. A, 9. D, 3. E, 4.

[d] 27. sept.

POSTREMO quia, vt prius, [e] vterque D, & E, simul ad quemlibet ipsorum primus est; atq; adeo è contrario quilibet ipsorū D, E, primus est ad compositum ex D, E, [f] erit quoq; qui fit ex D, in E, ad compositū ex D, E, primus; [g] Ac proinde & idem qui fit ex D, in E, ad eū qui fit ex D, E, tanquā vno, in se, primus erit. Qui autem fit ex D, E, tanquam vno, in se, æqualis est, per 4. theorem. antecedētis scholij, eis qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, vna cum eo qui fit ex D, in E, bis. Igitur & factus ex D, in E, primus erit ad eos, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, & ex D, in E, bis.

[e] 30. sept.

[f] 26. sept.

[g] 27. sept.

A, 9. C, 16. B, 12 D, 3. E, 4.

Quoniā ergo duo numeri simul, videlicet compositus ex ijs, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, & ex eo, qui fit ex D, in E, primi sunt ad aliquē ipsorū, [h] erunt etiam duo illi, nimirum compositus ex ijs, qui fiūt ex D, & E, in se ipsos, & ex eo, qui fit ex D, in E, atque is, qui fit ex D, in E, inter se primi. Rursus quia duo numeri simul, videlicet compositus ex ijs, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, atque is, qui fit ex D, in E, ad aliquem ipsorum, nimirum ad eū qui fit ex D, in E, primi sunt, vt ostēsum est; [i] erunt etiam duo illi, nimirum compositus ex ijs, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, atque is, qui fit ex D, in E, inter se primi. Cum igitur ex D, & E, in se ipsos fiant A, & C; Item ex D, in E, fiat B; erunt A, & C, simul compositi, primi ad B. Quam ob rem, si tres numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat ostendendum.

[h] 30. sept.

[i] 30. sept.

SCHOLIVM.

CAMPANVS hoc theorema aliter, & quidem facilius demonstrat de quotcunque numeris continue proportionalibus minimis, hoc modo ipsum proponens.

SI quotcunque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandē cum ipsis rationem habentium: Ad quemlibet eorū reliqui omnes simul compositi, erunt primi.

SINT continue proportionales minimi quotcunque numeri A, B, C, D. Dico ad quemlibet eorum reliquos omnes simul compositos, esse primos; Videlicet A, B, C, simul ad D; & A, B, D, simul ad C; & A, C, D, simul ad B; & B, C, D, simul ad A. Si enim A, B, C, simul non sunt primi ad D, erunt A, B, C, simul, atque D, compositi inter se; atque adeo eos aliquis numerus communis mensura metietur. Metiatur eos numerus E, si fieri potest; sumāturq; F, & G, duo minimi in ratione A, B, C, D, numerorum. Quoniam ergo A, B, C, D, continue proportionales sunt, & minimi; metitur autē E, aliquē eorū, nimirū D metietur quoq; E, alterum ipsorum F, G, vel certe compositus erit ad alterum ipsorum F, G, ex scholio propos. 14. huius libri. Atque idcirco ipsum E, & alterū ipsorum F, G, aliquis numerus metietur: Metiatur eos H. Itaque cum H, metiatur E, & E,

A, 8. B, 12. C, 18. D 27.
E --- F, 2. G, 3. H ---

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27. E ---- F, 2. G, 3. H, ----

& E, ponatur metiri compositum ex A, B, C, & ipsum D; [a] metietur quoque H, eundem compositum ex A, B, C, & ipsum D. Quia vero H, metitur quoque alterum ipsorum F, G; & tam F, quam G, medios numeros E, C, metitur ex corell. 3. propos. 2. lib. 8. [b] metietur quoque H, medios B, G; [c] ac propterea & compositum ex B, C. Itaque cum H, metiatur totum compositum ex A, B, C, & detractum compositum ex B, C, vt demonstrauimus; [d] metietur quoque idem H, reliquum A: Metiebatur autem & ipsum D. Sunt ergo A, D, extremi minimorum A, B, C, D, inter se compositi. [e] Sed & primi inter se sunt. Quod fieri non potest. Non igitur compositi inter se sunt compositus ex A, B, C, & numerus D. Ergo inter se primi.

a 11. pron.
b 11. pron.
c 19. prop.
d 12. pron.
e 3. octaui

RVRSVS, si A, B, D, simul compositi non sunt primis ad C; metietur eos, vt prius, aliquis numerus, Metiatur eos E, qui rursum ex scholio propos. 14 huius lib. vel metietur alterum ipsorum F, G, vel compositus erit ad alterum ipsorum F, G. Metiatur ergo H, ipsum E, & alterum ipsorum F, G. Itaque cum H, metiatur E; & E, compositum ex A, B, D; [f] metietur etiam H, eundem compositum ex A, B, D. Quia vero H, metitur alterum ipsorum F, G, qui metiuntur, per corell. 3. propos. 2. lib. 8. medios B, C, [g] metietur quoque H, ipsos B, C. Itaque cum H, metiatur totum compositum ex A, B, D, & detractum B, [h] metietur quoque H, compositum ex A, D, reliquum. Et quia H, metitur alterum ipsorum F, G, quorum F, ipsum A, & G, ipsum D, metitur, vt constat ex demonstratione propos. 2. lib. 8. [i] metietur etiam H, alterum ipsorum A, D. [k] Igitur & reliquum. Sunt ergo A, D, extremi inter se compositi, [l] Sed & primi inter se sunt, Quod fieri non potest. Non igitur A, B, D, simul compositi, ad C, compositi sunt. Ergo primi. Quod est propositum.

f 11. pron.
g 11. pron.
h 12. pron.
i 11. pron.
k 12. pron.
l 3. octaui

NON aliter ostendemus & A, C, D, compositos, esse ad E, primos; nec non, & B, C, D, simul ad A. Eademque ratio est de quotlibet numeris continuè proportionalibus.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

SI duo numeri, primi inter se fuerint: Non erit vt primus ad secundum, ita secundus ad alium quempiam.

SINT primi inter se A, & B. Dico non esse vt A, ad B, ita B, ad alium numerum. Si enim fieri potest, sit vt A, ad B, ita B, ad alium, nimirum ad C.

Quoniam igitur A, & B primi sunt inter se, [a] atque adeo in sua proportione minimi; [b] ipsi æque metientur numeros B, & C, in eadem ratione existentes, nimirum A, ipsum B, & B, ipsum C: Metitur autem & A, se ipsum. Igitur A, metitur ipsos A B primos inter se. Quod est absurdum. Non ergo est vt A, ad B, ita B, ad alium numerum C. Eademque ratione non erit, vt B, ad A, ita A, ad alium Quare si duo numeri, primi inter se fuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

A .....
B .....
C ---------

a 23. sept.
b 21. sept.

THEOR. 17. PROPOS. 17. 18.

SI fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi autem ipsorum primi inter se sint: Non erit vt primus ad secundum, ita vltimus ad alium quempiam.

SINT continue proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, quorum extremi A, D, inter se primi sint. Dico non esse, vt A, ad B, ita D, ad alium numerum. Si enim fieri potest, sit vt A, ad B, ita D, ad alium, videlicet ad E. Erit igitur permutando vt A, ad D, ita B, ad E: Sunt autem A, D, cum sint inter se primi, [c] minimi in sua proportione, [d] Igitur æque metientur ipsos B, & E; nimirum A, ipsum

A 8. B 12. C 18. D 27. E ----

c 23. sept.
d 21. sept.

ipsum B,& D,ipsum E. At
A,8. B,12. C,18. D,27 E--- qui est vt A, ad B,ita B,ad C: Ergo cum A,metiatur
[a] 11.pron. ipsum B ; & B, ipsum C, metietur ; [a] atque ob id & A, ipsum C, metietur. Et quia est vt B, ad C, ita C, ad D ; metitur autem B, ipsum C ; metietur & C, ipsum
[b] 11.pron. D. Quare A, metiens ipsum C, [b] metietur quoque ipsum D. Metitur vero & A, se ipsum. Igitur A, metitur ipsos A, D, inter se primos. Quod est absurdum. Non ergo est vt A,ad B,ita D,ad alium numerum E Eodem quoque argumento non erit vt D, ad C, ita A, ad alium. Quocirca si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales,&c. Quod erat ostendendum.

19. PROBL. 1. PROPOS. 18.

DVOBVS numeris datis, considerare,an possit ipsis tertius proportionalis inueniri.

DATI duo numeri sint A,& B,oporteatque considerare, an inueniri possit tertius ipsis proportionalis, hoc est, an sit B, ad alium quempiam
A,4, B,7. numerum,vt A,ad B. Aut igitur A,B, primi inter se sunt, aut non. Si sunt
[c] 16. noni inter se primi [c] perspicuum est ex demonstratis, non posse ipsis reperiri tertium proportionalem. Si vero non sunt A,& B,inter se primi; multiplicans B, se ipsum faciat C. Aut igitur A, metitur ipsum C, aut non. Metiatur primum A,ipsum C,per
A,4. B,6. D,9. C,36. D. Dico ipsis A, B, inueniri posse tertium proportionalem,immo ipsum D,esse tertium proportionalem. Cum
[d] 9 pron. enim A,metiatur C,per D, [d] fiet C, ex A, in D: Fit autem ex constructione, idem C, ex B,in se ipsum. Igitur, qui continetur sub extremis A, D, æqualis est ei, qui ex me-
[e] 20. sept. dio B,describitur; [e] Ac proinde erit vt A,ad B, ita B,ad D. Quare D, inuentus est tertius proportionalis ipsis A, B,

SED

SED non metiatur A,ipsum C.Dico ipsis A, B, nó posse reperiri tertium proportionalem.Si enim inueniri potest,inuentus sit D,ita vt
sit A, ad B, quemadmodum A,6. B,4. D--- C,16. B,ad D Quoniam igitur est,
vt A, ad B,ita B,ad D; [a] erit numerus contentus sub ex- [a] 20. sept.
tremis A,D, æqualis ei, qui fit ex B, medio in se ipsum, hoc est,ipsi C.Quare cum C, fiat ex A, in D; [b] metietur [b] 7. pron.
A,ipsum C, per D:sed & non metiri ponitur. Quod est absurdum. Non igitur inueniri potest ipsis A, B, tertius proportionalis, quando A,primus non metitur C, productum ex B,secundo in se ipsum.Eadem via considerabimus,an ipsis B,& A,inueniri possit alius tertius numerus,ad quem ita sit A,vt B, ad A. Duobus ergo numeris datis considerauimus,&c. Quod faciendum erat.

PROBL. 2. PROPOS. 19. 20.

TRIBVS numeris datis,considerare,an possit ipsis quartus proportionalis inueniri.

SINT dati tres numeri A,B, C, siue deinceps proportionales,siue non; oporteatque considerare, an possit reperiri quartus ipsis proportionalis, hoc est,an sit C, ad aliquem alium nu
merum, vt A, ad B. A,8. B,12. C,18. E,27. D,216. Multiplicans B, ipA,4. B,8. C,9. E,18. D,72. sum C,faciat D.Aut
igitur A,ipsum D, metitur, aut non. Metiatur primum A,ipsum D,per E. Dico ipsis A,B,C, inueniri posse quartum proportionalem,immo ipsum E, esse quartum proportionalem. Cum enim A, metiatur D, per E; [c] fiet [c] 9.pron.
D, ex A, in E: Fit autem idem D, ex B, in C, per constructionem. Igitur qui sub extremis A, E, continetur, æqualis est ei, qui sub B, C, secundo, & tertio cõtinetur; [d] Ac propterea erit vt A,ad B, ita C,ad E. [d] 19. sept.
Quare inuẽtus est E, ipsis A,B,C, quartus ꝓportionalis.

SED iam non metiatur A, ipsum D. Dico ipsis A, B, C, non posse inueniri quartum proportionalẽ. Sit enim, si fieri potest, inuentus quartus proportionalis E; ita vt sit quemadmodum A, ad

A, 4. B, 6. C, 9. E---- D, 54. B, ita C, ad E. Quia ergo
A, 3. B, 4. C, 10. E---- D, 40. quatuor numeri A, B, C, E, proportionales sunt,

a 19. sept. [a] erit numerus contentus sub extremis A, E, æqualis ei, qui ex B, secundo fit in C, tertium, hoc est, ipsi D. Quare cum D, fiat ex A, in E; b metietur A, ipsum D, per E: fed b 7. pron. & ponitur non metiri. Quod est absurdum. Non igitur inueniri potest ipsis A, B, C, quartus proportionalis quando A, primus non metitur D, productum ex B, secundo in C, tertium. Eadem methodo considerabimus, an ipsis C, B, A, inueniri possit aliquis quartus, ad quem ita se habeat A, vt C, ad B. Quocirca tribus numeris datis considerauimus, an possit, &c. Quod erat faciendũ.

SCHOLIVM.

HÆC quæ proximis quatuor propositionibus, nimirum 16. 17. 18. & 19. demonstrata sunt, intelligi debent de numeris integris. Nam si de fractis loquamur, potest quibuslibet duobus, vel tribus, adiungi alius proportionalis, quamuis extremi inter se primi sint. Nam datis duobus, si quadratus numerus secundi diuidatur per primũ, procreabitur tertius proportionalis. Vt duobus numeris datis 3. 8. si quadratus numerus secundi 8. nimirum 64. diuidatur per 3. inuenietur tertius proportionatis 21 $\frac{1}{3}$. hoc modo. 3. 8. 21 $\frac{1}{3}$. Quia enim diuisis 64. per 1. sit numerus 21 $\frac{1}{3}$. producetur numerus diuisus 64. ex multiplicatione Quotientis 21 $\frac{1}{3}$. per diuisorem 3. vt ad defin. 15. lib. 7. tradidimus. Cum ergo idem numerus c 20. sept. *64. factus sit ex medio numero 8. in se; c erunt 3. 8. 21 $\frac{1}{3}$. continue proportionales.*

DATIS autem tribus numeris, si numerus ex secundo in tertium genitus diuidatur per primum, procreabitur quartus proportionalis. Vt datis tribus numeris 9. 6. 20. si numerus 120. ex secundo in tertiũ genitus diuidatur per primum 9. reperietur quartus proportionalis 13 $\frac{1}{3}$. hoc modo 9. 6. 20. 13 $\frac{1}{3}$. Cum

Cum enim diuisis 120. per 9. fiat 13 $\frac{1}{3}$ producetur numerus diuisus 120. ex multiplicatione Quotientis 13 $\frac{1}{3}$. per diuisorem 9. ex ijs, quæ in defin. 15. lib. 7. scripsimus. Fit autem idem numerus diuisus ex secundo in tertium. a *Igitur quatuor numeri 9. 6. 20. 13 $\frac{1}{3}$. proportionales sunt.* a 19. sept.

EX *his facile cognoscemus, propositis quotcunque numeris continue proportionalibus, an possit ipsis alius proportionalis adiungi. Sumptis enim tribus vltimis, si ipsis alius potest inueniri, ille idem erit omnibus illis proportionalis.*

THEON, *& qui illum sequuntur, inter quos etiam est Federicus commandinus, quatuor membris hoc problema absoluunt. Aut enim (aiunt) tres dati numeri & deinceps proportionales sunt, & eorum extremi inter se primi; Aut non deinceps quidem proportionales, sed eorum extremi primi inter se; Aut deinceps quidem proportionales, sed eorum extremi non primi inter se; Aut denique nec deinceps proportionales, nec eorum extremi inter se primi. Vbi mirari satis non possum, quo nam modo diligentissimi Euclidis interpretes, & in alijs quidẽ demonstrationibus vigilantissimi, in secundo membro huius problematis demonstrando dormitarint, & quasi sui oblitti, ac de diligentia remittentes, in errorem, eumq; non leuem, incurrerint. Dicunt enim, si tres numeri dati non sint deinceps proportionales, sed eorum extremi inter se primi, non posse ipsis quartum proportionalem inueniri. Quod quidem & falsum est, & demonstratio, qua id ipsum comprobare nituntur, vitiosa. Nam falsitas huius rei perspicue in his numeris non continue proportionalibus apparet 4. 8. 9. quorum extremi 4. 9. sunt inter se primi, & nihilominus eis adiungi potest quartus proportionalis 18. Quis enim non videt, esse vt 4. ad 8. ita 9. ad 18. cum vtrobique proportio sit subdupla? Idem videri potest in exemplis alijs infinitis, vt hic 2. 4. 7. 14. Item 3. 9. 4. 12. Item 2. 10. 3. 15. Item 5. 10. 6. 12. &c. In omnibus enim his numeris extremi priorum trium sunt inter se primi, cum tamen ipsis adiungatur posterior quartus proportionalis. Falsum ergo est, illis dari non posse quartum proportionalem. Quod autem vitiosa sit eorum demonstratio, qua hoc probare contendunt, perspicuum fiet, si demonstrationem ipsam in medium proferamus. Ita igitur ratiocinantur.*

SINT trium numerorum A, B, C, non deinceps proportionalium, extremi A, C, inter se primi. Dico ipsis inueniri nullo modo posse quartum proportionalem. Si enim potest inueniri, sit ille D, ita vt sit quēadmodum A, ad B, ita C, ad D; & vt B, ad C, ita fiat D, ad E. Erit igitur ex æquo, vt A, ad C, ita C, ad E: Sed sunt A, C, inter se primi, [a] & ob id minimi. [b] Igitur metientur æque ipsos C, E, nimirum A, ipsum C, & C, ipsum E. At vero & A, se ipsum metitur. Ergo A, metitur duos A, C, primos inter se. Quod fieri non potest. Ipsis igitur A, B, C, quartus proportionalis inueniri nequit.

a 23. sept.
b 21. sept.

HÆC est eorum demonstratio, in qua assumunt esse vt B, ad C, ita D, ad alium quendam numerum, videlicet ad E; quod quidem fieri posse, nusquam demonstrarunt: Immo hoc ipsum vertitur in dubium in hoc problemate. Non enim minus inquiritur, an tribus numeris B, C, D, quartus proportionalis possit inueniri, quam tribus A, B, C; cum non magis hoc constet in illis, quam in his. Quapropter cum ibi id pro concesso assumant, vt hic idem fieri non posse, ostendant; liquido constat, eos petere principium (vt cum Dialecticis loquamur) in demonstrando. Quin etiam, quotiescunque quatuor numeri dantur proportionales, sed non deinceps, quorum primus, & tertius, primi inter se sunt, quales ponuntur esse A, B, C, D; nulla ratione fieri potest, vt detur alius, ad quem ita se habeat quartus, sicut secundus ad tertium: quod tamen ipsi tanquam concessum, atque probatum assumunt; quandoquidem sine probatione vlla exigunt, vt detur illis numerus E, ad quem ita se habeat quartus D, vt B, secundus ad C, tertium. Hoc vero non posse fieri, facile demonstrabimus eodem argumento, quo ipsi vtuntur.

SINT enim quatuor numeri A, B, C, D, proportionales, non tamen deinceps, sintque A, & C, primus, & tertius, inter se primi. Dico fieri non posse, vt sit D, ad alium numerum, quemadmodum B, ad C. Sit enim, si potest fieri, vt B, ad C, ita D, ad E. Est ergo ex æquo, vt A, ad C, ita C, ad E; Atque adeo vt ipsi ostenderunt, metietur A, duos A, & C, primos inter se. Quod est absurdum. Non ergo fieri potest, vt D, ad E, sit, quemadmodum B, ad C. Quare apertissime falsum in demonstratione secundi membri assumpserunt Theon, & alij Euclidis interpretes, qui Theonem sequuntur.

A, 4. B, 12. C, 3. D, 9. E

PRIMVM vero membrum perspicue & aperte ostendunt. Nam si tres numeri deinceps proportionales sunt, & eorum extremi inter se primi; [a] manifestum est, ex demonstratis, non posse ipsis quartum proportionalem inueniri. Postrema tandem duo membra expediunt non aliter, ac nos totum problema absoluimus.

a 17. noni

THEOR. 18. PROPOS. 20. 21.

PRIMI numeri plures sunt, omni proposita multitudine primorū numerorū.

SINT propositi primi numeri quotcunque A, B, C. Dico ipsis A, B, C, plures esse primos numeros. [b] Sumpto enim numero D E, minimo, quem A, B, C, metiuntur; apponatur ei vnitas EF. Aut ergo totus D F, primus est, aut non primus, sit primum primus. Sunt ergo primi numeri A, B, C, & D F, plures proposita multitudine A, B, C.

b 38. sept.

A, 2. B, 3. C, 5.
30 1
D ---------- E . F

SED iam non sit primus D F. [c] Metietur ergo eum aliquis numerus primus, nimirum G. Dico G, primum nulli ipsorū A, B, C, eundē esse. Si namque G, sit idē, qui vnus ipsorum A, B, C; metiantur autem A, B, C, ipsum D E; & G, eundē D E, metietur. Quare G, metiens totum D F, & detractum D E, [d] metietur quoq; EF, reliquū, numerus vnitatē. Quod est absurdum. Ergo G, primus non est idem, qui vnus ipsorum A, B, C; Ac proinde

c 33. sept.

A, 3. B, 5. C, 7.
105 1
D ---------- E. F
53
G -------

d 11. prop.

inde inuenti sunt primi numeri A, B, C, G, plures proposita multitudine primorum numerorũ A, B, C. Eademq; via plures inuenientur quam A, B, C, G, si sumatur minimus, quem ipsi metiantur. &c. Quocirca primi numeri plures sunt. &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

POTERAT idem hoc theorema instar problematis hoc modo proponi.

PRIMIS numeris quotcunque propositis, inuenire alium primum numerum ab illis diuersum.

NAM si primi quotcunque propositi sint A, B, C, inueniemus eodem modo alium primum ab illis diuersum, videlicet D F, si primus est. vel certe G, qui ipsum D F, metitur. Atque eodem modo quatuor primis alium quintum, & quinque primis alium sextum inueniemus; & sic deinceps primos numeros, quotquot quis volet, inueniemus.

22. THEOR. 19. PROPOS. 21.

SI pares numeri quotcunque componantur: totus par erit.

COMPONANTVR quotcunque pares numeri A B, B C, C D Dico & totum compositum A D, parem esse. Cum enim A B, B C, C D, sint pares habebunt singuli singulas partes dimidias, ex definitione. Sit ergo

A.....B....C.....D
E...F,..G....

E, dimidia pars ipsius A B & F, ipsius B C; & G ipsius C D. Quoniam igitur est vt A B, ad E, ita B C, ad F; & C D, ad G; (quod semper fit proportio dupla) [a] erit quoque vt A B, ad E, ita A D, ad E, F, G, simul. Est autem A B, ipsius E, duplus. Igitur & totus A D, compositi ex E, F, G, duplus erit; Ac propterea A D, dimidiam partem habens numerum ex E, F, G, compositum par erit, ex definitione. Si igitur pares numeri quotcunque, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 13. sept.

THEOR. 20. PROPOS. 22. 23.

SI impares numeri quotcunq; componantur, multitudo autem ipsornm sit par: Totus par erit.

COMPONANTVR quotcunque numeri impares, quorum multitudo par A B, B C, C D. D E. Dico & totum compositum A E, parem esse. Cum enim A B, B C, C D, D E, sint impares; differet A...B....C.....D.....E quilibet vnitate a pari, ex definitione. Quare detracta ab vnoquoque vnitate, quilibet reliquorum par erit. [a] Quare. & compositus ex ipsis par erit. Est autem & multitudo vnitatum detractarum par. [b] Igitur & totus A E, compositus par erit. Si igitur impares numeri quotcunque, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 21. noni
[b] 21. noni

THEOR. 21. PROPOS. 23. 24.

SI impares numeri quotcunq; componantur, multitudo autem ipsorum sit impar: & totus impar erit.

QVOTCVNQVE numeri impares, quorũ multitudo impar est, A B, B C, C D, componantur. Dico & totum A D, compositum, imparem esse. Cum enim impar numerus differat vnitate à pari, ex definitione; ablata

ablata vnitate E D, ab impari C D; erit reliquus C E, par. a Est autē & A C, compositus ex imparibus A B, B C, multitudine paribus, par. b Igitur & A E, compositus ex paribus A C, C E, par erit. Quare addita unitate E D, totus A D, impar erit, cum impar a pari differat unitate, ex definitione. Si igitur impares numeri quotcunque, &c. Quod ostendendum erat.

A . . . . B . . . C . . . . . E . D

a 22. noni

b 21. noni

SCHOLIVM

PARI ratione, Impar numerus pari numero, vel pluribus paribus numeris additus faciet imparem. Nam dempta vnitate ex impare, reliquus erit par; cum ex defin. Impar à pari differat vnitate. c *Quare reliquus ille par cum alio pari dato; vel cum pluribus datis, conficiet parem. Addita ergo rursus illa vnitate, totus fiet impar; cum à pari sola vnitate differat. Quod est propositum.*

c 21. noni

25.

THEOR. 22. PROPOS. 24.

SI a pari numero par detrahatur: Et reliquus par erit.

EX pari numero A B, detrahatur par C B. Dico & reliquum A C, parem esse. Aut enim C B, par detractus dimidia pars est ipsius A B, aut maior quam dimidia pars, vel minor. Sit primū dimidia pars. Cum igitur ipsi C B, pari æqualis sit A C, reliqua pars dimidia; erit & A C, numerus par.

A . . . . . C . . . . . B

SED iam C B, par detractus maior sit, vel minor dimidia parte ipsius A B. Quoniam igitur A B, C B, pares numeri, dimidias partes habent, ex definitione; sit D B, dimidia pars ipsius A B; & E B, dimidia ipsius C B. Itaque cum sit vt A B, ad D B, dimidium, ita C B, ad E B, dimidium;

midiū; erit permutando vt A B, ad C B, ita D B, ad E B; & diuidendo vt A C, ad D E, ita C B, ad E B; Rursusque permutando, vt A C, ad D E, ita C B, ad E B. Atqui C B, ipsius E B, duplus est: Igitur & A C, ipsius D E, duplus erit; Ac propterea A C, cum bifariam diuidatur, (quod D E, sit eius pars dimidia) par erit. Si ergo a pari numero par detrahatur, &c. Quod erat ostendendum.

A . . . . C . . D . . . E . . . . . B

A . . . . . D . . C . . E . . B

THEOR. 23. PROPOS. 25.

26.

SI a pari numero impar detrahatur: Et reliquus impar erit.

EX pari numero A B, impar detrahatur C B. Dico & reliquum A C, imparem esse. Detracta enim vnitate C D, ex C B, reliquus sit numerus D B, par. Quia igitur & totus A B, ponitur par; erit & reliquus A D, par. Dempta ergo vnitate C D, reliquus A C, impar erit. Si igitur a pari numero impar detrahatur, &c. Quod demonstrandum erat.

A . . . . . C . D . . . . B

a 24. noni

THEOR. 24. PROPOS. 26.

27.

SI ab impari numero impar detrahatur: Reliquus par erit.

EX impari numero A B, impar detrahatur C B. Dico reliquum A C, parem esse. Detracta enim D B, vnitate ex imparibus A B, C B; erunt reliqui A D, C D, pares. Quia ergo ex pari A D, par aufertur C D; erit & reliquus A C par. Quare si ab impari numero impar detrahatur, &c. Quod erat demōstrādū.

A . . . . C . . . . . D . B

A . . . . . D . . C . . E . . B

b 24. noni

THEOR.

28.

THEOR. 25. PROPOS. 27.

SI ab impari numero par detrahatur: Reliquus impar erit.

EX impari A B, detrahatur par C B. Dico reliquum A C, imparem esse. Detracta enim A D, vnitate ex impare A B; erit reliquus D B, par: Ex quo cum detrahatur C B, par; reliquus DC, par quoq; erit; Ac proinde addita vnitate A D, fiet A C, impar. Si ergo ab impari numero par detrahatur, &c. Quod demonstrandum erat.

a 24. noni

A . D . . . . C . . . . . B

29.

THEOR. 26. PROPOS. 28.

SI impar numerus parem multiplicans fecerit aliquem: Factus par erit:

FIAT ex A, impari in B, parem numerus C. Dico C, parem esse. Cum enim C, fiat ex A, in B; componetur C, ex tot numeris ipsi B, æqualibus, quot in A, sunt vnitates. Quare cum B, sit par, componetur C, ex tot paribus ipsi B, æqualibus, quot sunt vnitates in A; [b] Atq; adeo par erit. Si ergo impar numerus parem multiplicans, &c. Quod ostendendum erat.

b 21. noni

A . . . B . . . .

C . . . . . .

SCHOLIVM.

EADEM demonstratione ostendemus & hoc.

SI par numerus parem multiplicans fecerit aliquem; Factus par erit.

NAM

NAM rursus C, componetur ex tot paribus ipsi B, aqualibus, quot in A, continentur vnitates, &c.

A . . B . . . . . .

C . . . . . .

COROLLARIVM.

CONSTAT quoque ex his, Parem numerum in se multiplicatum procreare parem: vt patet, si pares A, & B, ponantur aquales.

THEOR. 27. PROPOS. 29.

30.

SI impar numerus imparem numerum multiplicans fecerit aliquem. Factus impar erit.

EX impari A, in imparem B, fiat C. Dico C, imparē esse. Cum enim C, fiat ex A, in B; componetur C, ex tot numeris ipsi B, æqualibus, quot sunt vnitates in A. Quare cum tam A, quam B, sit impar; componetur C, ex imparibus ipsis B, æqualibus, quorum multitudo impar est, nimirū æqualis multitudini vnitatum, quæ in A, impari continentur. [a] Igitur C, impar erit. Quocirca si impar numerus imparem numerum multiplicans, &c. Quod erat ostendendum.

a 23. noni

A . . . B . . . . . .

C . . . . . .

COROLLARIVM.

HINC sequitur, Imparem numerum in se multiplicatum gignere imparem: vt constat, si impares A, & B, ponantur aquales.

EX

EX CAMPANO.

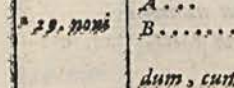
NVMERVS impar numerum parem metiens, per numerum parem eum metitur.

METIATVR impar A, parem B, per C. Dico C, parem esse. Nam si impar sit; [a] erit B, factus ex A, impari in C, imparem impar. Quod est absurdum, cum ponatur par. Est ergo C, par.

[a] 29. noni

NVMERVS impar numerum imparem metiens, per numerum imparem eum metitur.

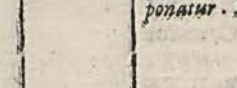
METIATVR impar A, parem B, per C. Dico C, imparem esse. Si enim sit par; [b] erit B, factus ex A, impari in C, parem par. Quod est absurdum, cum impar ponatur. Est ergo C, impar.



[b] 28. noni

SCHOLIVM.

EX his clarissimè quoque demonstrabimus theorema 31. lib. 2. numeris non posse accommodari: Id quod etiam ex scholio propos. 14. huius lib. aliter ostendimus; recepimus enim hoc loco clarius demonstraturos, Secetur enim, si fieri potest, numerus A B, in partes A C, C B, ita vt numerus ex A B, in C B, factus, æqualis sit quadrato reliquæ partis A C. Aut igitur vtraque pars A C, C B, impar est, aut maior A C, impar, & minor C B, par; aut contra, maior A C, par, & minor C B, impar; aut denique vtraque pars A C, C B, par. Sit primum vtraque pars A C, C B, impar, [c] ideoque totus numerus A B, par. [d] Igitur quot sit ex A B, in C B, par est: qui vero ex A C, in se sit, impar est, ex Coroll. huius propos. 29. Cum ergo numerus ex A B, in C B,



[c] 32. noni
[d] 28 noni.

C B, genitus ponatur æqualis ei, qui fit ex A C, in se; erit par numerus impari æqualis. quod fieri non potest.

DEINDE sit A C, impar, & C B, par, ideoque ex scholio propos. 23. huius lib. totus A B, impar. [a] Quia ergo numerus ex A B, impare in parem C B, factus, par est: & numerus ex impare A C, in se genitus, impar, ex coroll. huius propos. 29. erit rursus ille par huic impari æqualis. quod est absurdum. [a] 28. noni

TERTIO sit A C, par, & C B, impar; ideoque ex scholio propos. 23. huius lib. totus A B, impar. [b] Quia ergo numerus ex A B, impare in imparem C B, factus, impar est: & numerus ex pare A C, in se genitus, par, ex coroll. propos. 28. huius lib. erit rursus ille impar huic pari æqualis. quod absurdum est. [b] 29. noni

QVARTO sit vtraque pars A C, C B, par. Inuentis igitur, ex scholio propos. 35. lib. 7. duobus numeris minimis D, E, in proportione A C, ad C B; [c] erunt D, E, inter se primi: ac proinde ambo pares non erunt, sed vel vterque impar, vel vnus impar, & alter par. Et quia est, vt A C, ad C B, ita D, ad E; erit conuertendo, vt C B, ad A C, ita E, ad D: Et componendo, vt A B, ad A C, ita totus D E, ad D: [d] Est autem, vt A B, ad A C, ita A C, ad C B; quòd numerus factus ex A B, in C B, æqualis ponatur quadrato medij A C. Igitur erit quoque vt totus D E, ad D, ita D, ad E, [e] ac proinde numerus, qui fit ex toto D E, in E, æqualis erit quadrato ipsius D. Totus ergo numerus D E, factus est in partes D, E, quarum vel vtraque impar est, vel vna impar, & altera par; ita vt numerus factus ex toto D E, in partem E, æqualis sit quadrato alterius partis D. quod fieri non posse, iam demonstratum est in numero A B, quando vtraque pars A C, C B, vel impar est, vel vna impar, & altera par. Constat ergo propositum. [c] 24. sept. [d] 20. sept. [e] 29. sept.

THEOR. 28. PROPOS. 30. 33.

SI impar numerus parem numerum metiatur; & illius dimidium metietur.

METIATVR impar A, parem B. Dico A, dimidiũ quoq; ipsius B, metiri. Metiatur A, ipsũ B, per C. Erit ergo,

ergo, ex ijs, quæ in antecedente propos ex Campano demonstrauimus, numerus C, par; Atque adeo dimidiã partem habebit. Itaque cum A metiatur B, per C, [a] metietur quoque C, ipsum B, per A;

A... C.... Ac proinde C, pars erit ipsius B, denominata ab A, vt ad 3 definitionẽ lib. 7. docuimus. Quoniam vero est

B ..... vt C, ad dimidium sui, ita B, ad dimidium sui; & permutando vt C, ad B, ita dimidia pars ipsius C, ad dimidiam partem ipsius B. Est autem C, pars ipsius B, denominata ab A, vt ostensum est; erit & dimidium ipsius C, dimidij ipsius B, pars ab eodem A, denominata, [b] Ac propterea A, dimidium ipsius B, metietur. Si impar ergo numerus parem numerum metiatur, &c. Quod erat ostendendũ.

[a] 8. pron.

[b] 40. sept.

34.

THEOR. 29. PROPOS. 31.

SI impar numerus ad aliquem numerum primus sit: & ad illius duplum primus erit.

IMPAR numerus A, primus sit ad numerum B, cuius duplus sit C. Dico A, ad C, quoque primum esse. Si enim A, C, non sunt inter se primi; metietur eos aliquis numerus, qui sit D; qui necessario impar erit. Nã

A ..... B..... si sit par, cũ metiatur imparem A; [c] erit A, factus

C..... D ex D, pari in eum numerũ, per quem metitur, par. Quod est absurdum ponitur enim A, impar. Quare D, impar parem C, metitur; (est enim C, par, cum dimidium habeat B.) [d] metietur quoque numerum B, eius dimidium. Metitur autem & A. Igitur D, ipsos A, B, primos inter se metitur. Quod est absurdum. Non igitur A, ad C, primus non est. Ergo primus. Quapropter si impar numerus ad aliquem numerum primus sit, &c. Quod erat ostendendum.

[c] 28. noni

[d] 30. noni

COROL-

COROLLARIVM.

SEQVITVR hinc, numerum imparem, qui ad aliquem numerum primus est, primum quoque esse non solum ad eius duplum, vt Euclides demonstrauit, sed etiam ad eius quadruplum, octuplum, sedecuplum, & sic deinceps per proportionem duplam procrediendo. Nam si primus est ad duplum, [a] primus quoque erit ad quadruplum, qui dupli duplus est: Et similiter ad octuplum, qui quadrupli duplus est, &c.

[a] 31. noni

THEOR. 30. PROPOS. 32.

35.

NVMERORVM à binario duplorum vnusquisque pariter par est tãtum.

NVMERI a binario A, dupli quotcunque sint B, C, D, E. Dico B, C, D, E, esse pariter pares tantum. Quod enim sint pariter pares, perspicuum est. Nam exposita vnitate, cum A, sit

binarius, & B, C, D, E, a binario dupli; erunt A, B, C, D, E, ab vnitate deinceps proportionales, nimirum in proportione dupla. [b] Quare A, quilibet ipsorum B, C, D, E, & quilibet minor maiorem sequentem metietur per aliquem ipsorum A, B, C, D, E; qui cum omnes sint pares, vtpote dupli a binario; metietur quemlibet ipsorum B, C, D, E, par numerus per numerum parem; Ac propterea quilibet pariter par erit, ex definitione.

Vnitas. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. E, 32.

[b] 11. noni

QVOD autem ijdem numeri sint pariter pares tantum, liquido etiam constat. Cum enim A, B, C, D, E, sint ab vnitate continue proportionales, sitque A, proximus vnitati numerus primus, nimirũ binarius; [c] nullus alius quemlibet ipsorum metietur, præter ipsos A, B, C, D, E;

[c] 13. noni

Universidad de Deusto Biblioteca

qui cum ſint omnes pares; metietur quemlibet ipſorum par numerus per parem numerum tantum: Ac propterea quilibet pariter par eſt tantum. Numerorum igitur a binario duplorum, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

HINC cum Arithmeticis facile colligemus artem, qua omnes numeros inueniamus, qui ſint pariter pares tantum.

A,4. B,8. C,16. D,32. E,64. F,128.
I ---- H ---- G -----

Sint.n.A,B, C,D,E,F, a binario dupli, qui ex hic demonſtratis omnes ſunt pariter pares tantum. Dico nullum alium eſſe pariter parem tantum, præter eos, qui in hoc ordine continentur; Atque adeo ſi ordo numerorum a binario duplorum infinite augeatur, omnes numeros pariter pares tantũ inueniri, nullo relicto. Si enim fieri poteſt, ſit alius numerus G, extra ordinem numerorum a binario duplorum, pariter par tantum, cuius pars dimidia ſit H. Erit igitur H, numerus par: (Nam ſi dicatur impar, cum ſit ipſius G, pars dimidia; metietur binarius, numerus par, ipſum G, per H, numerum imparem; Atque adeo G, pariter impar erit. Quod eſt abſurdum: ponitur namque pariter par tantum) cuius rurſum dimidia pars ſit I. Erit igitur rurſum I, par numerus: (Nam ſi dicatur impar, cum ſit ipſius G, pars quarta; metietur numerus par 4. ipſum G, per I, numerum imparem; Atque ob id G, pariter impar erit; Quod eſt abſurdum: ponitur enim pariter par tantum.) Atque ita deinceps erit ſemper dimidia pars numerus par, donec ad vnitatem veniamus. Sit ergo iam ipſius I, dimidia pars vnitas, ita vt ſit I, binarius. Igitur H, G, ſunt a binario I, dupli; Ac proinde G, erit aliquis ex ordine ipſorum A, B, C, D, E, F, ponitur autẽ, non eſſe. Quod eſt abſurdum. Nullus ergo alius pariter par eſt tantum, præter eos, qui a binario ſunt dupli.

36. THEOR. 31. PROPOS. 33.

SI numerus dimidium habeat imparem: Pariter impar eſt tantum.

HABEAT

HABEAT numerus A: dimidiam partem numerum imparem. Dico A, eſſe pariter imparem tantum. Quod enim ſit pariter impar, ita perſpicuum fiet. Quoniã A, dimidium habet imparem; metietur binarius numerus par ipſum A, per illum dimidium imparem. Quare A, ex definitione, pariter impar eſt Quod autem idem A, ſit pariter impar tantum, hoc modo demonſtrabimus. Sit B, dimidia pars ipſis A; & C, binarius. Si igitur A, non eſt pariter impar tantum; ipſe erit quoque pariter par. Quare eum metietur aliquis par numerus per parem numerum. Metiatur eum D, par per parem E. [a] Igitur fit A, ex D, in E: ſed idem A, fit ex C, binario in B, eius dimidium. Ergo numerus factus ex C, primo in B, quartũ æqualis eſt ei, qui fit ex D, ſecundo in E, tertium, [b] Ac propterea erit vt C, ad D, ita E, ad B. Metitur autem C, binarius parem D. Igitur & E, ipſum B, metietur, par imparem. Quod eſt abſurdum. Non eſt ergo A, pariter par. Ergo pariter impar tantum. Quocirca ſi numerus dimidium habeat imparem, &c. Quod demonſtrandum erat.

A . . . . . .

A . . . . . .
B . . . . . C . .
D ----- E ----

[a] 9. pron.

[b] 19. ſept.

SCHOLIVM.

ITAQVE ſi omnium numerorum imparium dupli ſumantur, inuenientur omnes numeri, qui ſunt pariter impares tantum.

Impares.	3.	5.	7.	9.	11.	13.	15.
Pariter impares tantũ.	6.	10.	14.	18.	22.	26.	30.

Quod enim quilibet illorum ſit pariter impar tãtum, conſtat ex hac propoſitione; quippe cum quilibet dimidium habeat imparem. Quod autem illi ſoli ſint pariter impares tantum, perſpicuum erit ex ſequenti theoremate, in quo demõſtratur, omnes pares, qui nec a binario ſunt dupli, neque dimidios habent impares, eſſe pariter pares, & pariter impares. Cum ergo

nullus alius par habeat dimidium imparem, præter duplos imparium numerorum; manifestum est, nullum alium, præter ipsos, esse pariter imparem tantum; sed vel esse pariter parem tantum, vel certe pariter parem & pariter imparem.

37.

THEOR. 32. PROPOS. 34.

SI par numerus neque a binario duplus sit, neque dimidium habeat imparem: Pariter par est, & pariter impar.

PAR numerus A, neque sit a binario duplus, neque dimidium habeat imparem, sed parem. Dico A, & pariter parem esse, & pariter imparem. Quod enim sit pariter par, liquet.

A . . . . . Nam cum dimidium habeat parem, metietur eum binarius, par numerus, per parem, nempe per dimidium. Igitur ex definitione, pariter par est.

QVOD autem idem A. sit etiam pariter impar, ita ostendemus. Diuiso A, bifariam, & eius dimidio rursus bifariam, & ita deinceps; tandem incidemus in aliquem imparem. Nam si in binarium incideremus, esset A, a binario duplus; ponitur autem & non duplus. Quod est absurdum. Igitur cum in imparem incidamus, metietur ille impar ipsum A, per numerum parem: Alias si per imparem metiretur, [a] cum impar imparem multiplicans faciat imparem; esset A, factus ex illo impare in hunc imparem, impar. Quod est absurdum. ponitur enim par. Quare cum impar metiatur A, per parem; atque adeo vicissim par per imparem; erit ex definitione A, pariter impar. Fuit autem & pariter par. Igitur est & pariter par, & pariter impar. Si par ergo numerus neque a binario duplus sit, &c. Quod ostendendum erat.

[a] 29. noni

SCHO-

SCHOLIVM.

FACILE ex hic inueniemus omnes numeros, qui & pariter pares sint, & pariter impares. Relictis enim omnibus illis, qui a binario sunt dupli, & omnibus, qui dimidios habent impares; erunt ex hac propos. omnes alij pares, & pariter pares & pariter impares.

PORRO ex proximis tribus theorematibus aperte intelliguntur ea, quæ in definitionem 9. lib. 7. scripsimus.

THEOR. 33. PROPOS. 35.

38.

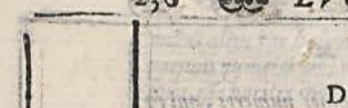
SI sint quotcunq; numeri deinceps proportionales, detrahantur autem a secundo, & vltimo æquales ipsi primo: Erit vt secundi excessus ad primum, ita vltimi excessus ad omnes ipsum antecedentes.

SINT quotcunque numeri continue proportionales A, B C, D, E F; & ex B C, secundo, & E F, vltimo detrahantur C G, F H, primo A, æquales. Dico esse vt BG, ad A, ita EH, ad A, BC, & D, simul. Detrahatur FI, ipsi BC, & FK, ipsi D, æqualis. Quoniam igitur FI, æqualis est ipsi B C, & ablatus FH, ablato C G; erit & reliquus I H, reliquo B G, æqualis. Quia vero est vt A, ad BC, ita B C, ad D, & D, ad E F; conuertendoque vt EF, ad D, ita D, ad BC, & BC, ad A; Atque

A . . . . . .
B . . . . G C
D . . . . . .
E . . . . . K . . . . . I . . . H . . . . . F

A .
B . . G . C
D . . . . . .
E . . . . . K . . . . . I . . H . F

est



est K F, ipsi D, & I F, ipsi B C, & H F, ipsi A, æqualis: Erit quoque vt E F, ad K F, ita K F, ad I F, & I F, ad H F. Dividendo igitur vt E K, ad K F, ita K I, ad I F, & I H, ad H F; [a] Ac proinde ita etiam erunt omnes E K, K I, I H, ad omnes K F, I F, H F, hoc est, totus E H, ad D, B C, A, simul (quibus sumpti sunt æquales K F, I F, H F,) vt I H, ad H F, hoc est, vt B G, ad A; sunt enim B G, & A, ipsis I H, & H F, æquales. Quare si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod demonstrandum erat.

[a] 12. sept.

SCHOLIVM.

EX hoc theoremate veniemus in notitiam summæ quotcunque numerorum cõtinue proportionalium, si modò primus, secundus, & vltimus fuerint noti. Cum enim sit vt excessus secundi ad primum, ita excessus vltimi ad omnes ipsum antecedentes; Si primus a secundo, & vltimo demtur, fiat vt reliquus secundi ad primum, ita reliquus vltimi ad alios. Erit hic alius summa omnium numerorum proportionalium,

1. 3. 9. 27. 81. 243. 729. 2187.

qui vltimum antecedunt. Si igitur adijciatur vltimus, habebitur tota summa. Inuenietur autem quartus ille proportionalis, si primus multiplicetur in excessum vltimi, & productus diuidatur in excessum secundi: vt liquet ex scholio propos. 19. huius lib. quandoquidem tres dati numeri, quibus quartus proportionalis inueniendus est, sunt, excessus secundi, primus, & excessus vltimi: Vt in exemplo appositio, si primus numerus, nempe vnitas, detrahatur ex 3. secundo, & ex 2187. vltimo, erunt reliqui excessus, 2. 2186. Quoniam igitur debet esse vt 2. ad 1. ita 2186. ad summã omniũ, excepto vltimo, si secũdus numerus 1. multiplicetur per tertiũ 2186. fiet numerus 2186. qui si diuidatur in primum 2. exurget numerus 1093. Videlicet summa omnium, excluso vltimo 2187. qui si addatur summæ inuentæ 1093. procreabitur summa omnium 3280.

THEOR.

THEOR. 34. PROPOS. 36.

39.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione, quoad totus compositus fiat primus; & totus hic in vltimum multiplicatus faciat aliquem: Factus erit perfectus.

SINT ab vnitate quotcunque numeri A, B, C, D, dupli, quoad E, ex illis compositus sit primus; & E, multiplicans D, vltimum faciat F. Dico F, esse numerũ perfectum. Quot enim sunt numeri A, B, C, D, tot sumantur ab E, dupli, nimirum E, G, H, I. Quia igitur A, B, C, D, eandem rationem habent, quam E, G, H, I; erit ex æquo, vt A, ad D, ita E, ad I; [a] Ac propterea numerus factus ex A, primo in I, quartum æqualis est facto ex D, secundo in E, tertium: Factus est autem F, ex D, in E. Igitur idem F, fiet ex A, in I; [b] ideoque I, ipsum F, metietur per A, binarium; & ob hoc F, ipsius I, duplus erit. Quare E, G, H, I, F, deinceps dupli sunt. Detrahantur ex G, secundo, & ex F, vltimo numeri K, L, primo E, æquales, sintque reliqui excessus M, N. [c] Erit igitur vt M, ad E, ita N, ad E, G, H, I, simul: Est autem M, æqualis ipsi E. (Cum enim G, duplus sit ipsius E, ablatusque sit K, ipsi E, æqualis; erit & reliquus M, ipsi E, æqualis.) Ergo & N, æqualis est ipsis E, G, H, I, simul. Additis igitur æqualibus, nimirum numero L, (qui æqualis est ipsi E, ablatus) & numero composito ex vnitate, & A, B, C, D, numeris; (qui com-

[a] 19. sept.
[b] 7. pron.
[c] 35. noni.

compositus eidem E, per constructionem, est æqualis) erit compositus ex LN, nimirum ipse F, æqualis vnitati, & numeris A,B,C,D,E,G,H,I, simul. Quare cum vnitas. A,2. B,4. C,8. D,16.

E,31. G——62. H,124. I,248. F——496

K,31. M,31. L,31. N,465.

O——P——

tas, & omnes numeri A,B,C,D,E,G,H,I, metiantur ipsum F; (Cum enim F, factus sit ex E, in D; [a] metietur D, ipsum F; [b] atque adeo eundem F, metietur vnitas, & numeri A,B,C, [c] qui ipsum D, metiuntur. Rursus cum I, ipsum F, metiatur, vt ostensum est, [d] metientur quoque eundem F, numeri E,G,H, [e] qui ipsum I, propter proportionem duplam, metiuntur) & nullus alius numerus ipsum F, metiatur, vt mox ostendemus; Erunt unitas & numeri A,B,C,D,E,G,H,I, omnes partes, quas F, habere potest: Quibus cum æqualis ostensus sit ipse F; erit F, ex definitione, perfectus.

[a] 7. pron.
[b] 11. pron.
[c] 11. nonæ
[d] 11. pron.
[e] 11. noni

QVOD autem nullus alius numerus, præter A, B, C,D,E,G,H,I, ipsum F, metiatur, ita demonstrabimus. Metiatur, si fieri potest, alius numerus O, præter illos, ipsum F, per P; [f] atque adeo F, fiat ex O, in P: Sed & idem F, factus est ex E, in D. Idem ergo numerus sit ex E, primo in D, quartum, & ex P, secundo in O, tertium; [g] ac propterea est vt E, ad P, ita O, ad D. Quoniam vero, ex A,B, C, D, ab unitate sint proportionales, & A, proximus vnitati primus, [h] vltimum D, nullus alius, præter A,B,C, metitur: & O, ponitur non idem, qui aliquis ipsorum A,B,C; non metietur O, ipsum D. Vt autem O, ad D, ita erat E, ad P; neque igitur E, ipsum P, metietur. Cum ergo E, primus sit, [i] erunt E, & P, inter se primi; k ideoq; in sua proportione minimi: [l] Ac proinde æque metietur E, ipsum O, & P, ipsum D. [m] Nullus vero alius præter A,B,C, ipsum D, metitur. Igitur P, idem erit, qui aliquis ipsorũ A,B,C. Sit ergo idem, qui B, & quot sunt B,C,D, tot ab E, sumantur dupli E,G, H. Erit igitur ex æquo, vt B, ad D, ita E, ad H; [n] Ac proinde idem numerus

[f] 9. pron.
[g] 19. sept.
[h] 13. octaui
[i] 31. sept.
k 23. sept.
[l] 21. sept.
[m] 23. octa.
[n] 19. sept.

rus fiet ex B, primo in H, quartum, qui ex D, secundo in E, tertium. Qui autem ex D, in E, æqualis fuit ei, qui ex P, in O. Idem ergo fiet ex P, in O, qui ex B, in H, [a] atque adeo erit, vt P, ad B, ita H, ad O. Erat autem P, idem qui B: Igitur & H, idem est, qui O. Quod est absurdum. ponitur enim O, diuersus ab omnibus A,B,C,D,E,G,H,I. Non igitur alius numerus O, ipsum F, metitur, sed ipsum soli A,B,C,D,E,G,H,I, metiuntur. Quam ob rem, si ab vnitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 19. sept.

SCHOLIVM.

EX hoc theoremate elicitur modus inueniendi omnes numeros perfectos, & earum partes aliquotas, quibus simul sumptis, iuxta definitionem numeri perfecti, ipsi æquales sunt. Si enim quotcunque numeri ab vnitate dupli in vnam summã colligantur, donec compositus sit numerus primus; Erit numerus factus ex illo primo in vltimum duplorũ, perfectus. Quod si ab illo primo, qui ex illis duplis componitur, sumantur tot continue dupli (ipso primo etiam computato) quot sunt numeri illi dupli ab vnitate, exclusa vnitate; erunt hi numeri accepti, & illi ab vnitate dupli, vna cum ipsa vnitate, omnes partes aliquotæ, quas perfectus numerus inuentus habere potest. Quæ omnia perspicua sunt ex demonstratione theorematis, & facile ex subiectis exemplis percipi possunt. Vt quia numerus 3. compositus ex 1.2. primus est; erit propterea numerus 6. qui fit ex 3. in 2. vltimum duplorum, perfectus; cuius partes aliquotæ sunt 1.2.3. Item, quia compositus ex his 1.2.4. nimirum 7. primus est: idcirco 28. factus ex 7. in 4. est perfectus habens has partes aliquotas 1.2.4.7.14. At vero quia compositus ex his 1.2.4.8. hoc est, 15. non est primus; non erit 120. factus ex 15. in 8. perfectus.

DENIQVE quia compositus ex his 1.2.4.8.16. nimirum 31. primus est; erit 496. factus ex 31. in 16. numerus perfectus, cuius partes aliquotæ sunt 1.2.4.8.16.31.62. 124. 248. Eodem modo & reliquos perfectos numeros inuenietemus.

LVBET hoc loco demonstrare proprietates quasdam propor-

proportionalitatis Geometricæ, qua nititur admirabilis illa proprietas, quam libro 5. septimo loco, cum de proportionalitate Geometrica ageremus, exposuimus. hinc exordientes.

I

QVOLIBET numero per duos quosuis numeros diuiso, erunt duo hi numeri Quotientibus conuerso ordine proportionales.

NVMERVS enim A, diuisus per B, C, faciat quotientes D, E. Dico esse, vt B, ad C, ita E, ad D. Quoniam enim diuiso A, per B, fit Quotiens D; fiet A, ex E, in D, vt ad defin. 15. lib. 7. scripsimus. Eadem ratione idem A, fit ex C, in E. Quia ergo idem numerus A, fit ex B, primo in D, quartum, & ex C, secundo in E, tertium, erit vt B, primus ad C, secundum, ita E, tertius ad D, quartum. Quod est propositum.

A, 48. B, 8. C, 3. D, 6. E, 16.

19. sept.

II.

QVOLIBET numero per quotuis numeros diuiso, erunt bini numeri diuidentes binis Quotientibus respondentibus conuerso ordine proportionales.

DIVISO enim numero A, per B, C, D, E, sint Quotientes F, G, H, I. Dico esse, vt B, ad C, ita G, ad F; Et vt C, ad D, ita H, ad G; Et vt D, ad E, ita I, ad H. Hoc autem manifestum ex theoremate 1. proxime demonstrato. Cum enim duo B, C, diuidentes A, faciant F, G; erit vt B, ad C, ita G, ad F. Item cum duo C, D, diuidentes A, faciant G, H; erit vt C, ad D, ita H, ad G. Item cum duo D, E, diuidentes A, faciant H, I; erit vt D, ad E, ita I, ad H: Atque ita deinceps, si plures fuerint. Quod est propositum.

A, 48. B, 3. C, 4. D, 8. E, 6. F, 16. G, 12. H, 6. I, 8.

III.

QVOLIBET numero per quotuis numeros continue proportionales diuiso, erunt Quotientes conuerso ordine in eadem proportione continuè proportionales.

DIVISO enim numero A, per B, C, D, E, continuè proportionales, sint Quotientes F, G, H, I. Dico I, H, G, F, in eadem proportione B, ad C, continuè proportionales esse. Quoniam enim per 2. theorema est, vt D, ad E, ita I, ad H: Et vt C, ad D, hoc est, vt D, ad E, ita H, ad G; Et vt B, ad C, hoc est, vt C, ad D, & D, ad E, ita G, ad F; erunt I, H, G, F, continue proportionales in proportione D, ad E, vel B, ad C. Quod est propositum.

A, 15. B, 1. C, 2. D, 4. E, 8. F, 15, G, 7 1/2, H, 3 3/4, I, 1 7/8

IIII.

SI sint quotuis numeri quicunque, & totidem alij in eisdem proportionibus; erit vt summa priorum ad quemlibet eorum, ita summa posteriorum ad eum, qui illi in posterioribus respondet.

SINT quotuis numeri A, B, C, quorum summa D: Et totidem alij E, F, G, quorum summa H; sitque vt A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita F, ad G. Dico esse, vt D, ad A, B, C, sigillatim, ita H, ad E, F, G.

A, 3. B, 6. C, 20. D, 29. E, 6. F, 12. G, 40. H, 58.

E, F, G, sigillatim. Cum enim sit, vt A, ad B, ita E, ad F, erit componendo, vt A, B, simul ad B, ita E, F, simul ad F. Vt autem B, ad C, ita est F, ad G. Igitur ex æquo, vt A, B, simul ad C, ita erit E, F, simul ad G: Et componendo, vt A, B, C, simul, hoc est, vt D, ad C, ita E, F, G, simul, hoc est, H, ad G. quod est propositum.

QVIA igitur est, vt D, ad C, ita H, ad G: Et conuertendo, vt C, ad B, ita G, ad F; erit ex æquo, vt D, ad B, ita H, ad F. quod est propositum.

DENIQVE quia est, vt D, ad B, ita H, ad F: Et conuertendo, vt B, ad A, ita F, ad E; erit ex æquo, vt D, ad A, ita H, ad E. quod est propositum. Eademq; ratio est in pluribus.

V.

SI sint quotuis numeri quicunque, & totidem alij in eisdē proportionibus; summa priorum per ipsos diuisa sigillatim, faciet eosdem prorsus Quotientes, quos summa posteriorum per ipsos diuisa facit.

NAM, vt in in 4. theor. ostensum est, eadem proportio est summæ priorum ad primum, quæ summæ posteriorum ad primum: ac proinde vtriusq; proportionis idem denominator erit. Cum ergo ex diuisione antecedentis termini per consequentem gignatur denominator proportionis; idem Quotiens omnino procreabitur, si vtraq; summa seorsum per primos numeros, quæq; per suum, diuidatur. Eademq; ratio est, si per secundos, tertios, quartos, &c. diuisio fiat. Constat ergo propo-

VI.

SI summa quotuis numerorum continue proportionalium per eos sigillatim diuidatur: Et Quotientum summa per ipsos Quotientes Et

Et horum secundorum Quotiētum summa per eosdem secundos Quotientes; & sic deinceps in infinitū: procreabuntur alternis semper ijdem primi Quotientes ordine conuerso.

SINT cōtinue proportionales quotuis numeri A, B, C, D, quorū summa E, per ipsos diuisa faciat Quotiētes F, G, H, I, & horum summa K, per eos diuisa faciat Quotientes L, M, N, O. Dico hos Quotientes, & illos esse eosdem alternis, ordine conuerso, hoc est, F, & O, eosdem esse; Item G, & N; H, & M; I, & L, &c.

Quoniam enim per 3. theor. Quotientes F, G, H, I, eandē continuam proportionem habent conuerso ordine, quam numeri A, B, C, D: Et Quotientes L, M, N, O, conuerso ordine eandem, quam Quotientes F, G, H, I, hoc est, eandem eodem ordine, quā numeri A, B, C, D:

A, 1.	B, 2.	C, 4.	D, 8	
			E. 15.	
F, 15.	G, $7\frac{1}{2}$.	H, $3\frac{3}{4}$.	I, $1\frac{7}{8}$.	
			K, $25\frac{1}{8}$.	
L, $1\frac{7}{8}$.	M, $3\frac{3}{4}$.	N, $7\frac{1}{2}$.	O, 15.	

erit per 4. theorema, E, ad A, vt K, ad I. Quare cū ex diuisione antecedentis termini per consequentem producatur denominator proportionis, fiet idem Quotiens ex diuisione E, per A, qui ex diuisione K, per I. Cum ergo Quotientes sint F, & O, æquales erunt F, & O. Eadem ratione æquales erunt G, & N; H, & M; I, & L. &c. quod est propositum.

VII.

SI summa quotuis numerorum continue proportionalium per eos sigillatim diuidatur: erit summa omnium Quotientum æqualis numero, qui gignitur ex multiplicatione primi in vltimum, vel ex mutua multiplicatione quorumlibet duorum mediorū ab extremis æqualiter distantium, vel deniq; (si Quotientum numerus

merus fuerit impar) ex multiplicatione medij Quotientis in se.

SINT primum quotuis numeri multitudine pares continue proportionales A, B, C, D, E, F, quorum summa G,

A, 1. B, 2. C, 4. D, 8. E, 16. F, 32. G, 63.

H, 63. I, 31 1/2. K, 15 3/4. L, 7 7/8. M, 3 15/16. N, 1 31/32. O, 124 1/2.

per ipsos sigillatim diuisa faciat Quotientes H, I, K, L, M, N, quorum summa O. Dico summa O, æqualē esse numerū qui fit ex H, in N, vel ex I, in M, vel ex K, in L. Quia enim per 4. theor. Quotientes H, I, K, L, M, N, sunt continue proportionales cōuerso ordine in proportione A, ad B; erit N, ad M, vt I, ad H. [a] Igitur idem numerus gignitur ex N, in H, qui ex M, in I; hoc est, idem ex H, in N, qui ex I, in M, Eademq; ratione idem fiet ex I, in M, qui ex K, in L. Et quoniam per 6. theor. summa O, diuisa per H, I, K, L, M, N, producit eosdem Quotientes conuerso ordine, hoc est, summa O, diuisa per H, facit Quotientem N; producetur summa O, ex H, in N, per defin. ac proinde & ex I, in M, & ex K, in L.

[a] 19. sept.

SINT deinde quotuis numeri multitudine impares continuè proportionales A, B, C, D, E, quorum summa F,

A, 1. B, 2. C, 4. D, 8. E, 16. F, 31.

G, 31. H, 15 1/2. I, 7 3/4. K, 3 7/8. L, 1 15/16. M, 60 1/16.

per ipsos sigillatim diuisa faciat Quotientes G, H, I, K, L, quorum summa M. Dico summa M, æqualem esse numerum genitum ex G, in L; & ex H, in K; & ex I, in seipsum. Quod enim æqualis sit ei, qui fit ex G, in L. & ex H, in K, demonstrabimus, vt prius. Deinde vero quia tres numeri H, I, K, cōtinue proportionales sunt; [b] erit numerus ex H, in K, genitus, id est, summa M, æqualis numero, qui ex I, in seipsum ducto generatur. quod est propos.

[b] 20. sept.

HINC fit, quando numerus terminorum est impar, summam Quotientum esse numerum quadratum, cuius latus, siue radix, est medius terminus.

ITAQVE

ITAQVE si inueniendi sint quotcunque numeri continue proportionales in data proportione, quorū summa æqualis sit numero, qui ex primo in vltimum gignitur, vel ex quibusuis duobus, qui ab extremis æqualiter distant: accipiendi sunt in data proportione tot numeri quicunque continuè proportionales, quot inquiruntur. Nam si eorum summa per ipsos sigillatim diuidatur; erunt Quotientes quæsiti numeri, vt ex hoc 7. theor. perspicuum est. Quod si desiderentur quotuis numeri multitudine impares, quorum summa sit numerus quadratus, cuius latus, siue radix sit medius terminus: sumendi sunt in data proportione totidem numeri continuè proportionales, eorumq; summa per eos sigillatim diuidenda. Quotientes enim erunt numeri quæsiti, vt ex eodem hoc 7. theor. liquet. Atq; mirabile sanè est, posse reperiri quotcunq; numeros continuè proportionales in data proportione, etiam mille, aut plures, quorum omnium summa æqualis sit producto ex primo in vltimum; & ex quibuslibet duobus, qui ab extremis æqualiter distant, inter se multiplicatis; & denique, si terminorum numerus est impar, ex medio termino in seipsum multiplicato.

SIC etiam si quis optet duos numeros in data proportione, quorum summa æqualis sit numero producto ex vno in alterum, sumat duos numeros in data proportione quoscunque, eorumq; summam per vtrumq; diuidat. Quotientes enim dabunt numeros quæsitos, vt ostensum est: quia videlicet eorum summa æqualis est numero, qui fit ex primo in vltimum, hoc est, in secundum. Exempli gratia. Sint inueniendi duo numeri in proportione sesquiquinta, quorum summa æqualis sit numero, qui ex multiplicatione vnius in alterum producitur. Sumantur duo numeri quicunque in data proportione sesquiquinta, nimirum 6. & 5. eorumque summa 11, per vtrumq; diuidatur. Nam Quotientes 1 5/6. & 2 1/5. sunt numeri quæsiti. Habent enim proportionem sesquiquintam datam, & tam eorum summa, quàm numerus ex multiplicatione eorum productus, est 4 1/30.

MINV-

MINVTIARVM SIVE NVmerorum fractorum DEMONSTRATIONES.

I.

DVAE minutiæ eundem habentes denominatorem, quarum vnius numerator sit vnitas, eandem proportionem habent, quam numeratores.

SINT dua minutiæ *A B, C B*, eundem habentes denominatorem, & numerator *C*, sit vnitas. Dico ita esse minutiam *A B*, ad minutiam *C B*, vt est numerator *A*, ad numeratorem *C*. Quoties enim vnitas *C*, continetur in *A*, toties minutia *C B*, in minutia *A B*, concluditur; propterea quòd minutia *AB*, diuiditur in tot minutias minutiæ *C B*, æquales, quot vnitates sunt in *A*, ita vt quælibet earum minutiarum habeat numeratorem *C*, & denominatorem *B*.[a] Igitur eadem pars est vnitas *C*, numeri *A*, quæ minutia *C B*, minutiæ *A B*; ac proinde est, vt vnitas *C*, ad *A*, ita minutia *C B*, ad minutiam *AB*: Et conuertendo, ita *A*, ad *C*, numerator ad numeratorem, vt minutia *AB*, ad minutiam *CB*. quod est propositum.

[a] 20. defin.

A, 6. *C*, 1.
B, 11. *B*, 11.

QVONIAM vero minutiæ sunt fractiones, siue particulæ vel vnitatis, vel alterius cuiuspiam numeri, (Neque enim eorum sententiam probare possum, qui existimant, nisi respectu solius vnitatis esse accipiendas; propterea quòd falso putant, earum demonstrationes non posse omnes explicari in numeris integris, sed solum in vnitate. Nos enim in hac tractatione omnes demonstrationes quibusuis etiam numeris integris accommodabimus.) conabimur omnes minutiarum demonstrationes numeris integris explicare, vt exemplis etiam studiosus lector addiscat, veras esse demonstrationes, quas asserimus.

SINT

SINT ergo datæ minutiæ $\frac{6}{11}$. & $\frac{1}{11}$. particulæ, verbi gratia, huius numeri integri 44. Et quia eius $\frac{1}{11}$. est 4. & $\frac{6}{11}$. sunt 24 perspicuum est, ita esse 4. ad 24. vt est numerator 1. ad numeratorem 6. Vel ita 24. ad 4. vt 6. ad 1.

HANC porrò propositionem demonstrabimus propos. 4. in vniuersum de quibuscunq; duabus minutijs eiusdem denominationis, etiamsi neutra numeratorem habeat vnitatem.

II.

NVMERATOR cuiusuis minutiæ ad denominatorem eandem proportionem habet, quam minutia ad integrum, cuius est minutia.

SIT minutia quæcunque *A B*. Dico esse numeratorem *A*, ad denominatorem *B*, vt est minutia *AB*, ad suum integrũ. Sumatur minutia *C B*, cuius numerator *C*, vnitas, & denominator idem *B*: Item alia minutia, cuius numerator *D*, æqualis sit eidem denominatori *B*, ita vt suo integro sit æqualis. Quando enim numerator denominatori est æqualis, minutia suo integro æquialet; quippe quæ tot particulas integri contineat, in quot ipsum integrum diuisum est, ac proinde totum integrum contineat.[a] Quoniã igitur est, vt *A*, ad *C*, ita minutia *A B*, ad minutiam *CB*: Et vt *C*, ad *D*, ita minutia *CB*, ad minutiam *DB*; erit ex æquo vt *A*, ad *D*, hoc est, vt numerator *A*, ad denominatorem *B*, ipsi *D*, æqualem, ita minutia *AB*, ad minutiam *D B*, hoc est, ad integrum, quod est propositum.

[a] 1. huius

A, 3. *C*, 1. *D*, 5.
B, 5. *B*, 5. *B*, 5.

ALITER. Sit primum data minutia *A B*, numerator *A*, vnitas, ita vt minutia sit pars aliquota integri *C*, siue *C*, sit vnitas, siue numerus, pars, inquam, aliquota à *B*, denominata, propterea quòd tot minutiæ ipsi *AB*, æquales integrum *C*, conficiunt, quoties vnitas est in *B*, denominatore. Cum ergo & vnitas *A*, sit pars numeri *B*, ab ipso *B*, denominata, vt ad defin. 2. lib. 7. scripsimus; eadem pars erit vni-

A, 1. *C*, 1.
B, 5. *C*, 30.

[a] 20. defin. tas A, numeri B, quæ minutia AB, integri C. [a] Quare erit, vt A, numerator ad B, denominatorem, ita minutia AB, ad integrum C. quod est propositum.

DEINDE non sit vnitas numerator A. Sumatur minutia DB, cuius numerator D, vnitas

A, 3. D, 1. C, 1. & denominator idem B, qui minutiæ

B 5. B, 5. C, 30. AB. [b] Et quia est, vt A, ad D, numerator ad numeratorem, ita minutia

[b] 1. huius AB, ad minutiam DB: Et vt D, ad B, ita minutia DB, ad integrum C, vt proxime demonstrauimus; erit ex æquo, vt A, ad B, numerator ad denominatorem, ita minutia AB, ad integrum C. quod est propositum.

ITAQVE si data minutia $\frac{3}{5}$. sit huius numeri integri 30. erit eius $\frac{1}{5}$. numerus 6. ac proinde $\frac{3}{5}$. numerus 18. vbi vides ita esse 18. ad 30. vt est 3. ad 5. numerator ad denominatorem.

III.

MINVTIA quælibet, pars est numeratoris à denominatore denominata.

SIT quælibet minutia AB. Dico eam esse partem numeratoris A, à denominatore B, denomina-

[c] 2. huius A, 3. C, 1. tam. [c] Quoniam enim est, vt A, ad B, numerator ad denominatorem, ita minutia

B, 5. C, 30. AB, ad suum integrum C; erit permutando, vt A, ad minutiam AB, ita B, ad integrum: Et conuertendo, vt minutia AB, ad A, ita integrum ad B. Cum ergo integrũ C, sit pars denominatoris B, (hoc est, integri toties accepti, quoties vnitas est in denominatore B.) ab ipso denominatore B, denominata; (Cum enim æquè metiatur vnitas denominatorem, & integrum ipsum integrum toties acceptum, quoties vnitas est in denominatore; sit autem vnitas pars denominatoris à denominatore denominata, vt ad defin. 2. lib. 7. scripsimus; erit quoque integrum eadem pars integri toties accepti, quoties vnitas est in denominatore) erit quoque minutia AB, numeratoris A, (hoc est, integri toties accepti, quoties

quoties est vnitas in numeratore A.) eadem pars à denominatore B, denominata. quod est propositum.

PONATVR minutia $\frac{3}{5}$. esse huius integri 30. cuius $\frac{3}{5}$. sunt 18. Et quia numerator 3. numerat tria integra, hoc est, valet 90. & denominator 5. valet 150. (quemadmodum, cum eadem minutia $\frac{3}{5}$. sumitur respectu vnitatis, numerator continet tres vnitates, & denominator quinque.) liquido constat, 18. esse quintam partem numeratoris, hoc est, trium vnitatum, quarum quælibet numerum integrum 30. significat, quæ tres vnitates faciunt 90. partem, inquã, à denominatore 5. denominatam; quemadmodum & 30. datus numerus integer, quinta pars est denominatoris, hoc est, quinque vnitatum, quarum quælibet numerum integrum 30. significat, quæ quinque vnitates conficiunt 150. pars, inquam, à denominatore 5. denominata.

IIII.

DVAE minutiæ eundem habentes denominatorem, quarum neutra numeratorem habeat vnitatem, eandem proportionem habent, quam numeratores.

QVOD prima propositione ostẽsum est de duabus minutijs, quarum altera numeratorem habet vnitatem, demonstratur hic de quibusuis minutijs. Habeant ergo duæ minutiæ AB, CB, eundem denominatorem B. Dico esse minutiam

A, 6. C, 3. AB, ad minutiam CB, vt est A, ad C, numerator ad numeratorem. [a] Quia enim est, [a] 2. huius

B, 7. B, 7. vt A, ad B, ita minutia AB, ad suum integrum: Et vt B, ad C, ita integrum ad minutiam CB; (Nam [b] cum sit, vt C, ad [b] 2. huius

B, ita minutia CB, ad integrum, erit conuertendo, vt B, ad C, ita integrum ad minutiam CB.) erit ex æquo, vt A, numerator ad C, numeratorem, ita minutia AB, ad minutiam CB. quod est propositum.

DATAE minutiæ $\frac{6}{7}.\frac{3}{7}$. *sint huius integri 28. cuius* $\frac{6}{7}$. *sunt 24 &* $\frac{3}{7}$. *sunt 12. vbi perspicuum est, ita esse 24. ad 12. vt est numerator 6. ad numeratorem 3:*

V.

SI duarum minutiarum numerator prioris in denominatorem posterioris, & posterioris numerator in denominatorem prioris ducatur, erit prior minutia ad posteriorem, vt prior numerus productus ad posteriorem.

SINT duæ minutiæ AB, CD: Et ex A, in D, fiat F; & ex C, in B, fiat G. Dico esse minutiam AB, ad minutiam CD, vt est F, ad G. Fiat enim H, ex B, in D. Quia igitur A, B, multiplicantes D, faciunt F, H; [a] *erit vt A, ad B, ita F, ad H. Vt autem A, ad B,* [b] *ita est minutia AB, ad integrum. Igitur erit quoque, vt minutia AB, ad integrum, ita F, ad H. Rursus quia C, D, multiplicantes B, faciunt G, H;* [c] *erit vt C, ad D, ita G, ad H: Et conuertendo, vt D, ad C, ita H, ad G. Vt autem D. ad C, ita est integrum ad minutiam CD. (Nam* [d] *cum sit, vt C, ad D, ita minutia CD, ad integrum, erit conuertendo, vt D, ad C, ita integrum ad minutiam CD.) Igitur erit quoque, vt H, ad G, ita integrum ad minutiam CD. Ex æquo igitur erit, vt F, ad G, ita minutia AB, ad minutiam CD. quod est propositum.*

F, 10. G, 12.
A, 2. ⋈ C, 4.
B, 3. D. 5.
H, 15.

F. AB.
H. Integrum.
G. CD.

[a] 18. sept.
[b] 2. huius
[c] 18. sept.
[d] 2. huius

SI duæ minutiæ $\frac{2}{3}.\frac{4}{5}$. *sint particulæ numeri 30. erunt duæ tertiæ eius, 20. ad quatuor quintas eiusdem, 24. Perspicuum autem est, ita esse 20. ad 24. vt 10. ad 12. qui duo numeri procreati sunt ex numeratoribus in denominatores, permutato ordine.*

ITAQVE si productus numerus F, æqualis fuerit numero producto G, erit quoque minutia AB, minutiæ CD, æqualis: si minor, minor: Et si maior, maior; propter eandem proportionem F, ad G, & minutiæ ad minutiam. Atque hæc est demonstratio regulæ, quam in Arithmetica dedimus ad dignoscendum, vtra duarum minutiarum maior sit.

VI.

INTEGRVM ad summam duarum minutiarum eandem proportionem habet, quam numerus ex multiplicatione mutua denominatorum productus ad summam duorum productorum, quorum vnus ex numeratore prioris minutiæ in posterioris denominatorem, alter vero ex numeratore posterioris in denominatorem prioris gignitur.

SINT duæ minutiæ AB, CD. Et ex B, in D, fiat H: at ex A, in D, fiat F; & ex C, in B, fiat G. Dico ita esse integrum ad summam minutiarum AB, CD, vt est H, ad summam numerorum F, G. [a] *Quoniam enim est, vt minutia AB, ad minutiam CD, ita F, ad G; erit componendo, vt summa minutiarum AB, CD, ad minutiam CD, ita summa numerorum F, G, ad G. Vt autem minutia CD, ad integrum, ita est G, ad H, (Nam* [b] *vt minutia CD, ad integrum, ita est C, ad D.* [c] *Et vt C, ad D, ita est G, ad H: propterea quòd C, D, ipsum B, multiplicantes fecerunt G, & H.) Igitur ex æquo erit, vt summa minutiarum AB, CD, ad integrum, ita summa numerorum F, G, ad H: Et conuertendo, vt integrum ad summam minutiarum AB, CD, ita H, ad summam numerorum F, G. quod est propositum.*

F, 10. G, 12.
A, 2. C, 4.
B 3. ⋈ D, 5.
H, 15.

AB, CD. F, G.
CD. G.
Integrum. H.

[a] 5. huius
[b] 2. huius
[c] 18. sept.

SINT rursus duæ minutiæ $\frac{2}{3}.\frac{4}{5}$. *particulæ numeri 30. cuius* $\frac{2}{3}$. *sunt 20. &* $\frac{4}{5}$. *eiusdem 24. ac proinde summa minutiarum 44. Vbi vides, ita esse integrum 30. ad hanc summam*

summam 44. vt est 15. ex denominatoribus productus ad 22. summam numerorum 10. 12. ex numeratoribus in denominatores permutato ordine productorum.

VII.

SI duæ minutiæ eundem habeant numeratorem, erit vt prior minutia ad posteriorem, ita posterioris denominator ad denominatorem prioris.

HABEANT duæ minutiæ AB, AC, eundem numeratorem A. Dico ita esse minutiam AB, ad minutiam AC, vt est denominator C, ad denominatorem B. Fiat enim D, ex A, in C: & E, ex A, in B. Quia igitur A, multiplicans C, B, fecit D, E; [a] *erit vt D, ad E, ita C, ad B. Vt aut D, ad E,* [b] *ita est minutia AB, ad minutiam AC. Igitur erit quoque minutia AB, ad minutiam AC, vt C, ad B. quod est propositum.*

D, 105. E, 35. A, 5/7. B, 7. A, 5. C, 21.

[a] 17. sept. [b] 5. huius

DVÆ minutiæ 5/7. 5/21. sunt particulæ numeri integri 42. cuius 5/7. sunt 30. & 5/21. eiusdem 10. Manifestum autem est, ita esse 30. ad 10. vt posterior denominator 21. ad priorem 7.

VIII.

MINVTIAE, quarum numeratores ad denominatores eandem habent proportionem, æquales sunt: Et æqualium minutiarum numeratores ad denominatores eandem proportionem habent. Cuius autem numerator ad denominatorem habet maiorem proportionem, illa maior

maior est: Et quæ maior est, eius numerator ad denominatorem habet proportionem maiorem.

SINT duæ minutiæ AB, CD, sitque eadem proportio A, ad B, quæ C, ad D, numeratoris ad denominatorem. Dico minutias has æquales esse. [a] *Quoniam enim est, vt A, ad B, ita minutia AB, ad integrum: Et vt C, ad D, ita minutia CD, ad idem integrum: vt autem A, ad B, ita ponitur C, ad D; erit quoque minutia AB, ad integrum, vt minutia CD, ad idem integrum. Æquales ergo sunt minutiæ AB, CD. quod est propositum.*

A, 3. B, 4. C, 9. D, 12.

[a] 2. huius

SED sint iam æquales minutiæ AB, CD. Dico esse, vt A, ad B, ita C, ad D. Cum enim æquales sint minutiæ, erit vt minutia AB, ad integrum, ita minutia CD, ad idem integrum. [b] *Est autem, vt minutia AB, ad integrum, ita A, ad B; Et vt minutia CD, ad integrum, ita C, ad D. Igitur erit quoque, vt A, ad B, ita C, ad D. quod est propositum.*

[b] 2. huius

DEINDE sit maior proportio A, ad B, quàm C, ad D. Dico maiorē esse minutiam AB, quàm CD. [c] *Cum enim sit, vt A, ad B, ita minutia AB, ad integrū; & vt C, ad D, ita minutia CD, ad idem integrum; ponatur autem maior proportio A, ad B, quàm C, ad D; erit quoque maior proportio minutiæ AB, ad integrum, quàm minutia CD, ad idem integrum. Maior ergo est minutia AB, quàm minutia CD. quod est propositum.*

A, 3. B, 4. C, 2. D, 3.

[c] 2. huius

VERVM sit iam minutia AB, maior, quàm minutia CD. Dico maiorem esse proportionem A, ad B, quàm C, ad D. Erit enim maior proportio minutiæ AB, maioris ad integrum, quàm minutiæ CD, minoris ad idem integrum. [d] *Cū ergo sit, vt minutia AB, ad integrum, ita A, ad B; & vt minutia CD, ad integrum, ita C, ad D: erit quoque maior proportio A, ad B, quàm C, ad D. quod est propositum.*

[d] 2. huius

MINVTIARVM 3/4. 9/12. integer numerus sit 24. cuius tā 3/4. q̄ 9/12. sunt 18. ac proinde æquales sunt minutiæ 3/4. 9/12. At 2/3 eiusdem numeri 24. sunt 16. vbi manifestum est, nume-

rum 18. maiorem esse numero 16. ideoq; minutiam $\frac{3}{4}$. maiorem esse minutia $\frac{2}{3}$.

IX.

MINVTIAE, quarum numeratores eandem proportionem habent, quam denominatores: sunt æquales: Et minutiarum æqualium numeratores eandem habent proportionem, quam denominatores. Cuius autem numerator maiorem proportionem habet, quàm denominator, illa maior est: Et maioris numerator maiorem habet proportionem, quàm denominator.

SINT duæ minutiæ AB, CD, sitq; eadem proportio A, ad C, quæ B, ad D. Dico minutias ipsas æquales esse. Ertt enim permutando, vt A, ad B, ita C, ad D: [a] ac proinde minutiæ æquales erunt. quod est propositum.

A, 6. C, 2.
B, 9. D, 3.

a 8. huius

SED sint iam minutiæ æquales AB, & CD. Dico ita esse A, ad C, vt B, ad D. [b] Erit enim vt A, ad B, ita C, ad D. Igitur permutando, vt A, ad C, ita B, ad D. quod est propos.

b 8. huius

DEINDE sit maior proportio A, ad C, quàm B, ad D. Dico minutiam AB, maiorem esse minutia CD. Erit enim permutando quoque maior proportio A, ad B, quàm C, ad D, [c] ac propterea maior erit minutia AB, quàm CD. quod est propositum.

A, 6. C, 3.
B, 9. D, 5.

c 8. huius

VERVM sit iam minutia AB, maior quàm CD. Dico maiorem proportionem esse A, ad C, quàm B, ad D. [d] Erit enim maior proportio A, ad B, quàm C, ad D: ideoque & permutando maior proportio erit A, ad C, quàm B, ad D. quod est propositum.

d 8. huius

SINT duæ minutiæ $\frac{6}{9}$. $\frac{2}{3}$. partes integri numeri 90. vbi vides minutiam $\frac{6}{9}$. hoc est, 60. æqualem esse minutiæ $\frac{2}{3}$. id est, numero 60. At vero minutiam eandem $\frac{6}{9}$. id est, 60. maiorem esse minutia $\frac{3}{5}$ hoc est, numero 54.

X.

DVAS minutias diuersarum denominationum ad alias duas eiusdem denominationis illis æquales reducere.

DVÆ minutiæ AB, CD, habeant dissimiles denominatores B, D. Fiat E, ex A, in D; & F, ex C, in B; & G, ex B, in D. Dico minutias EG, FG, quarũ numeratores E, F & denominator idem G, esse æquales minutijs AB, CD. Quoniam enim A, B, multiplicantes D, faciunt E, G; [a] erit vt A, ad B, ita E, ad G. [b] Quare minutiæ AB, EG, æquales erunt. Eodem modo, quia C, D, multiplicantes B, faciunt F, G, [c] erit vt C, ad D, ita F, ad G. [d] Igitur minutiæ CD, FG, æquales erunt. quod est propositum.

E, 10. F, 9.
A, 2. C, 3.
B, 3. D, 5.
G, 15.

a 18. sept.
b 8. huius
c 18. sept.
d 9. huius

XI.

INTEGRVM numerum quemcumque ad dati denominatoris minutiam reducere.

SIT primum A, integrum 1. reducendum ad minutiam, cuius denominator C. Sumatur numerator B, denominatori C, æqualis. Dico minutiã BC, vnitati A, æqualem esse. [e] Quia enim est, vt B, ad C, ita minutia BC, ad integrum A: Est autem B, ipsi C, æqualis. Igitur & minutia BC, integro A, id est, vnitati, erit æqualis. quod est propositum.

A, 1. B, 6. C, 6.

e 2. huius

DEINDE sit integer numerus A, reuocandus ad minutiam, cuius denominator C. Ex A, in C, fiat B, numerator.

tor. Dico minutiã BC, integro A, aequalem esse. Supponatur enim integro A, vnitas D, vt fiat minutia AD, tot vnitatibus aequalis, quoties vnitas est in A. Quia igitur ex A, in C, fit B; erit ex defin. multiplicationis, ita B, ad C, vt A, ad D, vnitatem. Cum ergo minutiarum AD, EC, numeratores A, B, ad denominatores D, C, eandem proportionem habeant, [a] ipsa inter se aequales erunt. Quare cum minutia AD, sit integro A, aequalis, ob denominatorem qui est vnitas; erit quoque minutia BC, eidem integro A, aequalis. quod est propositum.

A, 7. B, 42.
D, 1. C, 6.

[a] 8. huius

XII.

DATAM minutiam duplare, ac dimidiare.

SIT primum minutia AB, duplanda. Dupletur numerator A, vt fiat numerator C, manente eodem denominatore B: vel denominator B, quando par est, dimidietur, vt fiat denominator D, manente eodem numeratore A. Dico vtramque minutiam CB, AD, duplam esse minutiae AB. Cum enim minutiae AB, CB, eundem habeant denominatorem; [b] erit vt C ad A, numerator ad numeratorem, ita CB, ad AB, minutia ad minutiam. Est autem C, ipsius A, duplus ex constructione. Igitur & minutia CB, minutiae AB, dupla erit. quod est propositum.

A, 3. C, 6. A, 3.
B, 8. B. 8. D, 4.

[b] 4. huius

RVRSVS quia minutiae AB, AD, eundem habent numeratorem; [c] erit vt B, ad D, denominator ad denominatorem, ita AD, ad AB, minutia ad minutiam. Est autem B, ipsius D, duplus, per constructionem. Igitur & minutia AD, minutiae AB, dupla erit. quod est propositum.

[c] 7. huius

DEINDE dimidianda sit minutia AB. Duplatur denominator B, vt fiat denominator C, manente eodem numeratore A: Vel numerator A, quando par est, dimidietur, vt fiat numerator D, manente eodem denominatore B. Dico vtrãq; minutiam AB, DB, dimidium esse minutiae AB. Cum enim minutiae AB, AC, eundem habeant numeratorem; [a] erit vt B, ad C, denominator ad denominatorem, ita AC, ad AB, minutia ad minutiam. Cum ergo B, sit per constructionem ipsius C, dimidium; erit & minutia AC, minutiae AB, dimidium. quod est propositum.

A, 6. A, 6. D, 3.
B, 11. C, 22, B, 11.

[a] 7. huius

RVRSVS cum minutiae AB, DB, habeant eundem denominatorem; [b] erit vt D, ad A, numerator ad numeratorem, ita DB, ad AB, minutia ad minutiam. Cum ergo D, sit ipsius A, dimidium, ex constructione; erit & minutia DB, minutiae AB, dimidium. quod est propositum.

[b] 4. huius

EODEM modo minutia data triplicabitur, quadruplicabitur, &c. si vel numerator triplicetur, quadruplicetur, &c. eodem manente denominatore; vel (quando fieri potest) si denominatoris accipiatur pars tertia, quarta, &c. manente eodem numeratore.

SIC etiam datae minutiae sumetur pars tertia, quarta, &c. si denominator triplicetur, quadruplicetur, &c. manente eodem numeratore; vel (quando fieri potest) si numeratoris tertia pars, quarta, &c. sumatur. Quod eodem modo demonstrabitur.

XIII.

MINVTIA minutiae aequalis est minutiae simplici, cuius numerator ex multiplicatione mutua numeratorum, denominator vero ex mutua denominatorum multiplicatione procreatur.

SIT enim AB, minutia minutiae CD, respectu integri numeri E, siue vnitatis E, & valorem huius minutiae minutiae exprimat simplex minutia K. Fiat F, ex A, in C; & G, ex B, in D. Dico datam minutiam minutiae aequalem esse simplici minutiae FG, respectu integri E, cuius videlicet numerator F, & denominator G. Fiat enim rursus H, ex C, in B. Et

[a] 2. huius

[b] 18. sept.

[c] 2. huius

[d] 17. sept.

[e] 2. huius

[a] *Et quoniam est, vt A, ad B, ita minutia A B, ad suum integrum, nimirum ad minutiam C D, cuius integrum est E:* [b] *Item vt A, ad B, ita est F, ad H; quòd A, B, ipsum C, multiplicantes faciãt F, H: Erit quoque, vt minutia A B, ad minutiam C D, ita F, ad H. Rursus* [c] *quia est, vt C, ad D, ita minutia C D, ad suum integrum E:* [d] *Item vt C, ad D, ita est H, ad G; quod B, ipsos C, D, multiplicans fecerit H, G: Erit quoque vt C D, minutia ad suum integrum E, ita H, ad G. Quoniã igitur est, vt minutia A B, ad minutiam C D, ita F, ad H: Et vt minutia C D, ad E, integrũ, ita H, ad G; erit ex æquo, vt A B, minutia minutiæ C D, ad integrum E, ita F, ad G. Vt autem A B, minutia minutiæ C D, ad integrum E, ita est simplex minutia K, ad idem integrum E; quòd simplex minutia K, æqualis posita sit datæ minutiæ A B, minutiæ C D; cum eius valorem respectu integri E, exprimat. Igitur erit quoque, vt F, ad G, ita minutia simplex K, ad integrum E.* [e] *Cum ergo quoque sit, vt F, ad G, ita minutia F G, ad idem suum integrum E; æquales erunt minutiæ simplici K, & F G: ac proinde cum minutia K, æqualis sit datæ minutiæ minutiæ, erit quoque simplex minutia F G, æqualis datæ minutiæ A B, respectu minutiæ C D, cuius integrum E, quod est propositum.*

F, 6.	H, 9.				
A, 2.	C, 3.	E, 1.			
B, 3.	D, 4.	E, 24.			
G, 12.	K, $\frac{1}{2}$.				

SIT $\frac{2}{3}$. minutia minutiæ $\frac{3}{4}$. respectu integri 24. Huius numeri $\frac{3}{4}$. sunt 18. & huius numeri $\frac{2}{3}$. sunt 12. qui numerus est $\frac{1}{2}$. dati integri numeri 24. Manifestum autem est, si tam numeratores 2. 3. inter se multiplicentur, quàm denominatores 3. 4. procreari minutiam $\frac{6}{12}$. quæ huic $\frac{1}{2}$. æquivalet qualis nimirum erat numerus 12. respectu numeri integri 24.

XIIII.

MINVTIAM minutiæ, aut minutiam minutiarum ad simplicem minutiam reducere.

SIT primum A B, minutia minutiæ C D. Ex A, in C, fiat E; & ex B, in D, fiat F. [a] *Et quoniam minutia E F, exprimit valorem minutiæ A B, respectu minutiæ C D; reducta erit data minutia minutiæ ad simplicem minutiam E F. quod est propositum.* [a] 13. huius

	E, 6.	
A, 2.	C, 3.	
B, 3.	D, 4.	
	F, 12.	

DEINDE sit A B, minutia minutiarum C D, E F, ita vt C D, sit minutia minutiæ E F; & A B, minutia minutiæ C D. Fiat G, ex A, in C; & H, ex B, in D. Item I, ex G, in E; & K, ex H, in F; atq; ita deinceps, si plures sint minutiæ, numeri vltimo loco producti I, K, in numeros sequentis minutiæ ducantur. Dico minutiam I K, cuius numerator I, & denominator K, datæ minutiæ minutiarum æqualem esse. [b] *Nam minutia G H, æqualis est minutiæ A B, minutiæ C D, respectu minutiæ E F, tãquam integri cuiusdam.* [c] *Item minutia I K, æqualis est minutiæ G H, (hoc est, minutiæ A B, minutiæ C D,) minutiæ E F, respectu integri, cuius E F, est minutia; & sic deinceps, si plures sint minutiæ. Quare minutia I K, ex numeris vltimo loco productis constituta, æqualis est datæ minutiæ minutiarum. quod est propositum.*

	G, 6.	I, 6.			
A, 2.	C, 3.	E, 1			
B, 3.	D, 4.	F, 2.			
	H, 12.	K, 24.			

[b] 13. huius

[c] 13. huius

SIT $\frac{2}{3}$. minutia minutiarum $\frac{3}{4}$. $\frac{1}{2}$. respectu integri 24. Huius numeri $\frac{1}{2}$. est numerus 12. & huius numeri $\frac{3}{4}$. sunt 9. Huius denique $\frac{2}{3}$. sunt 6. qui numerus est $\frac{1}{4}$. totius integri 24. Liquido autem constat, si tam numeratores 2. 3. 1. inter se multiplicentur, quàm denominatores 3. 4. 2. gigni minutiam $\frac{6}{24}$. quæ æqualis est minutiæ $\frac{1}{4}$. qualis nimirum pars erat numerus 6. respectu integri 24.

XV.

DATIS duabus minutijs, alterutram earum

rum ad aliam æqualem reducere, ità vt alterius numeri numeros huius inuentæ numerent per numeros ex numeratore datæ minutiæ reductę in denominatorem alterius minutiæ datæ, & ex numeratore alterius huius minutiæ datæ in denominatorem illius reductę, productos.

SINT duæ minutiæ A B, C D, quarum A B, *ad aliam æqualem reducenda sit, cuius numeratorem numerator C, metiatur per numerum ex A, in D, productum; denominatorem vero denominator D, metiatur per numerum ex C, in B, productum. Fiat F, ex C, in D; & ex F, in A, B, fiant G, H. Itę ex A, in D, fiat K; & L, ex C, in B. Dico minutiam G H, minutiæ A B, æqualem esse; & C, metiri G, per K, ex A, in D, productum; & D, metiri H, per L, ex C, in B, productum. Quoniam enim F, multiplicãs A B, facit G, H,* [a] *erit vt* A, *ad* B, *ita* G, *ad* H, [b] *ac proinde minutiæ* A B, G H, *æquales erunt. Deinde quia* C, *multiplicans* D, *facit* F, [c] *metietur* C, *ipsum* F, *per* D: [d] *Metitur autem & vnitas ipsum* D, *per* D. *Eadem igitur pars est* C, *ipsius* F, *quæ vnitas ipsius* D. *Cum ergo vnitas sit ipsius* D, *pars à* D, *denominata, erit quoque* C, *ipsius* F, *pars à* D, *denominata. Eadem ratione erit* F, *ipsius* G, *pars ab* A, *denominata; propterea, quòd* G, *fit ex* F, *in* A. *Quia igitur* C, *minutia est minutiæ* F, *respectu integri* G, *suntque numeratores, vnitates; & denominatores, numeri* D, A, *à quibus partes* C, F, *denominantur;* [e] *constituet* C, *minutia minutiæ* F, *respectu integri* G, *minutiam simplicem* M, *(quas minutias* G, F, M, *seorsum scripsimus) respectu eiusdem integri* G; *cuius numirum numerator ex numeratoribus minutiarum* C, F, *& denominator ex earundem denominatoribus producitur. Quare cum numeratores gignant vnitatem, & denominatores numerum* K; *(quod numeratores sint vnitates, denominatores autem numeri* D, A, *à quibus partes* C, F, *denominantur, & ex quorum multiplicatione factus est numerus* K, *) constituet minutia* C, *minutiæ* F, *respectu integri* G, *minutiã simplicẽ eiusdẽ integri* G, *cuius numerator est unitas, & denominator numerus* K, *qualis est minutia* M: *ac proinde* C, *numerator minutiæ datæ* C D, *qui constituit* C, *minutiam minutiæ* F, *respectu integri* G, *pars erit ipsius integri* G, *à numero* K, *denominata. Quocirca numerus* C, *ipsum* G, *metietur per* K; *toties nimirum sumptus, quoties vnitas est in* K, *numero. Eadem prorsus ratione demonstrabimus,* D, *metiri ipsum* H, *per* L, *numerum. Quod est propositum.*

G, 24. K, 8.

A, 2/3 F, 12. C, 3/4 D, 4.

H, 36. L, 9.

C, 1/4. F, 1/2. M, 1/8.

[a] 17. sept.
[b] 8. huius
[c] 7. pron.
[d] 5. pron.
[e] 13. huius

XVI.

DVAE minutiæ, quarum numeratores in denominatores vicissim ducti gignũt numeros æquales, æquales sunt: Et minutiarũ æqualium numeratores in denominatores vicissim ducti gignunt æquales numeros. Cuius vero numerator iu denominatorem alterius ductus maiorem numerum gignit, illa maior est: Et maioris minutiæ numerator in denominatorem alterius ductus maiorem numerum producit.

SINT duæ minutiæ A B, C D: & ex A, in D, fiat E; atque ex C, in B, fiat F: sintque primum numeri E, F, æquales. Dico minutias A B, C D, æquales esse. Quoniam enim numerus E, factus ex A, primo in D, quantum æqualis est numero F, facto ex C, secundo in B, tertiij; [a] *erit vt A, primus ad C, secundũ, numerator ad numeratorem, ita B, tertius ad D, quartum, denominator ad denominatorem.* [b] *Quare minutiæ A B, C D, æquales sunt. VEL sic.* [c] *Quoniam est, vt E, ad F, ita minutia A B, ad minutiam C D; Est autem E, ipsi F, æqualis; erit quoque minutia A B, minutiæ C D, æqualis. quod est propositum.*

E, 24. F, 24.

A, 2/3 × C, 8/12 B, 3. D, 12.

[a] 19. sept.
[b] 9. huius
[c] 5. huius

SED

SED sint iam æquales minutiæ AB, CD. Dico numerũ E, æqualem quoque esse numero F. Nam ob æqualitatem minutiarum [a] erit, vt A, ad C, numerator ad numeratorem, ita B, ad D, denominator ad denominatorem. [b] Quapropter idẽ numerus fiet ex A, primo in D, quartum, qui ex C, secundo in B, tertium; ac proinde æquales erunt E, & F, numeri. VEL sic. [c] Quoniam est, vt minutia AB, ad minutiã CD, ita E, ad F; ponuntur autem minutiæ æquales; erunt quoque numeri E, F, æquales. quod est propositum.

[a] 9. huius
[b] 19. sept.
[c] 5. huius

DEINDE sit E, numerus maior numero F. Dico minutiam quoque AB, maiorem esse minutia CD. Cum enim ex A, in D, fiat numerus E, maior quàm F; signetur F, ex minore numero quàm A, in D, nimirum ex G, in D. Quia igitur idem numerus F, fit ex G, primo in D, quartum, & ex C, secundo in B, tertium, [d] erit vt G, primus ad C, secundum, ita B, tertius ad D, quartum: Est autem maior proportio A, ad C, quàm G, ad C; q. p. A, maior sit quàm G. Igitur maior quoque erit proportio A, ad C, quàm B, ad D; [e] ac proinde minutia AB, maior erit, quàm minutia CD. VEL sic. [f] Quoniam est, vt E, ad F, ita minutia AB, ad minutiam CD; Est autem E, maior quàm F; erit quoque minutia AB, maior quàm minutia CD. quod est propositum.

E, 24, F, 21.
G. 1 3/4 A, 2 × C, 7
B, 3 D, 12.

[d] 19. sept.
[e] 9. huius
[f] 3. huius

VERVM sit iam minutia AB, maior quàm minutia CD. Dico & numerum E, numero F, esse maiorem. Cum enim maior sit minutia AB, quàm minutia CD, [g] erit maior proportio A, ad C, quàm B, ad D. Minor ergo numerus, quàm A, habebit ad C, eandẽ proportionem, quam B, ad D, qui sit G. [h] Idem ergo numerus fiet ex G, primo in D, quartus, qui ex C, secundo in B, tertium. Cum ergo ex A, in D, maior fiat, quàm ex G, in D; propterea quòd A, maior est quàm G; erit quoque E, factus ex A, in D, maior, quàm F, ex C, in B, genitus. VEL sic. [i] Quoniam est, vt minutia AB, ad minutiam CD, ita E, ad F: Est autem AB, minutia maior quàm minutia CD; erit quoq; E, maior quàm F. quod est propositum.

[g] 9. huius
[h] 19. sept.
[i] 3. huius

ATQVE hæc est quoque demonstratio eius regulæ, quam in Arithmetica præscripsimus ad dignoscendum, vtra duarum

duarum minutiarum propositarum maior sit. Id quod etiam ad 5. propositionem monuimus.

XVII.

DATAM minutiam ad minimos terminos reducere.

SIT minutia AB, ad minimos reuocanda terminos. Si igitur A, & B, sint inter se primi, non poterit minutia AB, ad minores terminos reuocari, sed ipsa iam in minimis erit terminis constituta. Reducatur enim si fieri potest, ad minores terminos C, D, ita vt minutia CD, minutiæ AB, sit æqualis. [a] Quoniam igitur est, vt A, ad B, ita C, ad D; sintque C, D, numeri minores numeris AB; non erunt A, B, minimi termini in sua proportione: [b] sunt autem & minimi, cum primi inter se sint. quod est absurdum.

A, 11. C.
B, 12. D.

[a] 8. huius
[b] 23. sept.

SI vero A, B, non sint inter se primi; [c] sit eorum maxima mensura C, qua metiatur A, per D; & B, per E. Dico minutiam DE, cuius numerator D, & denominator E, æqualem esse datæ minutiæ AB, & in minimis terminis constitutam. Quoniam enim C, metitur A, B, per D, E; [d] producentur A, B, ex C, in D, E. [e] Quare erit, vt A, ad B, ita D, ad E, [f] ac propterea minutiæ AB, DE, æquales erunt. Deinde quia C, maxima mensura numerorum A, B, metitur ipsos per D, E; erũt ex coroll. propos. 35. lib. 7. D, E, minimi in proportione A, ad B. Quod est propositum.

A, 36. D, 3
B, 48. E, 4.
C, 12.

[c] 2. sept.
[d] 9. pron.
[e] 17. sept.
[f] 8. huius

XVIII.

DATAM minutiam ad aliam æqualem datæ denominationis, quando id fieri potest, reuocare.

SIT data minutia AB, reuocanda ad æqualem aliam,

cuius denominator datus sit C. Ex A, numeratore in denominatorem datum C, fiat D, quem metiatur B, denominator datæ minutiæ per E. Dico minutiam

A, 2. B, 4. C, 12. D, 36. E, 9

EC, cuius numerator E, & denominator C, datus, æqualem esse minutiæ AB, datæ. Quia enim B, metitur D, per E, [a] fiet D, ex B, in E: Factus est autem idem D, ex A, in C. [b] Igitur erit, vt A, primus ad B, secundum, ita E, tertius ad C, quartum; [c] ideoque minutiæ AB, EC, æquales erunt. quod est propositum.

[a] 9. pron.
[b] 19. sept.
[c] 8. huius

QVOD si B, non metiatur D, ex A, in C, procreatum, non poterit data minutia AB, reduci ad denominationem datam C. Reducatur enim, si fieri potest, ad minutiam EC. Quia ergo minutiæ AB, EC, æquales sunt; [d] erit vt

A, 3. B, 4. C, 10. D, 30. E, —

A, ad B, ita E, ad C. [e] Idem igitur numerus fiet ex A, primo in C, quartum, qui ex B, secundo in E, tertium, videlicet numerus D, factus ex A, in C. [f] Igitur B, metietur D, per E. quod est absurdum. Ponitur enim B, ipsum D, non metiri.

[d] 8. huius
[e] 19. sept.
[f] 7. pron.

XIX.

QVANDO minor numerus per maiorem diuiditur, numerus Quotiens est minutia, cuius numerator est numerus minor diuisus, denominator vero maior numerus diuidens.

SIT minor numerus A, diuidendus per maiorem B. Dico Quotientem esse minutiam AB,

A, 6. B, 11. A, 6. B, 11.

cuius numerator A, & denominator B. [g] Quoniam enim est, vt A, ad B, numerus diuisus ad diuidentem, hoc est, vt numerator ad denominatorem, ita minutia AB, ad integrum, hoc est, ad vnitatem; erit ex defin. Diuisionis minutia AB, Quotiens diuisionis numeri A, per numerum B. quod est propositum.

[g] 2. huius

HINC sit, si diuiso numero integro maiore per integrum numerum minorem, aliquid supersit; Quotienti integro inuento addendam adhuc esse minutiam, cuius numerator sit numerus ex diuisione reliquus; denominator vero, numerus diuidens. Nam reliquus ille numerus, qui necessario minor est numero diuidente, diuidendus adhuc est per eundem numerum diuidentem, qui maior est. Verbi gratia. Diuiso numero 23. per 4. Quotiens integer est 5. & supersunt 3. adhuc diuidenda per 4. [a] Fit ergo minutia $\frac{3}{4}$. ita vt totus Quotiens sit $5\frac{3}{4}$.

[a] 19. huius

XX.

MINVTIAS plures in vnam summam colligere.

SINT primum addendæ duæ minutiæ AB, CB, eiusdem denominationis. Ex A, & C, numeratoribus fiat summa D, cui idem denominator B, supponatur. Dico minutiam DB, esse summam ex additione minutiarum AB, CB, collectam. Quoniam enim minutiæ eundem habent denominatorem; [b] erit vt A, ad C, ita minutia AB, ad minutiam CB: Et componendo, vt A, C, simul ad C, ita minutiæ AB, CB, simul ad minutiam DB. Cum ergo A, & C, simul æquales sint ipsi D, ex constructione; erunt quoque minutiæ AB, CB, simul æquales minutiæ DB. quod est propositum.

A, 3. B, 10. C, 4. B, 10. D, 7. B, 10.

[b] 4. huius
[c] 4. huius

DEINDE sint addendæ duæ minutiæ AB, CD, diuersarum denominationum. Ducatur A, numerator prioris in D, denominatorem posterioris; & C, numeratorem posterioris in B, denominatorem prioris, collectaque sit summa E, ex duobus illis productis, cui supponatur denominator F, ex multiplicatione mutua denominatorũ B, D, procreatus. Dico

A, 2. B, 3 ⋈ C, 3. D, 4. E, 17. F, 12.

A, 2 / B, 3 ✕ C, 3 / D, 4. E, 17. F, 12.

minutiam EF, esse summæ ex datis duabus minutijs AB, CD, collectam.[a] Quoniam enim est, vt integrum ad summam duarum minutiarum AB, CD, ita F, ex denominatoribus productus ad E, summam productorum ex numeratoribus in denominatores vicissim ductis; erit conuertendo, vt summa minutiarum AB, CD, ad integrum, ita E, ad F:[b] Vt autem E, ad F, ita quoque est minutia EF, ad idem integrum. Igitur erit, vt summa minutiarum AB, CD, ad integrum, ita minutia EF, ad idem integrum. Quapropter summa minutiarum AB, CD, æqualis erit minutiæ EF: ac proinde minutia EF, summa erit ex minutijs AB, CD, collecta. quod est propositum. VEL sic. Quoniam ex multiplicatione numeratorum in denominatores vicissim, & ex multiplicatione denominatorum inter se, fiunt duæ minutiæ eiusdem denominationis, minutijs AB, CD, æquales, vt ex demonstratione propos. 10. constat: si summa E, productorum ex numeratoribus in denominatores supponatur F, communis denominator ex denominatoribus procreatus, facta erit minutia EF, summa minutiarum AB, CD, hoc est, duarum illarum eiusdem denominationis ad quas AB, CD, reductæ sunt, vt initio huius propositionis est demonstratum.

[a] 6. huius

[b] 2. huius

IAM vero datis pluribus minutijs, addenda primum erunt duæ primæ: deinde hæc summa cum tertia coniungenda, atque hæc summa cum quarta, & sic deinceps, donec omnes absoluantur.

QVOD si dentur integra cum minutijs, addenda erunt integra seorsum, & minutiæ seorsum.

SINT verbi gratia, $\frac{2}{3}$. & $\frac{3}{4}$. minutiæ huius integri 60. cuius $\frac{2}{3}$. sunt 40. & $\frac{3}{4}$. sunt 45. Ex 40. & 45. fit summa 85. hoc est, totus numerus integer 60. & insuper 25. quæ partes, quæ faciunt $\frac{5}{12}$. integri 60. quemadmodum ex $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{4}$. collecta est summa $\frac{17}{12}$. id est, semel 1. & insuper $\frac{5}{12}$.

ITA etiam summa minutiarum $\frac{1}{3}$. $\frac{4}{9}$. est $\frac{21}{27}$. hoc est in minimis terminis $\frac{7}{9}$. Si igitur illarum minutiarum integrum sit 36. erit $\frac{1}{3}$. ipsius 12. at $\frac{4}{9}$. eiusdem, 16. Vbi vides ex 12. & 16. conflici 28. hoc est $\frac{7}{9}$. ipsius integri 36.

MINV-

XXI.

MINVTIAM minorem ex maiore detrahere.

EX maiore minutia AB, detrahenda sit minor CB; sintque primum hæ minutiæ eiusdem denominationis. Detracto numeratore C, minoris minutiæ ex A, numeratore maioris, reliquus sit numerus D, cui idem denominator B supponatur. Dico minutiam DB, reliquam esse post detractionem minutiæ CB, ex minutia AB. Quia enim C, ex A, subtractus relinquit D; componetur A, ex C, & D. Minutia ergo AB, cuius numerator A, ex numeratoribus C, D, collectus est, summa est duarum minutiarum CB, DB, vt in prima parte antecedentis propos. ostensum est. Quare detracta minutia CB, ex minutia AB; reliqua fiet minutia DB. quod est propositum.

A, 7 / B, 10. C, 3 / B, 10. D, 4 / B, 10.

DEINDE minutiæ AB, CD, habeant diuersos denominatores, detrahendaque sit minor CD, ex maiore AB. Ex C, numeratore minoris in B, denominatorem maioris fiat F, & ex A, numeratore maioris in D, denominatorem minoris fiat F: atque E, ablatus ex F, relinquat G, cui supponatur denominator H, ex mutua multiplicatione denominatorum procreatus. Dico minutiam GH, esse reliquam post detractionem minutiæ CD, ex minutia AB. Quoniam enim D, multiplicans A, B, facit F, H;[a] erit vt A, ad B, ita F, ad H:[b] vt autem A, ad B, ita est minutia AB, ad integrum, Igitur erit quoque vt F, ad H, ita minutia AB, ad integrum. Rursus quia B, multiplicans C, D, facit E, H;[c] erit vt C, ad D, ita E, ad H:[d] Vt autem C, ad D, ita est minutia CD, ad integrum. Igitur erit quoque vt E, ad H, ita minutia CD, ad integrum. Quia igitur est, vt E, primus ad H, secundum, ita minutia CD; tertius numerus ad integrum,

F, 15. E, 8.

A, 3 / B, 4 ✕ C, 2 / D, 5 G, 7 / H, 20.

[a] 17. sept.

[b] 2. huius

[c] 17. sept.

[d] 2. huius

[a] 2. huius

grum, quartum numerum; [a] Et vt G, quintus ad eundem secundum H, ita minutia G H, sextus numerus ad idem integrum, quartum numerum; erit ex 5. theor. scholij propos. 22. lib. 7. vt E, G, primus & quintus simul, ad H, secundum, ita minutiæ C D, G H, tertius & sextus numerus simul, ad integrum. Vt autem E, G, simul ad H, ita est F, ipsis E, G, æqualis, (Nam E, ex F, detractus reliquit G.) ad eundem H. Igitur erit quoque, vt F, ad H, ita minutiæ C D, G H, simul ad integrum. Cum ergo ostensum sit, vt est F, ad H, ita esse minutiam A B, ad integrum; erit quoque vt minutia A B, ad integrum, iia minutiæ C D, G H, simul ad idem integrum: ac propterea æquales erunt minutia A B, & minutiæ C D, G H, simul. Detracta igitur minutia C D, ex minutia A B, reliqua erit minutia G H. quod est propositum.

VEL sic. Quoniam ex multiplicatione numeratorum in denominatores vicissim, & ex ductu denominatorum inter se, gignuntur duæ minutiæ eiusdem denominationis minutiis datis æquales, vt ex demonstratione propos. 10. constat; si E, factus ex C, in B, detrahatur ex F, facto ex A, in D; & reliquo numero G, supponatur communis denominator H, ex denominatoribus productus, fiet minutia G H, reliqua post detractionem minutiæ C D, ex minutia A B, veluti initio huius propos. ostensum est.

[b] 11. huius

IAM vero si dentur integra vna cum minutijs, subtrahenda erunt integra seorsum ab integris, & minutia à minutia. Quòd si minutia detrahenda, maior sit, quàm ea, à qua fieri debet subtractio, [b] reducenda prius erit vnitas vna numeri integri, à quo fit subtractio, ad minutiam denominatoris minutiæ adhærētis. Vt si subtrahēda sint $6\frac{2}{5}$. ex $10\frac{1}{4}$. subtractis 6. ex 10. supersunt 4. & subductis $\frac{2}{5}$. ex $\frac{1}{4}$. superest minutia $\frac{7}{20}$. Totus ergo numerus reliquus erit $4\frac{7}{20}$. At si subtrahenda sint $4\frac{6}{7}$. ex $20\frac{3}{4}$. faciemus ex vna vnitate numeri 20. minutiam $\frac{4}{4}$. quæ cū $\frac{3}{4}$. facit $\frac{7}{4}$. remanebunt 19. integra. Subtracto ergo integro numero 4. ex 19. supersunt 15. & subducta minutia $\frac{6}{7}$. ex minutia $\frac{7}{4}$. reliqua est minutia $\frac{25}{28}$. Totus ergo reliquus numerus erit $15\frac{25}{28}$.

SINT verbi gratia $\frac{3}{4}$. & $\frac{2}{5}$. minutiæ huius numeri integri 40. Igitur si $\frac{2}{5}$. id est, 16. detrahantur ex $\frac{3}{4}$. hoc est, ex 30. supersunt 14. nimirum $\frac{7}{20}$. integri numeri 40. vt superior calculus docuit.

XXII.

MINVTIAM per minutiam multiplicare.

SIT minutia A B, per minutiam C D, multiplicanda. Ex multiplicatione numeratorum A, C, inter se fiat E, cui supponatur F, ex denominatoribus B, D, procreatus. Dico minutiam E F, gigni ex multiplicatione minutiarum A B, C D, inter se. Fiat enim G, ex E, in D; & H, ex C, in F: [a] Eritq; vt minutia E F, ad minutiam C D, ita G, ad H. Quia vero C, multiplicans A, F, facit E, H; [b] erit vt A, ad F, ita E, ad H: Et permutando, vt A, ad E, ita F, ad H. Rursus quia D, multiplicans E, & B, facit G, & F; [c] erit vt E, ad B, ita G, ad F. Ex æqualitate igitur perturbata, vt hic apparet, erit vt A, ad B, ita G, ad H. Vt autem G, ad H, ita ostendimus esse minutiam E F, ad minutiam C D: [d] Et vt A, ad B, ita est minutia A B, ad integrum, hoc est, ad 1. Igitur erit quoque vt minutia E F, ad minutiam C D, ita minutia A B, ad 1. Quapropter ex defin. Multiplicationis, minutia E F, producitur ex multiplicatione minutiæ A B, in minutiam C D. quod est propositum.

H, 60.	G, 40.		
A, 2.	C, 4	E, 8	
B, 3.	D, 5	F, 15.	
A.	G.		
E.	F.		
B.	H.		

[a] 5. huius

[b] 17. sept.

[c] 17. sept.

[d] 2. huius

QVOD si minutia per numerum integrum sit multiplicanda, supponenda erit integro numero vnitas, vt fiat quasi minutia, cuius numerator est numerus integer datus, denominator autem unitas. Ex quo fit, satis esse, si tunc numerator propositæ minutiæ per datum numerum integrum multiplicetur, & producto numero supponatur eiusdem minutiæ propositæ denominator; propterea quòd vnitas integro numero supposita in denominatorem datæ minutiæ ducta eundem denominatorem datæ minutiæ non auget. Vt si multiplicari debeat minutia $\frac{3}{4}$. per 5. fient $\frac{15}{4}$. vt hic apparet, $\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{1}$. Gignetur enim minutia $\frac{15}{4}$.

[a] 11. huius

SI vero integris minutiæ adhæreant, [a] reuocanda erunt integræ ad minutiam eiusdem denominationis cum minutia adhærente, atque ex numeratore huius minutiæ, & numeratore minutiæ adherentis vnus numerator constitui. Vt si multiplicanda sint $7\frac{2}{3}$. per $4\frac{1}{2}$. fient hæ duæ minutiæ multiplicandæ, $\frac{23}{3}$. $\frac{9}{2}$.

IAM vt multiplicationem minutiarum integris numeris accõmodemus, nõ erit minutia producta cũ integro numero assumpto conferenda, vt in additione, ac subtractione factũ est, sed cum quadrato numeri integri assumpti: quia cum comparatio inter similia fieri debeat, ex multiplicatione autem duorum numerorum inter se gignatur numerus planus, conferendus erit numerus productus cum plano totius numeri integri, hoc est, cum eius quadrato. Itaque sint $\frac{2}{3}$. $\frac{4}{5}$. minutiæ huius numeri integri 60. ex quarum multiplicatione gignitur minutia $\frac{8}{15}$. Necesse est ergo, vt $\frac{2}{3}$. numeri 60. in $\frac{4}{5}$. eiusdem faciãt numerum, qui constituat $\frac{8}{15}$. quadrati, qui ex 60. in se producitur: Id quod liquido constat. Nam $\frac{2}{3}$. numeri 60. sunt 40. & $\frac{4}{5}$. eiusdem sunt 48. At ex 40. in 48. fit numerus 1920. qui efficit $\frac{8}{15}$. numeri 3600. hoc est, quadrati ipsius 60.

XXIII.

MINVTIAM per minutiam diuidere.

SIT diuidenda minutia A B, per minutiam C D, & primum huius numeri C, D, metiantur illius numeros A, B, per E, F; ita vt diuiso A, per C, Quotiens sit E, & diuiso B, per D, Quotiens sit F. Dico minutiam E F, esse Quotientem diuisionis minutiæ A B, per minutiam C D. Quoniam enim C, metitur A, per E; & D, metitur B, per F; [b] gignetur A, ex C, in E, & B, ex D, in F. [c] Igitur minutia A B, producta est ex multiplicatione minutiæ E F, per minutiam C D: ac proinde ex definitione multiplicationis erit, vt minutia A B, ad minutiam C D, ita minutia E F, ad 1. Quocirca cum sit, vt A B, minutia diuisa ad C D, minutiam diuidentem, ita minutia E F; ad 1. erit ex defin. Diuisionis minutia E F, Quotiens diuisionis minutiæ A B, per minutiam C D, quod est propositum.

A, 12	C, 3	E, 4.					
B, 16.	D, 8.	F, 2.					
A, 6	C, 3	E, 2.					
B, 8.	D, 8.	F, 1.					
A, 3	C, 3	E, 1					
B 8.	D, 4.	F, 2.					

[b] 9. pron.
[c] 22. huius

DEINDE numeri C, D, minutiæ C D, non metiantur numeros A, B, minutiæ A B. [a] Reducatur minutia A B, ad aliam æqualem E F, cuius numeros E, F, numeri C, D, minutiæ C D, metiantur per numeros G, H, ex A, in D, & ex C, in B, productos: q̃d quidem fiet, si K, ex C, in D, procreatus ducatur in A, B, vt gignantur E, F, veluti propos. 15. ostensum est. Quoniam igitur C, D, metiuntur E, F, per G, H; erit minutia G H, Quotiens diuisionis minutiæ E F, vel A B, illi æqualis, per minutiam C D, vt initio huius propos. demonstratum est. quod est propositum.

E, 24.	A, 2	K, 12.	C, 3.	G, 8			
F, 36.	B, 3.		D, 4.	H, 9.			
E, 90	A, 6	K, 15.	C, 3	G, 30			
F. 135.	B, 9.		D, 5.	H. 27.			

[a] 15. huius

VIA vero G, H, numeri minutiæ Quotientis G H, gignuntur ex A, in D, & ex C, in B, vt dictum est, satis est ad diuisionem cuiuslibet minutiæ per quamlibet minutiam, si numerator A, minutiæ diuidendæ in D, denominatorem minutiæ diuidentis; & C, numerator minutiæ diuidentis in B, denominatorem minutiæ diuidendæ ducatur. Prior enim numerus procreatus G, dabit numeratorem, & posterior H, denominatorem Quotientis minutiæ G H. Atque hoc verum est in omnibus minutijs, siue numeri minutiæ diuidentis numeros minutiæ diuidendæ metiantur, siue non. Nam semper ex numeratore minutiæ diuidendæ in denominatorem minutiæ diuidentis, & ex numeratore minutiæ diuidentis in denominatorem minutiæ diuidendæ, procreantur duo numeri, per quos numeri minutiæ diuidentis metiuntur numeros minutiæ, ad quam minutia diuidenda secundum doctrinam propos. 15. reuocatur, vt ex eius propos. demonstratione liquet, atque in hoc apposito exemplo apparet, vbi numeri C, D, numeros A, B,

E, 48.	A, 8.	K, 6.	C, 2.	G, 4	H, 24		
F, 54.	B, 9.		D, 3.	H, 3.	L, 18.		

metiuntur

metiũtur per G, H; & numeros E, F, procreatos ex A, B in K, productum ex C, in D, ijdem numeri C, D, metiũtur per K, L: atque adeo tam minutia G H, quàm K I, Quotiens est minutiæ A B, per minutiam C D, diuisæ.

IAM vero si numerus integer diuidendus sit per minutiam, vel per numerum integrum minutia diuidenda, supponenda est ei vnitas, vt fiat quasi minutia, cuius numerator est datus numerus integer, & denominator 1. Vt si numerus 8. diuidendus proponatur per $\frac{1}{2}$. fiet Quotiens $\frac{16}{1}$. vt in apposito priori exemplo perspicuum est. Si autem minutia $\frac{1}{2}$. diuidenda sit per integrum numerum 8. fiet Quotiens $\frac{1}{16}$. vt in posteriori exemplo apparet.

8	1	16
1.	2.	1.

1	8	1
2.	1.	16.

QVOD si minutiæ adhæreant integris, reducenda erunt integra ad minutiam eiusdem denominationis cum minutia adhærente, veluti ad finem antecedentis propos. diximus.

VERVM quia non facile est memoriter tenere, ex numeratore minutiæ diuidendæ in denominatorem minutiæ diuidentis signi numeratorem Quotientis minutiæ, denominatorem autem ex numeratore minutiæ diuidentis in denominatorem minutiæ diuidendæ; satius erit ad memoriam iuuandam, loca numerorum minutiæ diuidentis inter se permutare, vt in Arithmetica tradidimus, ac deinde regulam multiplicationis vsurpare. Vt si diuidenda proponatur minutia $\frac{3}{4}$. per $\frac{2}{7}$. permutandi erunt numeri minutiæ diuidentis hoc modo $\frac{7}{2}$. Vnde Quotiens erit $\frac{21}{8}$. vt hic vides. Nam hac ratione numerator minutiæ diuidendæ semper ducitur in denominatorem minutiæ diuidentis, iuxta regulam multiplicationis, quæ præcipit, numeratores esse multiplicandos inter se, vt fiat numerator, &c.

3	7	21
4.	2.	8.

SIT integer numerus 700. cuius minutia $\frac{3}{4}$. diuidenda sit per eiusdem $\frac{2}{7}$. hoc est, numerus 525. per 200. Perspicuum autem est, diuisis 525. per 200. Quotientem esse $2\frac{5}{8}$. id est, minutiam $\frac{21}{8}$. quæ proximè inuenta est. Sic etiam si integer numerus 10. octies sumptus diuidatur per eius dimidium, nimirum per 5. Quotiens fiet 16. qui inuentus supra fuit, ex diuisione 8. per $\frac{1}{2}$.

XXIIII.

MINVTIAM in minutiam inserere.

SIT minutia A B, in minutiam C D, inserenda, sitque primum sensus, addendam esse minutiam A B, vnius particulæ minutiæ C D, ad minutiã C D: hoc est, addendas esse $\frac{3}{4}$. vnius septimæ ad $\frac{6}{7}$. Ex C, numeratore posterioris minutiæ in B, denominatorem prioris minutiæ fiat F, cui addatur A, numerator prioris, & composito numero G, supponatur denominator H, ex multiplicatione denominatorum B, D, procreatus. Dico minutiam G H, procreari ex insitione minutiæ A B, in minutiam C D, in eo sensu, quem diximus, hoc est, minutiam G H, æqualem esse minutiæ A B, respectu vnius particulæ minutiæ C D, additæ ad minutiam C D. Quoniam enim A B, minutia vnius particulæ minutiæ C D, [a] reducitur ad simplicem minutiam A H, cuius numerator idem est, qui A, productus nimirum ex vnitate in A; denominator autem numerus H, ex denominatoribus B, D, procreatus, vt in apposito hoc exemplo apparet. Item minutiæ F H, minutiæ C D, æqualis est, habens eundem denominatorem H, ex denominatoribus B, D, productum; numeratorem vero F, ex C, numeratore posterioris minutiæ in B, denominatorem prioris productum: (Cum enim B, in C, D, faciat F, H;

[a] 14. huius

A, 3	C, 6	G, 27.	
B, 4.	D, 7.	H, 28.	

A, 3	1	A, 3
B, 4.	D, 7.	H, 28.

F, H; [a] erit vt C, ad D, ita F, ad H; [b] ac propterea minutia C D, F H, æquales erunt.) efficitur, minutiam G H, cuius numerator G, ex numeratoribus F, A, minutiarum F H, A H, componitur, (nimirum ex numero ex C, in B, producto, & ex A,) denominator autem H, idem, qui earundem minutiarum F H, A H; efficitur, inquam, minutiam G H, summam esse minutiarum F H, A H, vt initio propos. 20. ostensum est; hoc est, sumā ex minutia A B, respectu vnius particulæ minutiæ C D, quæ minutiæ A H, ostensa est æqualis, & ex minutia C D, quæ ostensa est æqualis minutiæ F H, collectam. Minutia igitur G H, procreatur ex insitione minutiæ A B, in minutiam C D; id est, æqualis est minutiæ A B, vnius particulæ minutiæ C D, & minutiæ C D, simul. quod est propositum.

[a] 17. sept.
[b] 8. huius

IAM vero si plures minutiæ A B, C D, E F, G H, sint inserendæ, hoc est, si minutia A B, vnius particulæ minutiæ C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H: & minutia C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H: & minutia E F, vnius particulæ minutiæ G H, addi debeant ad minutiam G H, ita agendum erit. Ex G, numeratore postremæ minutiæ G H, in F, denominatorem penultimæ minutiæ E F, fiat numerus, cui addatur E, numerator eiusdē penultimæ minutiæ E F, vt fiat numerus K, Deinde producto ex K, in D, denominatorem antepenultimæ minutiæ C D, addatur C, numerator eiusdem minutiæ C D, vt fiat M. Producto quoque ex M, in B, denominatorem proximè antecedentis minutiæ A B, adijciatur A, numerator eiusdem minutiæ A B, vt fiat P: Atque ita deinceps ducatur semper vltimus numerus conflatus in denominatorem proximè antecedentis minutiæ; productoq; numerator eiusdem proximè antecedentis minutiæ adijciatur, donec nulla minutia supersit. Numero autem P, qui vltimo loco conflatus est, supponatur numerus Q, ex denominatoribus inter se multiplicatis procreatus, ducendo primum H, in F, vt fiat L; deinde L, in D; vt fiat N; post

P, 119. M, 59. K, 14.
A, 1 C, 3 E, 2 G, 4
B, 2. D, 4. F, 3. H, 5.
Q, 120. N, 60. L, 15,

hæc N, in B, vt fiat Q, &c. Dico minutiam P Q, ex insitione datarum minutiarum produci in eo sensu, quem exposuimus. Nam vt in duabus minutijs ostensum est, minutia K L, producitur ex insitione minutiæ E F, in minutiam G H, hoc est, æqualis est summæ ex minutia E F, vnius particulæ minutiæ G H, & ex minutia G H, collectæ. Deinde minutia C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H, [a] facit minutiam simplicem, cuius numerator C, (productus nimirum ex C, in vnitatem bis posita hoc modo, 3. 1. 1.) & denominator N, ex D, in L, hoc est, ex multiplicatione denominatorum H, F, D, procreatus: Minutia quoque, cuius numerator est numerus ex D, in K, productus, denominator autem idem numerus N, ex D, in L, productus, [b] æqualis est minutiæ K L: [c] quod numeratores harum minutiarum ad denominatores eandem proportionem habeant; quippe cum D, in K, L, gignat numeros alterius illius minutiæ. Igitur, cum per ea, quæ ad initium propos. 20. demonstrauimus, minutia M N, cuius numerator M, ex numeratore C, & ex numero, qui fit ex D, in K, conflatur, æqualis sit summæ collectæ ex minutia, cuius numerator C, & denominator N, atque ex minutia cuius numerator ex D, in K, producitur, denominator vero N; æqualis quoque erit eadem minutia M N, summæ collectæ ex minutia G H, & ex minutia E F, vnius particulæ minutiæ G H, atque ex minutia C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H. Rursus minutia A B, vnius particulæ minutiæ C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H, [d] facit minutiam simplicem, cuius numerator A, & denominator Q, ex B, in N, id est, ex multiplicatione denominatorum H, F, D, B, productus: Minutia quoque, cuius numerator est numerus ex B, in M, procreatus, denominator vero idem numerus Q, ex B, in N, productus, [e] æqualis est minutiæ M N, [f] quod numeratores harū minutiarum ad denominatores eādem proportionem habeāt, quippe cum B, in M, N, gignat numeros alterius illius minutiæ. Cum minutia igitur P Q, cuius numerator P, ex numero A, & ex numero, qui fit ex B, in M, conflatur, æqualis sit summæ collectæ ex minutia, cuius numerator A, & denominator Q, atque ex minutia, cuius numerator ex B, in M, gignitur, denominator vero Q, vt initio propos. 20. monstratum est;

[a] 14. huius
[b] 8. huius
[c] 17. sept.
[d] 14. huius
[e] 8. huius
[f] 17. sept.

est; æqualis quoque erit eadem minutiæ P Q, summæ collectæ ex minutia GH, & ex minutia EF, vnius particulæ minutiæ GH; & ex minutia CD, vnius particulæ minutiæ EF, vnius particulæ minutiæ GH; & ex minutia AB, vnius particulæ minutiæ CD, vnius particulæ minutiæ EF, vnius particulæ minutiæ CD, quod est propositum. Eademque ratio est de pluribus.

SIT deinde sensus, addendam esse minutiam AB, totius minutiæ CD, ad minutiam CD. Ex C, numeratore posterioris minutiæ in B, denominatorem prioris fiat F, cui addatur E, ex numeratoribus A, C, productus, conflatoque numero G, supponatur H, ex denominatoribus B, D, procreatus. Dico minutiam GH, produci ex insitione minutiæ AB, in minutiam CD, in eo, quem diximus, sensu; hoc est, minutiam GH, æqualē esse summæ collectæ ex minutia CD, & ex minutia AB, minutiæ CD. Quoniam enim minutia AB, minutiæ CD, [a] reducitur ad minutiam simplicem EH, cuius numerator est E, ex numeratoribus A, C, procreatus, denominator autem H, ex denominatoribus B, D, productus, vt exemplum appositum demonstrat: [b] Minutia quoque FH, æqualis est minutiæ CD; [c] quòd numeratores ad denominatores eandem proportionem habeant; quippe cum B, in C, D, faciat F, H: Erit minutia GH, (quę ex ijs, quæ ad initium propos. 20. ostendimus, æqualis est summæ minutiarum EH, FH,) æqualis summæ collectæ ex minutia CD; (hoc est, ex minutia FH) & ex minutia AB, minutiæ CD, (id est, ex minutia EH,) atque ideo minutia GH, procreatur ex insitione minutiæ AB, in minutiam CD, in hoc posteriori sensu. quod est propositum.

E, 18. F, 24.
A, 3 C, 6 G, 42
B, 4. D, 7. H, 28.
A, 3 C, 6 E, 18
B, 4. D, 7. H, 28.

[a] 14. huius
[b] 8. huius
[c] 17 sept.

QVOD si plures sint minutiæ inserendæ AB, CD, EF, GH, hoc est, minutia AB, minutiæ CD, minutiæ EF, minutiæ GH; & minutia CD, minutiæ EF, minutiæ GH; & minutia EF, minutiæ GH, addendæ sint ad minutiam GH, ita agendum erit. Ducatur G, in F, productoque numero addatur numerus ex E, in G, procreatus, vt fiat K. Deinde ducatur K, in D, numeroque producto adijciatur numerus ex C, E, G, factus, vt fiat M. Producto quoque numero ex M, in B, addatur numerus ex A, C, E, G, procreatus, vt fiat P. Atque ita deinceps ducatur semper numerus vltimo loco genitus in denominatorem antecedentis minutiæ, numeroque procreato adijciatur numerus ex omnibus numeratoribus minutiarum ad eum vsque locum assumptarum productus, donec nulla superstit minutia. Numero autem P, qui vltimo loco procreatus est, supponatur numerus Q, ex omnibus denominatoribus productus, vt in priori sensu. Dico minutiam PQ, produci ex insitione dictarum minutiarum, si insitio intelligatur, vt dictum est. Nam, vt in duabus minutijs demonstratum est, minutia KL, producitur ex insitione minutiarum EF, GH, id est, æqualis est summæ collectæ ex minutia EF, totius minutiæ GH, & ex minutia GH. Deinde minutia CD, totius minutiæ EF, totius minutiæ GH, [a] facit minutiam simplicem, cuius numerator ex numeratoribus G, E, G, producitur, denominator autem est N, ex denominatoribus H, F, D, procreatus. Minutia quoque, cuius numerator ex D, in K, gignitur, denominator autem est idem N, ex D, in L, hoc est, ex denominatoribus H, F, D, procreatus; [b] æqualis est minutiæ KL; [c] quòd numeratores harū minutiarū ad denominatores habeant proportionē eandē: quippe cum D, in K, L, faciat numeros alterius huius minutiæ. Igitur cū minutia MN, cuius numerator M, cōflatur ex numero, quem numeratores C, E, G, gignunt,

P, 232. M, 104. K, 20.
A, 1 C, 3 E, 2 G, 4
B, 2. D, 4. F, 3. H, 5.
Q, 120. N, 60. L, 15.

[a] 14. huius
[b] 8. huius
[c] 17. sept.

P, 232. M, 104. K, 20.
A, 1 C, 3 E, 2 G, 4.
B, 2. D, 4. F, 3. H. 5.
Q, 120. N, 60. L, 15.

gignunt, & ex numero, quem D, in K, procreat, æqualis sit per ea, quæ initio propos. 20. ostensa sunt, summæ collectæ ex minutia, cuius numerator ex numeratoribus C, E, G, producitur, denominator autem N, ex denominatoribus H, F, D, procreatus, atque ex minutia, cuius numerator ex D, in K, gignitur, denominator verò est idem N; æqualis erit etiam eadem minutia MN, summæ collectæ ex minutia GH; & ex minutia EF, minutiæ GH; & ex minutia CD, minutiæ EF, minutiæ GH. Rursus minutia AB, minutiæ CD, minutiæ EF, minutiæ GH, [a] facit minutiam simplicem, cuius numerator ex numeratoribus A, C, E, G, producitur, denominator autem Q, ex B, in N, procreatus, sive ex denominatoribus H, F, D, B. Minutia quoque, cuius numerator ex B, in M, producitur, denominator autem est idem Q, ex B, in N, procreatus, [b] æqualis est minutiæ MN; [c] quòd harum minutiarum numeratores eandem habeant ad denominatores proportionem; cum B, in M, N, faciat numeros alterius huius minutiæ. Minutia ergo PQ, cuius numerator P, conflatur ex numero, quem numeratores A, C, E, G, gignunt, & ex numero, quem facit B, in M, cum æqualis sit, ex ijs, quæ initio propos. 20. demonstrata sunt, summæ collectæ ex minutia, cuius numerator ex numeratoribus A, C, E, G. producitur, denominator autem est Q; atque ex minutia cuius numerator ex B, in M, gignitur, denominator autem est idem Q; æqualis quoque erit summæ collectæ ex minutia GH; & ex minutia EF, minutiæ GH; & ex minutia CD, minutiæ EF, minutiæ GH; & ex minutia AB, minutiæ CD, minutiæ EF, minutiæ GH. quod est propositum. Eademq; de pluribus est ratio.

a 14. huius

b 8. huius

c 17. sept.

DE PROPORTIONVM compositione.

EXPEDITIS ijs, quæ ad fractorum numerorum demonstrationes pertinent, reliquum est, vt compositionem proportionum explicemus: id quod ad propos. 5. lib. 8. nos hoc loco facturos recepimus. In primis igitur, compositionem illam proportionum, de qua Euclides egit defin. 10. lib. 5. & defin. 5. lib. 6. & in ijs propositionibus, vbi duplicatam, triplicatam, a iij

aut compositam proportionem de magnitudinibus, vel numeris demonstrat, non esse verè additionem proportionum, ita vt duplicata, vel triplicata proportio sit duplo, aut triplo maior ea proportione, cuius illa dicitur duplicata, triplicataue: Item vt proportio ex pluribus proportionibus cõposita sit verè totũ quippiã, cuius partes sint proportiones, ex quibus cõponi dicitur, vt plerunq; interpretes Eucl. existimant, ex hoc perspicuè confirmari potest: quòd pars esset vel æqualis, vel maior toto. Nam cũ hæc compositio intelligẽda sit, siue maior quantitas cũ minore, siue minor cũ maiore conferatur, vt ad defin. 10. lib. 5. ostẽdimus, si, positis his tribus terminis continuè proportionalibus, 1. 10. 100. proportio 1. ad 100. non solũ duplicata diceretur proportionis 1. ad 10. vt vult defin. 10. lib. 5. sed vere esset duplo maior, ita vt coaceruata foret ex duabus proportionibus 1. ad 10. & 10. ad 100. æqualibus, vt Eucl. interpretes putant, quis non videt, partem esse maiorem toto, nimirum proportionem 1. ad 10. quæ vna pars est, maiorẽ esse proportione 1. ad 100? Hic autem 4. 4. 4. partẽ æqualem esse toti? Sic etiã, si, positis his tribus terminis nõ cõtinuè proportionalibus, 4. 2. 8. proportio 4. ad 8, verè coaceruaretur ex proportionibus 4. ad 2. & 2. ad 8. tanquam ex partibus, vt ijdẽ auctores contendunt, esset quoq; pars maior quam totũ, quòd proportio dupla 4. ad 2. maior sit proportione subdupla 4. ad 8. Hic autem 10. 5. 1. 2. 5. pars toti foret æqualis, proportio videlicet 10. ad 5. primi termini ad secundũ, proportioni 10. ad 5. primi termini ad vltimũ. Id quod coguntur omnino concedere, velint nolint, ex propos. 5. lib. 8. Sint enim duo numeri plani 24. & 48. Prioris latera sint 12. & 2. Posterioris vero 3. & 16. Quoniã igitur 24. 48. Euclides ibi demonstrat, proportionẽ 24. 12. 2. 3. 16. ad 48. compositã esse ex proportionibus laterum, hoc est, ex proportione 12. ad 3. & ex proportione 2. ad 16. erit pars componẽs, (si hæc cõpositio est vera additio.) nimirũ proportio quadrupla 12. ad 3. maior toto, proportionẽ videlicet subdupla 24. ad 48. Pari ratione, si proportio subdupla 24. ad 48. verè totũ est, & eius partes componẽtes proportio quadrupla 12. ad 3. & proportio suboctupla 2. ad 16. si alterutra harũ ab illa subtrahatur, reliqua erit altera. Igitur & maius ex minore subtrahi potest, nimirũ proportio quadru

pla 12. ad 3. ex proportione subdupla 24. ad 48. & subtracta proportione suboctupla 2. ad 16. ex proportione subdupla 24. ad 48. reliqua erit proportio quadrupla 12. ad 3. maior quàm ea, à qua facta est subtractio. Quòd si posterioris numeri plani 48. latera sumantur 12. & 4. erit vna partium componentium, nimirum proportio 2. ad 4. æqualis to-

24. 48. ti, proportioni videlicet 24. ad 48. Et

12. 2. 12. 4. subtracta proportione 2. ad 4. ex proportione æquali 24. ad 48. superesset ad-

huc proportio æqualitatis 12. ad 12. quæ maior est quàm to-ti, hoc est, quàm proportio 24. ad 48. Rursus sequeretur, totū non augeri, etiamsi ei infinitæ partes adderentur. Positis enim his quatuor terminis, 12. 4. 2. 1. si proportio 12. ad 1. vere coaceruatur ex proportionibus 12 ad 4. & 4 ad 2. & 2. ad 1. velut ex partibus, ita vt hæ proportiones simul sumptæ proportionem 12. ad 1. sint æquales: si cum illis terminis cōtinuentur adhuc alij tres termini hoc modo. 12. 4. 2. 1. 6. 3. 1. componetur eadem proportio 12. ad 1. ex sex proportionibus, quarum priores tres sunt eædem illæ, ex quibus prius componebatur. Tres ergo proportiones 1. ad 6. & 6. ad 3. & 3. ad 1. additæ tribus proportionibus 12. ad 4. & 4. ad 2. & 2. ad 1. non augent totum ex illis coaceruatum. Hæc autem omnia absurda sunt, & contra principia Mathematicorū. Huc accedit, quòd secundum communem hominum sensum duæ proportiones triplæ constituant proportionem sextuplā, non autem nonuplam, vt prædicti auctores uolunt, quanquā nōcupla proportio dicatur triplæ duplicata, vt in his e numeris apparet, 9. 3. 1. Nam quis non videat, si agens aliquod sit, vt 3. illud idem duplo potentius factum esse vt 6. non autem vt 9? Sic etiā communis intelligentia comprehendit ex proportione triplæ, & quintuplæ constare proportionem octuplā, propterea quòd duo mouētia vt 3. & 5. moueant simul sumpta, vt 8. non autē ex illis constitui proportionem 15. ad 1. quamuis hæc ex illis per continuationē composita esse dicatur, ex defin. 5. lib. 6. vt patet in his numeris, 15. 5. 1. His adde, multorū agentiū vires nō posse dimidiari, quòd inter duos numeros, qui proportionē agentis ad patiens exprimunt, nullus medius cadat proportionalis. Verbi gratia. Agens vt 6. nō posset habere agens duplo minus, quòd inter 6. & 1. nullus medius proportionalis cadat numerus: quis autem

non

non statim intelligat: agens vt 3. in dupla proportione minus esse, quàm agens vt 6?

LIQVET ergo, huiusmodi compositionem proportionū non esse additionem, sed proportionū continuationē, quæ per multiplicationem denominatorum fit, vt ad defin. 5. lib. 6. demonstrauimus, vbi etiam exposuimus, cur extremorum proportio dicatur ex medijs proportionibus composita propter terminorum cōtinuationem, quemadmodū & ad defin. 10. lib. 1. explicauimus, cur, positis tribus, quatuor, aut pluribus terminis continuè proportionalibus, extremorū proportio appelletur duplicata, triplicata, aut quadruplicata, &c. eius proportionis, quam primi duo termini habent. Hæc autem planius percipientur ex ijs, quæ iam iam de vera compositione proportionum dicturi sumus.

ITAQVE omnes operationes Arithmeticæ in proportionibus, nimirū additio, subtractio, multiplicatio, ac diuisio, fieri debent per proportionū denominatores, vt rectè docet Volumnius Rodulphus in disputatione de proportione proportionum. Et quoniam denominatores proportionum sunt fractiones, siue minutiæ, vt lib. 5. docuimus, (cui denominatori cuiuslibet proportionis multiplicis, qui numerus integer est, supponi possit vnitas, vt ex eo fiat quasi minutia ab unitate denominata.) quarū qualibet æqualis est fractioni, quā constituūt duo quicunq; numeri in ea proportione, cuius illa fractio denominator est, si ex antecedēte fiat numerator, & ex cōsequente denominator: manifesto colligitur, operationes Arithmeticas in proportionibus ab operationibus fractorū numerorū nō differre, siue per proportionū denominatores, siue per numeros earundē proportionū quoscunq;, positis tamen consequentibus terminis sub antecedentibus, instar minutiarū, instituātur, vt egregie Cardanus præcipit in sua Arithmetica, vt iam apparebit.

PRIMVM. n. sint in vnā summā colligēdæ duæ proportiones, tripla, & quintupla. Quoniā denominatores sūt 3. & 5. ex quorū additione fit sūma 8. coacer 3 ✕ 5 12 ✕ 40.
uabitur octupla proportio ex illis. qua 1 1. 4 8.
sūma etiā colligitur, siue denominato 8 256
res, supposita prius vnitate cuilibet il- 1. 32.
lorū, instar minutiarū addatur, siue numeri 12. 4. & 40. 8.
inter quos datæ proportiones reperiuntur, perinde ac si essent

fracti numeri, positis terminis consequẽtibus sub antecedentibus, in unã sũmã colligãtur. Priori enim modo colligitur proportio 8. ad 1. posteriori autẽ 256. ad 32. quarũ vtraq; octupla est. Sic etiã ex proportione dupla superquadrupartiẽte septimas, & sesquialtera, quarũ denominatores sunt $2\frac{4}{7}$. & $1\frac{1}{2}$. & quæ inter numeros 54. 21. & 6. 4 reperiuntur, fit proportio quadrupla sesquidecimaquarta, qualem habent tam numeri 57. 14. quàm 342. 84. Sed quãdo per denominatores instituitur operatio, reuocandi prius sunt denominatores ad vnicas fractiones, vt hic factũ est. Nam $2\frac{4}{7}$. reuocauimus ad $\frac{18}{7}$. & $1\frac{1}{2}$. ad $\frac{3}{2}$. Quod in alijs etiam operationibus intelligendum est.

8	3	256	12	57	3	342	6
1	1.	32	4.	14	2.	84	4
5		640		72		864	
1.		128.		28		336.	

DEINDE si ex proportione octupla subtrahatur proportio tripla: Itẽ ex proportione quadrupla sesquidecimaquarta deducatur proportio sesquialtera; reliquæ fient proportiones quintupla, & dupla superquadrupartiens septimas, vt hic perspicuum est.

TERTIO si multiplicanda sit prorortio tripla per 2. vel quod idem est, per proportionẽ duplam: Item proportio sesquialtera per supertripartientem quintas; instituenda erit operatio, vt hic vides, producetur q; ibi proportio sextupla, hic autem dupla superbipartiens quintas.

3	2	6	12	10	120	3	8	24	9	16	144
1	1.	1.	4	5.	20.	2	5.	10.	6	10.	60.

QVARTO & vltimo si proportio sextupla diuidẽda proponatur per proportionẽ triplã: Itẽ proportio dupla superbipartiens quintas per proportionẽ sesquialterã, si diuisoris termini permutentur, vt in diuisione minutiarum docuimus, ita instituetur operatio.

VIDES

6	1	6	120	4	480	24	2	48	144	6	864
1	3.	3.	20	12.	240.	10	3.	30.	60	9.	540.

VIDES ergo operationes Arithmeticas proportionum ab operationibus minutiarum nulla in re discrepare, nisi quòd in proportionibus necesse non est interponere lineolam inter numeratorem & denominatorem, quemadmodum in minutijs.

IAM vero multiplicationem proportionũ à nobis præscriptam, quam auctores additionem falso nũcupant, cum proportionum compositione, de qua Euclides defin. 10. lib. 5. & defin. 5. lib. 6. egit, conuenire, atq; adeo compositionẽ illam Euclidis verè esse multiplicationem, non autem additionem, vt diximus, hoc modo demonstrabimus. Sint duæ proportiones A, ad B, & C, ad D, siue æquales, siue inæquales; ducaturq; A, antecedens in antecedentem C, & fiat E; ex cõsequente vero B, in consequentem D, fiat F. Dico proportionem E, ad F, quæ ex illa multiplicatione producitur, esse compositam ex proportionibus duabus A, ad B, & C, ad D: ita vt si proportiones hæ A, ad B, & C, ad D, fuerint æquales, proportio E, ad F, dicatur alterutrius earum duplicata, vt vult defin 10. lib. 5. si autem fuerint inæquales, dicatur ex illis composita, ex sententia defin. 5. lib. 6. Fiat enim G, ex B, in C. Et quia ex A, B, in C, fiunt E, & G; a erit vt A, ad B, ita E, ad G. Rursus quia ex B, in C, D, fiunt G, & F; b erit vt C, ad D, ita G, ad F. Componitur autẽ proportio E, ad F, ex proportionibus E, ad G, & G, ad F, ex defin. Euclidis. Igitur eadem proportio E, ad F, componitur ex proportionibus A, ad B, & C, ad D, cum hæ eædẽ sint, quæ E, ad G, & G, ad F. Quod etiam patet ex demonstratione, quam ad defin. 5. lib. 6. ex Eutocio, & Vitellione attulimus. Cũ enim compositio proportionum ab Euclide descripta respondeat multiplicationi denominatorum inter se, vt ibi demonstrauimus, nostra vero multiplicatio à multiplicatione denominatorum nõ differat, liquido constat, compositionem illam proportionum esse multiplicationem, quam tradidimus.

A,	6.	C,	12.	A,	3	C,	6				
B,	2.	D,	4.	B,	2.	D,	1.				
E,	72.	F,	8.	F,	18.	F,	10.				
G,	24.			G,	12.						

a 18. sept.
b 17. sept.

EADEM ratione ostendemus, subtractionem proportionum, quam ijdem auctores docent, non esse aliud, quàm diuisionem à nobis explicatam, esseque compositioni illi Euclidis contrariam. Sit enim ex proportione A, ad B, detrahenda proportio C, ad D, ut ipsi uolunt. Ex A, in D, fiat E, & ex B, in C, fiat F. quod idem est, ac si termini proportionis C, ad D, permutent loca, & regula multiplicationis adhibeatur. Dico proportionem E, ad F, quæ ex diuisione proportionis A, ad B, per proportionem C, ad D, producitur, vt docuimus, esse eam, quæ relinquitur, sublata proportione C, ad D, ex proportione A, ad B: hoc est, proportionem A, ad B, compositam esse ex proportionibus C, ad D, & E, ad F. iuxta defin. Euclidis. Fiat enim G, ex A, in C, Quia igitur ex A, B, in C, fiũt G, F, erit vt A, ad B, ita G, ad F. Rursus quia ex A, in C, D, fiunt G, E, erit vt C, ad D, ita G, ad E. Cum ergo proportio G ad F, composita sit ex proportionibus G, ad E, & E, ad F, vt vult Euclides; erit quoque proportio A, ad B, (quæ eadem est, quæ G, ad F,) composita ex eisdem proportionibus G, ad E, hoc est, C, ad D, & E, ad F: ac proinde subducta proportione C, ad D, ex proportione A, ad B, reliqua erit proportio E, ad F: quemadmodum si ex proportione G, ad F, (posito termino E, medio) dematur proportio G, ad E, reliqua est proportio E, ad F. Sed quis nõ videt, hoc potius esse diuidi proportionem A, ad B, per proportionem C, ad D, quàm proportionem C, ad D, ex proportione A, ad B, subtrahi, ne maius ex minore auferri dicatur, vt in posteriori exemplo accidit? Atque hæc de proportionum compositione: qui plura desiderat, legat eruditissimum tractatum hac de re à Volumnio Rodulpho Spoletano conscriptum.

A, 9.	C, 3	A, 4.	C. 6.
B, 1.	D, 1.	B, 2.	D, 3,
E, 9.	F, 3.	E, 8.	F, 12.
G, 27.		G, 24.	

a 18. sept.
b 17. sept.

FINIS ELEMENTI NONI.

EVCLI-

EVCLIDIS

ELEMENTVM DECIMVM.

DEFINITIONES.

I.

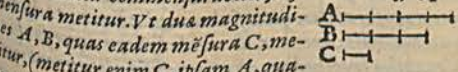
COMMENSVRABILES magnitudines dicuntur, quas eadem mensura metitur.

ABSOLVIT Euclides in antecedentibus tribus libris ea, quæ ad numeros spectant, quantum satis visum est ad res Geometricas intelligendas: Nunc in hoc decimo libro aggreditur ad disputationem linearum commensurabilium, & incommensurabilium, quarum causa numerorum tractationem ab eo susceptam esse superius diximus. Nam sine cognitione harum linearum complures magnitudines cum solidæ tum planæ, neque perfecte intelligi possunt, neq; cum res tulerit, in opus atque usum conferri; propterea q plerunq; latera earũ incõmensurabilia sunt: Id qđ & de pla-

nis ipsis atque solidis dici potest, quippe cum & hæc incommẽ surabilia sæpenumero existãt, vt ad finem huius libri demonstrabimus. Quoniam vero hic liber multis obstructus est difficultatibus, ob linearum, de quibus disserit, obscuritatem; omnes neruos industriæ meæ in eo contendam, vt ex his, quæ hactenus ab Euclide sunt demonstrata, ita planus reddatur, ac facilis, vt sine multo labore a quouis, qui præcedentiũ tamen librorum demonstrationes recte intellexerit, possit percipi. Neque enim in eorum possum sententiam ire, qui putant ad eius intelligentiam esse necessariam eam partem Arithmetices, quæ de radicibus numerorum, tam rationalibus quàm irrationalibus, vt vocant, sermonem instituit: Immo contra persuasum mihi prorsus habeo, cognitionem perfectam illius partis Arithmetices pendere ex hoc 10. lib. tantum abest, vt existimem, tractationem illam radicum requiri, vt facilius hic liber intelligatur. Non negarim tamen, eum, qui rationem radicum atque calculum tenuerit, maiore cum voluptate hunc librum percepturum, quam qui illarum omnino sit ignarus, propterea quod ille demonstrationes ad vsum potest reuocare, hic vero nullo modo. Hac enim de causa & nos priora decem theoremata secundi lib. numeris accõmodauimus, vt oblectationem animi maiorem ex eo studiosus caperet, ac fructum; non autem vt ea, quæ in illo demonstrantur, facilius arbitraremur intelligi posse ex numeris. Cur ergo (dicet aliquis) vt in eo libro, non perinde etiam in hoc exempla numerorum, quibus Algebra vtitur, vsurpasti, vt ea res & maiori voluptati esset, & commodo legentibus? In promptu causa est, quare id omittendum putauimus. Cum enim perpauci sint hoc tempore, quibus celeberrima illa Algebræ ars sit cognita, videbantur numeri illi, si adhiberentur, tenebras potius offusuri, quam lucis aliquid maioris daturi, & perspicuitatis; quippe ita ingenia studiosorum pro adimẽto, ac luce, quam his nostris commentarijs afferre laboramus, plus caperent incommodi, minusq; demonstrationes ipsas perciperent: Id quod in lib. 2. accidere non potuit, cum additionem numerorum integrorum, ac multiplicationem, quæ sola necessaria ibi fuerunt, nemo fere sit, qui ignoret. Huc accedit, quod qui in Algebra sunt versati, facili negotio demonstrationes huius lib. ad numeros accommodare possunt per se ipsos, quando volunt,

do nolunt, præsertim cum iam hoc ipsum non multo ante a Michaele Stifelio nobili Arithmetico in 2. lib. operis, quod de Arithmetica integra inscripsit, diligenter effectum sit, & accurate.

ITAQVE, vt ad institutum redeamus, inchoans rem ipsam Euclides, more suo, ab explicationibus vocabulorum, quibus vtendum erit; declarat primo loco, quænam magnitudines dicantur commensurabiles, definiens eas esse, quas eadẽ mensura metitur. Vt duæ magnitudines A, B, quas eadem mẽsura C, metitur, (metitur enim C, ipsam A, quater repetita, & ter sumpta ipsam B,) dicuntur commensurabiles. Eodem modo commensurabiles sunt, linea 20. palmorũ & linea 13. palmorum; quia eas linea tam vnius palmi, quã dimidiati palmi, quam tertiæ partis vnius palmi, &c. metitur. Similiter commẽsurabiles dicuntur superficies, quas vna, & eadem superficies metitur; Item corpora, solidaue commensurabilia, quæ metitur idem corpus, seu solidum.



II.

INCOMMENSVRABILES autem, quarum nullam communem mensuram contingit reperiri.

TALES magnitudines sunt, diameter quadrati cuiusuis, & latus eiusdem; quoniam nullam habent mensuram communem, vt propositione vltima huius lib. demonstrabitur ab Euclide. Sunt etiam plurimæ aliæ lineæ incommensurabiles, quibus scilicet mensura aliqua communis dari nullo modo potest, quarum multas hoc lib. Geometra explicat, docetque, quanam ratione inueniri possint. Rursus, superficies dicentur incommensurabiles, & solida incommensurabilia, quæ nullam admittunt mensuram communem.

III.

RECTAE lineæ potentia commẽ-

surabiles

surabiles sunt, cum quadrata earum idem spatium metitur.

LINEARVM rectarum quædam commensurabiles sunt longitudine, quas nimirũ alia linea, tanquam mensura communis, metitur; cuiusmodi sunt illæ, quas in expositione defin. 1. commẽsurabiles simpliciter diximus: quædam vero longitudine incommensurabiles, quas scilicet nulla linea, tanquam mensura communis, metitur. Rursus linearum, quæ sunt incommẽsurabiles longitudine, aliæ sunt eiusmodi, vt earũ quadrata sint commensurabilia; aliæ vero ita se habent, vt & quadrata earum incommensurabilia sint. Linea ergo illa longitudine incommensurabiles, quarum quadrata sunt commẽsurabilia, appellantur hic ab Euclide potentia commensurabiles; quia videlicet secundum earum potentias, hoc est, secundum earum quadrata (est enim, vt ad propos. 47. lib. 1. diximus, potentia cuiusque lineæ, quadratum ab ea descriptum) commensurabiles sunt, licet ipsæ secundum longitudinem sint prorsus incommensurabiles.

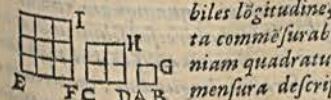
QVOD si quis roget, cur Euclides definierit seorsum lineas potentia commensurabiles, non autem commensurabiles longitudine, respondendum est, lineas longitudine commẽsurabiles satis superq; esse explicatas in definitione commensurabilium magnitudinum, cũ huiusmodi lineas una communis mensura metiatur, vt dictũ est: At vero quoniã lineas potentia commensurabiles nulla communis mensura metiri potest, sed tantummodo earum quadrata idem spacium metitur, ideo necessarium omnino fuit, vt ea propria definitione explicarentur.

IIII.

INCOMMENSVRABILES autem, cum quadratis earum nullum spatium, quod sit communis eorum mensura, contingit reperiri.

LINEAS reliquas longitudine incommensurabiles, quarum etiam quadrata incommensurabilia sunt, vocat incommensurabiles potentia.

HABENT autem lineæ cõmensurabiles tã lõgitudine quàm potentia, hanc quasi conuenientiã inter se, & cõnexionem, vt linea longitudine cõmensurabiles, sint etiã commensurabiles potentia, ita vt nulla linea dari possint commensurabiles potentia, ita vt nulla linea dari possint commensurabiles lõgitudine, quin earum quadrata commẽsurabilia quoque sint; quoniam quadratum ex communi earũ mensura descriptum metitur tanquã mensura communis earum quadrata,



vt in subiecta figura apparet: sicut enim recta AB, metitur rectas CD, EF, ita quoq; quadratũ AG, quadrata CH, EI, metitur: Non autẽ, vt omnes lineæ potentia cõmensurabiles, sint etiam commensurabiles longitudine; multæ enim lineæ sunt potentia commensurabiles, hoc est, quadrata habent commensurabilia, quæ tamen longitudine omnino incommensurabiles sunt, vt in hoc libro demonstrabitur, Rursus inter lineas incommensurabiles tam longitudine quàm potentia, huiusmodi colligatio reperitur, vt omnes lineæ potentia incommensurabiles: sint etiam incommensurabiles longitudine; Non autem contra, vt omnes lineæ longitudine incommensurabiles, sint quoque incommensurabiles potentia, cum multæ lineæ reperiantur longitudine inter se incommensurabiles, cum tamen potentia, hoc est, secundum earum quadrata, commensurabiles existant. Quæ quidem omnia perspicua erunt ex coroll. propos. 9. huius libri.

V.

HIS positis, ostenditur, cuicunq; rectæ propositæ rectas lineas multitudine infinitas & commensurabiles esse, & incommensurabiles: alias quidem longitudine, & potentia; alias vero potentia solum. Vocetur autem proposita recta linea, Rationalis.

SI proponatur aliqua recta linea nota magnitudinis, erũt omnium aliarum, quæ cum ipsa comparantur, quædam illi commensurabiles longitudine ac potentia, quædam vero potentia tantum: Item quædam illi incommensurabiles longitudine tantum; quædam vero longitudine, & potentia, vt hoc decimo libro demonstrabitur varijs in locis. Non enim vult Euclides, ex dictis ostendi, seu colligi, (quamquàm eius verba hoc sonare videantur) hæc ita se habere: sed solum indicat nobis, & innuit quodam modo, linearum quasdã dici posse propositæ rectæ lineæ commensurabiles longitudine, & potentia, quasdam autem potentia tantum, &c. Quod quidem ex dictis nullo modo sequitur, sed demonstrabitur in sequentibus, vt diximus.

LINEA autem illa proposita, ratione cuius aliæ commensurabiles sunt, vel incommensurabiles, dicitur Græcis ῥητὴ; Latinis vero Rationalis; quoniã ea ponitur semper certa, & nota, aliæ vero cum illa comparatæ non semper notæ sunt, quamuis singulæ seorsum sumptæ existant certæ quoque, ac notæ; cum qualibet in quotcunque partes æquales possit diuidi.

VI.

ET huic commensurabiles siue longitudine & potentia, siue potentia tantum, Rationales.

DOCET lineas alias illi, quæ Rationalis dicitur, commensurabiles quomodocunque, appellari quoque Rationales; non quidem ex positione, vt illa sed quia cum illa comparatæ reperiuntur ei commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum.

ITAQVE ex sententia Euclidis, radix quadrata huius numeri 20. vel 1000. &c. Seu quod idem est, linea recta, cuius quadratum est 20. vel 1000. &c. dicitur Rationalis; cum potentia sit commensurabilis lineæ Rationali, (est enim tam numerus 20. quàm 1000. commensurabilis numero cuilibet quadrato, vt 16. vel 100. &c.) quamuis longitudine sit eidem

eidem incommensurabilis. Decipiuntur ergo Arithmetici non pauci, qui idcirco eam Irrationalem vocant, quod numero non possit exprimi.

VII.

HVIC vero incommensurabiles, Irrationales vocentur.

QVONIAM in antecedenti defin. Euclides lineas illas, quæ longitudine & potentia, vel quæ potentia tãtum sunt commensurabiles propositæ rectæ Rationali, appellauit Rationales; liquido constat, eum hic eas dicere Irrationales, quæ propositæ rectæ Rationali incommensurabiles sunt omnibus modis, longitudine videlicet & potentia, non autem longitudine tantum. Ex quibus etiam manifestum est, radicem quadratam huius numeri 20. vel 1000. &c. seu (quod idem est) lineam, cuius quadratũ est 20. vel 1000. &c. non posse appellari Irrationalem, cum non sit longitudine, & potentia, sed longitudine tantum Rationali lineæ propositæ incommensurabilis.

VIII.

ET quadratum, quod a proposita recta fit dicatur Rationale.

QVEMADMODVM linea illa, quæ certa ponitur ac nota, Rationalis dicitur: Ita quoque quadratum ab ea descriptum, Rationale vocatur, quia & ipsum certum est, ac notum, comparationeque illius aliæ superficies, commensurabiles, incommensurabilesue dicuntur.

IX.

ET huic commensurabiles quidem, Rationalia.

OMNES

OMNES planæ superficies quadrato Rationalis lineæ propositæ commensurabiles, Rationales dicuntur; non quidem ex positione, vt illud, sed quia cum eo collatæ reperiũtur ei vel commensurabiles, vel incommensurabiles: quemadmodum etiam lineæ, quæ Rationali lineæ quomodocunq; commensurabiles sunt, Rationales appellantur.

QVONIAM vero lineæ potentes ipsa spatia commensurabilia quadrato Rationalis lineæ propositæ, sunt saltem potẽtia commensurabiles lineæ Rationali, ex 3. defin. perspicuum est, ipsas quoque appellari iuxta defin. 6. Rationales.

X.

HVIC vero incommensurabilia, Irrationalia dicantur.

NON aliter superficies planæ quadrato à Rationali lineæ descripto incommensurabiles, Irrationales uocantur, ac lineæ, quæ Rationali propositæ prorsus incommensurabiles sunt, Irrationales sunt dictæ.

XI.

ET rectæ, quæ ipsa possunt, Irrationales: si quidem ea quadrata sint, ipsa latera; si vero alia quæpiam rectilineæ, rectæ, quæ spatijs incommensurabilibus æqualia quadrata describunt.

VOCAT lineas, quæ possunt spatia quadrato Rationalis lineæ incommensurabilia, Irrationales; quemadmodum & ipsa spatia dixit Irrationalia: Ita vt si incommensurabilia spatia fuerint quidẽ quadrata, latera ipsorum dicantur Irrationalia; si uero non fuerint quadrata, sed aliæ quæcunque figuræ rectilineæ, appellentur rectæ, quæ describunt quadrata æqualia illis spatijs incommensurabilibus, Irrationales.

COL-

COLLIGITVR autem, lineas potentes spatia incommensurabilia quadrato Rationalis lineæ, dici debere Irrationales, ex 7. defin. quemadmodum supra ex 6. defin. collegimus, lineas, quæ possunt spatia commensurabilia eidem quadrato Rationalis lineæ, appellari debere Rationales. Nam lineæ, quæ possunt illa spatia incommensurabilia, sunt potentia incommensurabiles lineæ Rationali, ex 4. defin. Cum ergo omnes lineæ potentia incommensurabiles, sint quoque incommensurabiles longitudine, vt ad defin. 4. diximus, demonstrabiturque in coroll. propos. 9. manifestum est, ex 7. defin. lineas illas, quæ possunt spatia incommensurabilia quadrato Rationalis lineæ, dici Irrationales.

PRÆTEREVNDVM quoque non est, Euclidem & veteres Geometras has voces: longitudine & potẽtia, atq; potentia tãtum : *apponere fere semper vocibus istis:* commensurabiles, ac incõmensurabiles: *Vix autem, & rarissimè his:* Rationales, & Irrationales: *Recte enim dicuntur lineæ commensurabiles longitudine & potentia, vel potentia tantum; item incommensurabiles longitudine & potentia, vel longitudine tantum: Minus uero recte Rationales longitudine & potentia, uel potentia tantum, aut Irrationales longitudine & potentia, vel longitudine tantum. Quod quidem, quoniam Campanus non animaduertit, occasionem multis præbuit, vt uarie, & obscure in hoc 10. lib. de lineis commensurabilibus, incommensurabilibusque, nec non Rationalibus, Irrationalibusque sint locuti.*

CÆTERVM his definitionibus adiungemus postulatum unum, & nonnulla pronunciata, quorum usus in hoc libro reperitur.

POSTVLATVM, SIVE Petitio.

POSTVLETVR, quamlibet magnitudinem toties posse multiplicari, donec quamlibet magnitudinem eiusdem generis excedat.

PROPO-

PROPOSITIS enim duabus magnitudinibus eiusdem generis inæqualibus, cum maior infinita non sit, minor vero infinite possit augeri; perspicuum est, minorem toties posse multiplicari, donec superet maiorem. Cõstat hoc etiam ex iis, quæ in defin. 5. lib. 5. scripsimus. Ibi enim eas magnitudines diximus tum demum censeri eiusdem magnitudinis, cum alterutra ita potest multiplicari, vt alteram excedat. Atque ex huius conditionis defectu, angulum rectilineum, & angulum contingentia, diuersi esse generis, docuimus.

AXIOMATA SIVE Pronunciata.

I.

MAGNITVDO quotcunque magnitudines metiens, compositam quoque ex ipsis metitur.

II.

MAGNITVDO quamcunque magnitudinem metiens, metitur quoq; omnem magnitudinem, quam illa metitur.

III.

MAGNITVDO metiens totam magnitudinem, & ablatam, metitur & reliquam.

HAEC axiomata, vt ad numeros pertinent, ostensa sunt a nobis in vltimis tribus pronunciatis lib. 7. Quare cum sit eadem ratio in magnitudinibus, non est, quod frustra eorum demonstrationes hic repetamus, præsertim quod ad verbum

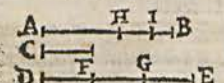
bum huc possint transferri, mutata solum voce numeri in vocem magnitudinis.

CÆTERVM quia hoc in libro discedendũ nobis fuit a numero, quem Theon in propositionibus Euclidis sequitur, vt ad propos. 13. dicemus, quemadmodum & in omnibus seriem Campani negleximus; vt docuimus ad initium primi libri; curauimus, vt duplex numerus in margine e regione propositionum apponeretur, quorum superior ordinem Theonis, inferior autẽ Campani seriem demõstraret. Quod si vnus tantum numerus reperiatur in margine, nullam tunc esse inter Theonem, & Campanum discrepantiam, intelligas, quod ad numerum propositionum attinet.

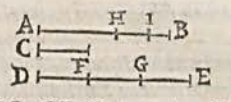
THEOR. 1. PROPOS. 1. 1.

DVABVS magnitudinibus inæqualibus propositis, si a maiore auferatur maius quàm dimidium; & ab eo, quod reliquum est, rursus detrahatur maius quàm dimidium; & hoc semper fiat: Relinquetur tandem quędam magnitudo, quæ minor erit proposita minore magnitudine.

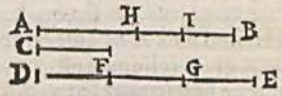
PROPOSITAE sint duæ magnitudines inæquales AB, & C, quarũ AB, sit maior. Dico si ex AB, auferatur maius quam dimidium; & ab eo, quod reliquum est, rursum maius quam dimidium; atque hoc semper fiat: relinqui tãdem magnitudinẽ quandam, quæ minor sit quã C. Multiplicetur. n. C, toties, donec magnitudo facta DE, maior sit quã AB, ita vt DE, sit multiplex ipsius C, proxime maior quã AB. Diuisa autem DE, in partes DF, FG, GE, ipsi C, æquales, detra



hatur ex AB, maius quã dimidium AH, & ex reliqua HB, maius quam dimidiũ HI; atq; hoc semper fiat, donec partes ipsius AB,



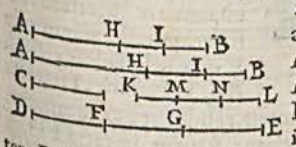
multitudine æquales sint partibus ipsius D E. Sint ergo iam partes AH, HI, I B, tot, quot sunt ipsæ DF, FG, GE. Quia igitur DE, maior est quã A B; At ex DE, ablatũ est DF, minus quã dimidiũ, vel certe dimidiũ, si DE, ipsius C, sit duplex; ex AB, vero maius quã dimidiũ AH: Erit reliquum FE, reliquo H B, maius. (Cum enim DE, maior sit quam AB, si ex D E, dimidium auferretur, necnon & ex A B, dimidium, esset quoque reliquum ex DE, maius reliquo ex A B, Si ergo ex D E, auferatur minus quam dimidium, vel certe dimidium, & ex A B, maius quam dimidium; erit reliquum ex DE, maius reliquo ex AB.) Rursus quoniam FE, maior est quàm HB, auferatur; ex FE, dimidium F G, vel certe minus quam dimidium, si F E, maior sit quam duplex ipsius C; at ex H B, maius quam dimidium H I; erit eodem modo reliquum GE, maius reliquo I B: atque ita procedendo ostẽdemus tandem postremam partem ipsius DE, qualis hic est GE, maiorem esse postrema parte ipsius A B, qualis hic est IB. Dum ergo G E, postrema pars ipsius D E, æqualis sit ipsi C; erit quoque C, maior quam I B, postrema pars ipsius AB. Relicta igitur est I B, magnitudo, quæ minor est magnitudine C. Quare duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, si a maiori auferatur maius, &c. Quod erat demonstrandum.



IDEM demonstrabitur, si ex A B, auferatur dimidium A H, & ex relĩquo H B, rursus dimidiũ HI, &c. Nam eadem ratione erit reliquum FE, maius reliquo H B, nec non & reliquum G E, maius reliquo I B; cum ex maiori D E, ablatum sit D F, minus quàm dimidium, vel certe dimidium; & ex minori A B, dimidium A H, &c.

ALITER. Facta constructione, vt prius, sumatur K L, ita multiplex ipsius I B, vt est multiplex D E, ipsius C. Diuisa ergo K L, in partes K M, M N, N L, ipsi I B, æquales, erunt tot partes in K L, quot in D E. Quoniam vero

vero A H, maior est quam H B, vel certe illi æqualis, si ablatum sit dimidium ex A B; & H B, maior est, quam IB; erit quoque AH, maior quam IB, hoc est, quam K M. Rursus quia HI, maior est quam IB, vel certe illi æqualis; est autem IB, ipsi M N, æqualis: erit quoque H I, maior quam M N, vel illi æqualis; atque adeo tota A I, maior, quã tota KN. Additis ergo æqualibus IB, NL, erit tota AB, maior quam tota K L: Est autem DE, maior adhuc, quam AB. Multo ergo maior erit DE, quam KL. Quare cũ sit, vt D E, ad C, ita K L, ad IB; (Sumpta enim fuit K L, ipsius I B, tam multiplex, quam multiplex est DE, ipsius C,) [a] erit quoq; C, maior quam IB. Ac proinde relicta est I B, minor quam C. Quod erat demonstrandum.



[a] *14. quinti*

SCHOLIVM.

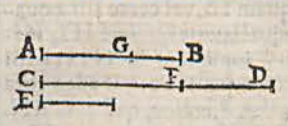
LVCE clarius ex demonstratione huius Theorematis apparet, duas quantitates inæquales propositas debere esse tales, vt minor multiplicata, tandem maiorem possit superare. Id quod ad propos. 16. lib. 3. monuimus, cum de angulo contactus contra Iacobum Peletarium ageremus.

THEOR. 2. PROPOS. 2. 2.

SI duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione, & reliqua minime præcedentem metiatur: Incommensurabiles erunt ipsæ magnitudines.

DVABVS inæqualibus magnitudinibus propositis AB, CD, quarũ minor AB, detrahatur ex maiore CD, & reliqua huius ex A B; & sic deinceps, alterna quadam

detractione, auferatur semper minor de maiore, & nunquam reliqua metiatur præcedentem. Dico magnitudines AB, CD, incommensurabiles esse. Si enim non sunt incommensurabiles, metietur eas aliqua mensura communis. Metiatur eas si fieri potest, magnitudo E, quæ vel æqualis erit ipsi AB, vel minor. Detracta



autē AB, ex CD, quoties potest, relinquat FD, se minorē, ita vt AB, ipsam CF, metiatur. Rursus detracta FD, ex AB, relinquat se minorē GB, ita vt FD, metiatur ipsam AG; atq; hoc semper fiat. [a] Relinquetur ergo tandem ex CD, vel AB, magnitudo quædam minor quam E. (Quoniam cum AB, ablata ex CD, relinquat FD, se minorē, erit CF, ablata maior, quam dimidia ipsius CD; alias si esset dimidia, vel minor quam dimidia, posset adhuc AB, detrahi ex CD. Eodem modo erit AG, ablata ex AB, maior quam dimidia ipsius AB: Et sic deinceps semper fiet. Quare cum semper auferatur maius, quam dimidiū, [b] relinquetur tādem magnitudo quædam minor quā E.) Sit ergo iam relicta GB, minor quam E. Quoniam igitur E, metitur AB; & AB, metitur CF; [c] metietur quoque E, ipsam CF: Metitur autem E, & totam CD. [d] Igitur E, reliquam quoque FD, metietur. At FD, metitur AG: [e] quare & E, ipsam AG, metietur. Metitur autem E, & totam AB: [f] ergo E, reliquam etiam GB, metietur, maiorem minorem. Quod est absurdum. Non ergo AB, CD, magnitudines aliqua magnitudo metietur. Quare incommensurabiles sunt. Si igitur duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, &c. Quod erat ostendendum.

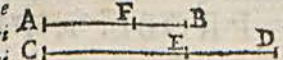
[a] 1. decimi
[b] 1. decimi
[c] 2. pron.
[d] 3. pron.
[e] 2. pron.
[f] 3. pron.

SCHOLIVM I.

HOC Theorema conuertemus ad hunc modum.

SI duabus magnitudinibus incommensurabilibus propositis, de trahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione: Nunquam reliqua præcedentem metietur.

SINT incommensurabiles magnitudines AB, CD, detrahaturq; minor AB, ex CD, & reliqua sit ED. Item ED, ex AB, auferatur, relinquaturque FB, & sic deinceps. Dico in hac alterna detractione nunquam reliquam metiri præcedentem. Si enim fieri



potest, metiatur FB, præcedentem ED. Quoniam igitur FB, metitur ED; & ED, metitur AF; [a] metietur quoque FB, ipsam AF: Metitur autem & se ipsam: [b] Igitur FB, & totam AB, metietur: Metitur autem AB, ipsam CE. [c] Igitur & FB, ipsam CE, metietur. Ponitur autem & FB, metiri ipsam ED: [d] Igitur & FB, totam CD, metietur. Ostensa est autem & FB, ipsam AB, metiri. Quare FB, vtramq; AB, CD, metitur, quod est absurdum, ponuntur enim AB, CD, incommensurabiles. Nunquam ergo magnitudo aliqua reliqua præcedentem magnitudinem metitur. Quod est propositum.

SIMILITER & hoc demonstrabimus.

[a] 2. pron.
[b] 1. pron.
[c] 2. pron.
[d] 1. pron.

SI duabus magnitudinibus commensurabilibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione: Metietur quædam reliqua præcedentem.

NAM si nunquam reliqua metiretur præcedentem, essent propositæ magnitudines incommensurabiles, vt demonstrauit hoc theoremate Euclides. Quod est absurdum. ponuntur enim commensurabiles.

ITAQVE facile ex his dignoscemus, an duæ quæcunque magnitudines propositæ sint commensurabiles, nec ne. Nā detracta semper minore de maiore, alterna quadam detractione, si reliqua quæpiam metiatur præcedentem; erunt magnitudines propositæ commēsurabiles, cum illa eadem reliqua metiatur vtramque magnitudinem propositam, vt cōstat ex

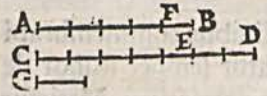
demonstratione primi theorematis huius scholij. Ex eo enim, quod reliqua magnitudo F B, metiri dicebatur præcedentem E D, ostensum est, eandem reliquam F B, metiri vtramque magnitudinem A B, C D. Si uero nunquam reliqua magnitudo præcedentem metiatur, propositæ magnitudines incommensurabiles erunt, vt Euclides hoc loco demonstrauit.

3

PROBL. 1. PROPOS. 3.

DVABVS magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum communem mensuram inuenire.

DATAE duæ magnitudines commensurabiles sint AB, CD, quarum oporteat maximam mensuram inuenire. Quoniam A B, C D, commensurabiles sunt, fit vt si minor AB, ex maiore CD, detracta, quoties potest, relinquat E D; & E D, detracta ex A B, quoties potest, relinquat F B, & hoc semper fiat alterna quadã detractione; tandem reliqua quæpiam magnitudo præcedentem metiatur, per 2. theor. præcedentis scholij. Metiatur iã F B, reliqua præcedentem ED. Dico FB, esse maximam mensuram communem magnitudinum A B, C D. Quod enim vtramque metiatur, ita ostendemus. Quoniam FB, metitur ED; & ED, metitur A F;[a] metietur quoque FB, ipsam A F: At metitur F B, & se ipsam.[b] Igitur FB, totam A B, metietur;[c] atque adeo & ipsam C E, quam A B, metitur. Cum ergo, & ipsam ED, metiatur;[d] metietur quoq; F B, totam CD. Metitur ergo FB, utramque A B, CD. Quare vtriusque A B, C D, communis mensura est FB.



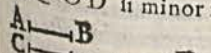
a 2. pron.
b 1. pron.
c 2. pron.
d 1. pron.

QVOD autem FB, sit maxima earum communis mẽsura, ita probabimus. Si non est maxima, erit aliqua alia communis earum mensura, maior quam F B. Sit ergo, si fieri potest, G, illarum communis mensura, maior quam FB. Quia igitur G, metitur vtramque AB, CD; metitur autem

autem & AB, ipsam CE;[a] metietur quoq; G, ipsam CE: At metitur quoq; totam C D.[b] Igitur G, reliquam quoque ED, metietur: Metitur autem ED, ipsam AF.[c] Ergo & G, ipsam A F, metietur. Quare cum G, totam etiam A B, metiatur;[d] metietur quoq; eadem G, reliquam FB, maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo maior magnitudo, quam F B, communis mensura est ipsarum A B, C D. Quare F B, maxima earum communis mensura est.

a 2. pron.
b 3. pron.
c 2. pron.
d 3. pron.

QVOD si minor magnitudo AB, metiatur maiorẽ C D, ita vt detracta ex C D, nihil relinquat; erit ipsa AB, ambarum maxima mensura communis; cum & se ipsam metiatur. Duabus ergo magnitudinibus commensurabilibus datis, &c. Quod faciendum erat.



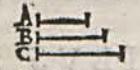
COROLLARIVM.

EX hoc manifestum est, quod magnitudo metiens duas magnitudines, metitur & maximam earum mensuram communem.

ELICITVR hoc ex ea parte demonstrationis, qua ostensum est FB, esse maximam mensuram communem ipsarum A B, C D. Demonstratum enim est ibi, magnitudinem G, si metiatur magnitudines A B, C D, metiri quoque maximam mensuram F B. Eademque est ratio de cæteris.

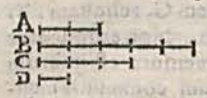
SCHOLIVM.

EX his, quæ dicta sunt, non erit difficile considerare, an quotlibet magnitudines propositæ sint commensurabiles, nec ne. Sint enim tres magnitudines A, B, C. Primum experior per ea, quæ ad propo. 2. huius lib. docuimus, an duæ A, & B, commensurabiles sint, an non. Quæ si fuerint incommensurabiles, perspicuũ est, omnes tres A, B, C, esse

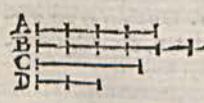


esse incommensurabiles, quod nullam habere possint communem mensuram, propter incommensurabiles magnitudines A, & B.

SI vero A, & B, fuerint commensurabiles, sit earum maxima communis mensura inuenta D; quæ si metiatur quoque magnitudinem C, manifestum est, tres magnitudines A, B, C, commensurabiles esse, cum habeant communem mensuram D.

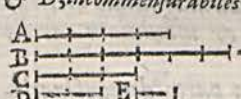


QVOD si D, maxima mensura magnitudinum A, & B, non metiatur C; erunt C, & D, vel commensurabiles, vel non. Si sunt incommensurabiles, erunt quoque omnes tres A, B, C, incommensurabiles. Si enim credantur esse commensurabiles, metietur earum maxima cõmunis mensura ipsam D, maximam mensuram magnitudinũ A, & B, per coroll. huius propos. Cum ergo eadem illa mensura metiatur quoque C, non erunt C, & D, incommensurabiles. Quod est contra hypothesim.



SI vero C, & D, sint commensurabiles, erunt quoque tres A, B, C, cõmensurabiles. [a] Inuenta enim E, maxima mensura ipsarum C, & D; cũ E, metiatur D; & D, ipsas A, & B; [b] metietur quoque E, ipsas A, & B. Quare cum eadem E, metiatur quoque C; metietur E, tres magnitudines A, B, C; Ac propterea commensurabiles sunt. Quod est propositum.

3. decimi



b 2. pron.

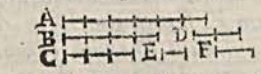
SIMILITER explorabimus, an plures datæ magnitudines, quam tres, sint commensurabiles, nec ne. Nam si datæ sint quatuor, experiemur id primum in tribus; si quinque, in quatuor, &c. Reliqua autem perficiemus, vt de tribus magnitudinibus est dictum.

4. PROBL. 2. PROPOS. 4.

TRIBVS magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum mensuram communem inuenire.

SINT datæ tres magnitudines commensurabiles A, B, C, quarum maximam mẽsuram inuenire oporteat. [a] Sit D, maxima mensura ipsarũ A, B, inuenta. Si ergo D, metiatur quoque C, perspicuum est D, maximam esse mensuram omnium trium A, B, C. Nam si maior magnitudo quam D, metiri dicatur magnitudines A, B, C; metietur eadẽ, per coroll. propos. 3. huius lib. maximam mensuram ipsarum A, B, nempe ipsam D, maior magnitudo minorem. quod fieri non potest. Si uero D, non metiatur C, erunt saltẽ D, C, commensurabiles. Cum enim A, B, C, sint commensurabiles, metietur quælibet mensura earum cõmunis ipsam D, maximam mensuram ipsarum A, B, per coroll præcedentis propos. Cum ergo eadem illa mensura metiatur quoq; ipsam D; erunt D, & C, commensurabiles. [b] Sit igitur E, maxima mensura ipsarum inuenta. Dico E, maximam mensuram esse datarum magnitudinum A, B, C. Quod enim sit communis earum mensura, ita planum fiet. Quia E, metitur D, & C; & D, metitur A, & B; [c] metietur quoq; E, ipsas A, & B. Metitur autem & ipsam C: Igitur E, mensura est communis ipsarum A, B, C, quemadmodum asseruimus.

a 3. decimi



b 3. decimi

c 2. pron.

QVOD autem E, sit earum maxima mensura, hoc modo confirmari potest. Si non est maxima, sit F, maior quam E, si fieri potest, earum mensura communis. Quoniam igitur F, metitur A, & B; metietur quoque earum maximã mẽsuram D, per coroll. præcedẽtis propos. Metitur autem & C: Igitur F, metiens D, & C, metietur quoque earum mensuram maximam E, ex eodem corol. maior magnitudo minorem. Quod est absurdum. Non ergo maior magnitudo quam E, magnitudines A, B, C, metitur; Ac propterea E, maxima est earum communis mensura. Quam ob rem tribus magnitudinibus commensurabilibus datis, &c. Quod erat faciendum.

COROL-

COROLLARIVM.

APERTE quoque ex hoc colligitur, quod magnitudo metiens tres magnitudines, metitur quoque maximam earum mensuram communem.

INFERTVR autem hoc ex vltima parte demonstrationis. Ostensum enim est ibi, magnitudinem F, si metiatur ipsas A, B, C, metiri quoque E, maximam illarum communem mensuram. Eademque de cæteris est ratio.

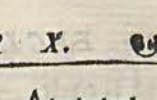
SIMILI modo, pluribus magnitudinibus commensurabilibus datis, quam tribus, maximam earum mensuram communem inueniemus; locumque habebit hoc idem corollarium. Nam si datæ magnitudines fuerint quatuor, inuenienda erit primum maxima mensura communis trium magnitudinum: Si quinque, accipienda erit quatuor magnitudinum mensura maxima, &c. Reliqua vero omnia absoluenda erunt, vt de tribus magnitudinibus est dictum.

LEMMA.

SI sint quotcunque magnitudines, & totidem etiam numeri, qui bini in eadem ratione sumantur, in qua binæ magnitudines: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt magnitudines & numeri.

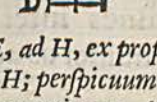
SINT quotcunque magnitudines A, B, C, D, in eisdem rationibus, in quibus totidē numeri E, F, G, H: Vt quidem A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita F, ad G; & vt C, ad D, ita G, ad H. Dico ex æquo esse, vt A, ad D, ita E, ad H. Quoniam. n. ex ijs, quæ ad defi. 5. lib. 6.

lib. 6. a nobis demonstrata sunt, tam proportio A, ad D, componitur ex proportionibus A, ad B; B, ad C; & C, ad D; quam proportio E, ad H, ex proportionibus E, ad F; F, ad G; & G, ad H; perspicuum est, cum proportiones componentes proportionem A, ad D, æquales ponantur proportionibus, quæ proportionem E, ad H, componunt, & compositas proportiones, nempe A, ad D, & E, ad H, æquales esse, hoc est, esse vt A, ad D, ita E, ad H. Quod est propositum.



E, 3.
F, 4.
G, 1.
H, 2.

IDEM sequitur, si magnitudinum, & numerorum proportio fuerit perturbata, vt in hoc exemplo apparet, in quo est, vt A, ad B, ita G, ad H; & vt B, ad C, ita F, ad G; & vt C, ad D, ita E, ad F. Eadem enim prorsus est demonstratio.



E, 3.
F, 12.
G, 4.
H, 6.

SCHOLIVM.

QVONIAM præcedenti lemmate & in propositione, quæ sequitur, & in alijs multis, vtendum nobis erit; placuit illud hoc loco breuiter demonstrare, cum non facile videatur ex demonstratis sequi. Nam magnitudo & numerus diuersa genera quantitatis constituūt: At proportio ex æqualitate in præcedentibus libris ostensa tantum est in quātitatibus eiusdem generis; In numeris quidem lib. 7. Libro vero 5. in magnitudinibus: quanquam demonstratio in quinto lib. facta, etiam ad hoc lemma transferri possit, cum omnes demonstrationes illius libri numeris quoque conueniant. Vel certe demonstratio facta in 7. lib. huic eidem lemmati congruet, cum magnitudines A, B, C, D, quæ proportiones habent easdem, quas numeri E, F, G, H, rationem induant numerorum.

THEO.

THEOR. 3. PROPOS. 5.

5. COMMENSVRABILES magnitudines inter se rationem habent, quam numerus ad numerum.

SINT magnitudines commensurabiles A. B. Dico eos habere proportionem inter se, quam numerus aliquis habet ad alium numerum. * 3. decimi Sit enim earum maxima mensura inuenta C: Et quoties ea repetita metitur A, toties vnitas repetita metiatur numerum D: Et quoties eadem C, repetita metitur B, toties vnitas repetita metiatur numerum E. Quoniam igitur magnitudo C, magnitudinem A, & vnitas numerum D, æque metitur; continebit æqualiter magnitudo A, magnitudinem C, atque numerus D, vnitatem. Quare erit vt A, ad C, ita numerus D, ad unitatem: Est autem & vt C, ad B, ita vnitas ad numerum E; quod C, ipsam B, æqs vnitas numerum E, æque metiatur. Igitur per lemma præcedens, erit ex æquo, vt A, magnitudo ad B, magnitudinem, ita D, numerus ad E, numerum. Commensurabiles ergo magnitudines inter se rationem habent, &c. Quod erat dqmonstrandum.

A D, 3.
C Vni. tas.
B E, 2.

SCHOLIVM.

CVM Euclides ad demonstrationem huius theorematis assumat maximam communem mensuram propositarum magnitudinum commensurabilium, qualis fuit C, ipsarum A, & B, perspicuum est, lineas debere esse longitudine, & ob id potentia quoque commensurabiles, vt rationem habeant inter se, quam numerus ad numerum. Hæ enim solæ communem recipiunt mensuram, atq; adeo in eis demonstratio locum habet.

QVOD si lineæ sint potentia tantum commensurabiles, habebunt quidem earum quadrata inter se rationem, quam numerus ad numerum, quia commensurabilia sunt, atque idcirco mensuram habent communem, ipsisque demonstratio huius theorematis conuenit: At ipsæ lineæ nequaquam, quia longitudine incommensurabiles cum sint, cõmunis mensuræ sunt expertes, ac propterea huius theorematis demonstratio in ipsas conuenire nullo modo potest.

EX demonstratione porro eiusdem huius theorematis liquido constat, commensurabilium magnitudinum proportionem esse eam, quam habent numeri, per quos eorum communis mensura maxima ipsas metitur. Ostensum enim est, eam habere proportionem magnitudines A, & B, quam habent numeri D, & E; per quos scilicet earum mensuræ communis maximæ C, ipsas metitur.

VNDE si propositis duabus magnitudinibus commensurabilibus A, & B, libeat inuenire, quam proportionem habeant in numeris; sumendi erunt duo numeri D, & E, quos vnitas æque, ac communis magnitudinum commensurabilium A, & B, mensura maxima C, ipsas magnitudines metitur. Nam vt demonstratum est, magnitudines A, & B, proportionem habent, quam numeri D, & E.

QVOD si loco maximæ mensuræ C, sumamus aliam quacumque communem earum mensuram, nihilominus hoc theorema demõstrabimus eodem argumẽto. Quamuis enim numeri D, & E, maiores inueniantur in hac posteriori demnnstratione, quam in priori; habent tamen eandem proportionẽ cum illis, vt ex apposita figura apparet. Quoniã vero in priori demonstratione numeri inuenti, sunt minimi omniũ eandem cum ipsis proportionẽ habentiũ; propterea fortassis Euclides in demonstratione maximam communem mensuram assumpsit, & non quamlibet, licet id necessarium non sit.

A D, 6.
C Vni. tas.
B E, 4.

THEOR. 4. PROPOS. 6. 6.

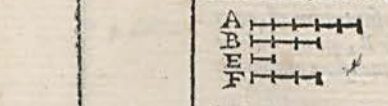
SI duę magnitudines inter se proportionem

tionem habeant, quam numerus ad numerum: commensurabiles erunt magnitudines.

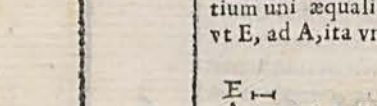
HABEANT duæ magnitudines A, B, eam proportionem, quam numeri C, D. Dico A, B, magnitudines esse commensurabiles. Quoties enim vnitas continetur in numero C, in tot æquales partes diuisa intelligatur magnitudo A, quarũ partium vni æqualis sit magnitudo E. Deindequoties vnitas repetita metitur numerum D, toties magnitudo E, repetita metiatur magnitudinem quandam aliam F. Quoniam igitur magnitudo E, toties in A, continetur, quoties vnitas in C; continebit æqualiter A, ipsam E, & C, numerus vnitatem. Quare erit A, ad E, vt C, ad vnitatem: Est autem & vt E, ad F, ita vnitas ad D, quod E, ipsam F, & vnitas ipsum D, æque metiatur. Igitur per lemma propos. 4. huius lib. erit ex æquo, vt A, ad F, ita C, ad D: Erat autem etiã vt C, ad D, ita A, ad B. Igitur erit vt A, ad B, ita A, ad F; ac propterea B, & F, magnitudines æquales inter se sunt. Quocirca cum E, ipsam F, metiatur, metietur quoq; eadem E, ipsam B: Metiebatur autem & ipsam A. Igitur magnitudo E, vtramque A, & B, metitur; Ac proinde A, & B, magnitudines commensurabiles inter se sunt. Si igitur duę magnitudines inter se proportionẽ habeant, &c. Quod erat demonstrandum.

a 9. quinti

b 1. defin.



ALITER. Quot sunt unitates in C, in tot partes æquales intelligatur diuisa magnitudo A, quarum partium uni æqualis sit magnitudo E. Quoniam igitur est vt E, ad A, ita vnitas ad C, quod E, ipsam A, & vnitas ipsum C, æque metiãtur; ponitur que vt A, ad B, ita C, ad D; erit per idẽ lemma superius, ex æquo, vt E, ad B, ita vnitas ad D: Metitur autem vnitas numerum D. Igitur & magnitudo E, magnitudinem B, metitur: Metitur autem E, ipsam quoq; A. Igitur A, & B, habentes eandem communem mensuram E, commensurabiles sunt. Quod est propositum.

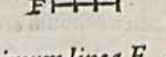


a 1. den.

COROLLARIVM.

EX priori autem demonstratione theorematis aperta est nobis via, qua lineam rectam inueniamus, ad quam ita se habeat quauis alia data recta linea, vt numerus ad numerum. Nam (repetita priori figura huius propositionis) si inuenienda sit linea, ad quam ita se habeat linea data A, vt numerus C, ad numerum D; diuidenda erit linea A, in tot æquales partes, quot vnitates sunt in C; et sumenda alia linea F, tot earundem partium, quot unitates sunt in D. Hoc enim si fiat, erit A, ad F, vt C, ad D, vt demonstratum est.

HINC rursus apparet, quanam arte possit inueniri linea recta, ad cuius quadratum ita se habeat quadratum alterius datæ rectæ, vt numerus ad numerum. Si namque inueniẽda sit linea, ad cuius quadratum ita se habeat quadratum lineæ data A, vt numerus C, ad numerum D, inuenienda erit primum linea F, ex ijs, quæ modo diximus, ad quam sic se habeat A, vt C, ad D. Deinde accipiẽda inter A, & F, media proportionalis G. Erit enim quadratum ex A, ad quadratum ex G, vt C, numerus ad numerum D. Cum enim tres rectæ A, G, F, sint continue proportionales, erit ex coroll. propos. 20. lib. 6. vt A, ad F, atque adeo vt numerus C, ad numerum D, (cum sit vt A, ad F, ita C, ad D,) sic quadratum ex A, ad quadratum ex G; cum quadrata omnia sint similia similiterque descripta.



b 13. sexti

S CHO-

SCHOLIVM

IN hoc etiam theoremate manifestum est, lineas proportionem habentes, quam numerus ad numerum, commensurabiles esse longitudine & potentia, non autem potentia tãtum; quoniam habent, vt ex demonstratione constat, mensuram communem, quemadmodum & magnitudines A, & B, mensuram communem E, habere demonstratum est.

7. THEOR. 5. PROPOS. 7.
o.

INCOMMENSVRABILES magnitudines inter se proportionem non habent, quam numerus ad numerum.

SINT incommensurabiles magnitudines A, & B.
A ⊢—⊣ Dico eas proportionem non habere,
B ⊢——⊣ quam habet numerus ad numerum. Si enim A, & B, proportionem dicantur habere, quam numerus ad numerum; [a] erũt ipsæ commensurabiles. Quod est absurdum. ponuntur enim incommensurabiles. Non igitur A, & B, proportionem habent, quam numerus ad numerum. Quare incommẽsurabiles magnitudines, &c. Quod ostendendum erat.

[a] 6. decimi

SCHOLIVM.

QVOCVNQVE modo lineæ incommensurabiles sint, siue longitudine & potentia, siue longitudine tantum, semper colligemus, eas proportionem non habere, quam numerus ad numerum, vt vult theorema. Nam alias, vt demonstratum est, essent longitudine commensurabiles. Quod non ponitur.

8. THEOR. 6. PROPOS. 8.
o.

SI duæ magnitudines inter se proportionem non habeant, quam numerus ad numerum: Incommensurabiles erunt magnitudines.

NON habeant magnitudines A, & B, inter se proportionem, quam numerus ad numerum. Dico eas incõmensurabiles esse. Si enim A, & B, credantur esse cõmensurabiles; [a] erit earum proportio, quæ numeri ad numerum. Quod est absurdum. ponuntur enim non habere proportionem, quam numerus ad numerum. Non igitur commensurabiles sunt A, & B. Quocirca si duæ magnitudines inter se proportionem non habeant, &c. Quod erat ostendendum.

A ⊢——⊣
B ⊢——⊣

[a] 5. decimi

SCHOLIVM.

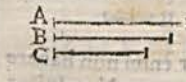
QVOD si lineæ proportionem non habeant, quam numerus ad numerum, erunt ipsæ necessario, ex hoc theoremate, longitudine incommensurabiles; alioquin proportionem haberent, quam numerus ad numerum, vt ad propos. 5. huius lib. demonstrauimus. quod est contra hypothesim. Non autem colligendũ est ex hoc theoremate, lineas, quæ proportionem non habent, quam numerus ad numerum, necessario & potentia incommensurabiles esse, vt manifestum est ex demonstratione. Non enim sequitur, si potentia tantum sint commensurabiles, eas proportionem habere, quam numerus ad numerum, vt in demonstratione theorematis assumitur; immo nullo modo talem proportionem habere possunt, vt in scholio propos. 5. huius lib. docuimus. Solum igitur infertur ex huius theorematis demonstratione, lineas proportionem non habentes, quam numerus ad numerum, longitudine esse incommensurabiles.

LEMMA.

SI sint tres quantitates continue proportionales, & aliæ tres continue quoque proportio-

nales; sitque vt prima illarum ad tertiam, ita prima harum ad tertiam: Erit & vt prima illarum ad secundam, ita prima harum ad secundã.

SINT continue proportionales tam quantitates A,B,C, quam D,E,F; siue priores in eodem genere sint, in quo posteriores, siue non; sitque vt A, ad C, ita D, ad F. Dico quoque esse vt A, ad B, ita D, ad E.



Quoniam enim tam proportio A, ad C, proportionis A, ad B, quam proportio D, ad F, proportionis D, ad E, duplicata est; ponunturque proportiones A, ad C, & D, ad F, æquales; erunt quoque proportiones A, ad B, & D, ad E æquales; quandoquidem earum proportiones duplicatæ æquales sunt.

IDEM sequitur, si plures quantitates sint, quã tres; si tamen in quatuor assumamus triplicatam proportionem loco duplicatæ, ad demonstrationem: & in quinque, quadruplicatam, &c.

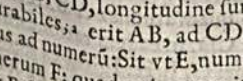
7.

THEOR. 7. PROPOS. 9.

QVAE a rectis lineis longitudine commensurabilibus fiunt quadrata; inter se proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerũ: Et quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; & latera habebunt longitudine commẽsurabilia. Quæ vero

vero a rectis lineis longitudine incommensurabilibus fiunt quadrata; inter se proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerũ: Et quadrata inter se proportionem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque latera habebunt longitudine commensurabilia.

SINT primum rectæ AB, CD, longitudine commensurabiles. Dico quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, proportionem habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratũ. Quoniam. n. rectæ AB, CD, longitudine sunt commẽsurabiles, [a] erit AB, ad CD, vt numerus ad numerũ: Sit vt E, numerus ad numerum F; quadrati autem ipsorum E, & F, sint G, & H. Quoniam igitur est AB, ad CD, vt E, numerus ad numerũ F; [b] habet autem quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, duplicatam proportionem lateris AB, ad latus CD: [c] Itẽ & numerus quadratus G, ad quadratum H, proportionem habet duplicatam lateris E, ad latus F; Erit proportio quadrati ex AB, ad quadratũ ex CD, eadem, quæ numeri quadrati G, ad numerũ quadratum H; quandoquidem ambæ hæ proportiones, duplicatæ sunt proportionum æqualium. Quod est propositũ.

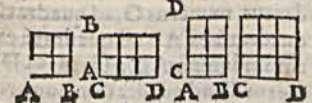


[a] 5. decimi

[b] 20. sexti

[c] 11. octa.

ALITER. Posita eadẽ constructione, cõtineatur rectangulum BD, sub rectis AB, CD. Et E, F, se mutuo multiplicãtes faciant I, qui medius proportionalis erit inter quadratos G,

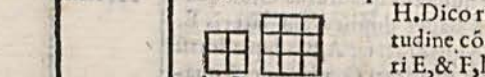


H, vt constat ex demonstratione propos. 11. lib. 8. atq; adeo in proportione lateris E, ad latus F, vt diximus in scholio eiusdē propos.

[a] 1. *sexti* Quoniam igitur est A B, ad C D, vt E, ad F: [a] Vt autem AB, ad C D, ita est quadratum ex AB, ad rectangulum BD, ob eandem altitudinem A B, si CD, ponatur basis rectanguli; Item vt E, ad F, ita est G, ad I: Erit quoque quadratum ex A B, ad rectangulum B D, vt quadratus numerus G, ad numerum I. Rursus quia est A B, ad

[b] 1. *sexti* CD, vt E, ad F, [b] Vt autem AB, ad CD, ita est rectangulum BD, ad quadratum ex CD, ob eandem altitudinem CD, si AB, ponatur basis rectanguli; Item vt E, ad F, ita est I, ad H: Erit quoque rectangulum BD, ad quadratum ex CD, vt I, numerus ad numerum quadratum H. Quare tres magnitudines, nimirum quadratum ex A B, rectangulum BD, & quadratum ex CD, in eadem ratione continua sunt, in qua tres numeri G, I, H. Igitur ex æquo, per lemma propos. 4. huius lib. erit quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, vt numerus quadratus G, ad numerum quadratum H. Quod est propositum.

SIT secundo quadratum ex A B, ad quadratum ex CD, vt numerus quadratus G, ad numerum quadratum H. Dico rectas AB, CD, esse longitudine cōmēsurabiles. Sint. n. numeri E, & F, latera quadratorum numerorum G, & H, vt in priori figura.



Quoniam igitur est quadratum ex AB, ad quadratum ex C D, vt quadratus numerus G, ad quadratū numerū H: [c] Habet aūt quadratū ex AB ad quadratū ex CD, proportionē duplicatam lateris AB, ad latus C D; [d] Item & quadratus numerus G, ad quadratum numerum H, proportionem habet duplicatam lateris E, ad latus F: Erit proportio lateris AB, ad latus CD, quæ lateris E, ad latus F; quandoquidem harum proportionum duplicatæ proportiones æquales sunt. Quare cum rectæ A B, C D, proportionem habeant

[c] 20. *sexti*

[d] 11. *octaui*

habeant, quam numeri E, F, [a] ipsæ commensurabiles erunt longitudine. Quod est propositum.

ALITER. Repetatur constructio figuræ posterioris. [b] Quia igitur est vt AB, ad CD, ita quadratū ex AB, ad rectangulū BD; Itē vt AB, rursum ad C D, ita rectāgulū BD, ad quadratū ex CD, vt supra diximus; erūt quadratū ex AB, rectangulū BD, & quadratū ex CD, continue proportionalia in ratione lineæ AB, ad lineā CD: Sunt autē & numeri G, I, H, cōtinue proportionales in rōne numeri E, ad numerū F, vt supra ostendimus; ponitur q; quadratū ex AB, ad quadratum ex CD, vt quadratus numerus G, ad quadratū numerū H. Igitur erit per lemma præcedens A B, ad C D, vt G, ad I, hoc est, vt E, ad F; ideoq; AB, CD, rectæ, proportionē habētes quā numeri E, F, cōmensurabiles sunt lōgitudine. Qd est propositū.

[a] 6. *decimi*

[b] 1. *sexti*

[c] 6. *decimi*

SINT tertio rectæ A, B, longitudine incommensurabiles. Dico earum quadrata proportionem non habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Si enim quadratum ex A, ad quadratum ex B, proportionem dicatur habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratū; erunt A, B, longitudine cōmensurabiles, vt iā est demonstratū. Quod est absurd. ponūtur enim longitudine incōmensurabiles. Non ergo quadratū ex A, ad quadratū ex B, proportionem habet, quā numerus quadratus ad numerū quadratum. Quod est propositū.

A
B

QVARTO, a c postremo quadratū ex A, ad quadratum ex B, non habeat proportionem, quā numerus quadratus ad numerū quadratū. Dico eas longitudine esse incōmensurabiles. Si enim longitudine cōmensurabiles credātur, habebūt earū quadrata, vt est demōstratū, proportionē quā quadratus numerus ad quadratū numerū. qd est absurdū. ponuntur. n. non habere. Nō ergo longitudine cōmensurabiles sunt A, & B. Quod est propositū. Igitur quæ a rectis lineis longitudine commensurabilibus fiunt quadrata, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

EX his manifestum est, rectas lineas, quæ longitudine sunt commensurabiles, omnino & potentia com

mensurabiles esse: Quæ vero potentia commensurabiles, non omnino & longitudine. Et quæ longitudine incommensurabiles sunt, non omnino & potentia incommensurabiles: Quæ vero potentia incommensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles esse.

QVONIAM .n. quadrata linearum longitudine commẽsurabilium proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, vt in hoc theoremate demonstratum est, hoc est, simpliciter quam numerus ad numerum; [a] ipsa commẽsurabilia erũt; [b] Ac propterea & latera ipsorum potentia commensurabilia existent. Quare lineæ longitudine commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles sunt.

[a] 6. decimi
[b] 3. defin.

DEINDE quia lineæ, quarum quadrata proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, sed tamẽ, quam numerus simpliciter ad numerum, [c] potẽtia quidem commensurales sunt, [d] cũ earum quadrata commẽsurabilia sint; at longitudine nequaquam, vt in hoc theoremate ostensum; perspicuum est, lineas potentia commensurabiles, non omnino & longitudine commensurabiles esse. Solum enim eæ lineæ potentia commensurabiles, quarum quadrata proportionem habent quam numerus quadratus ad numerum quadratum, longitudine quoque sunt commensurabiles, vt constat ex secunda parte huius theorematis.

[c] 3. defin.
[d] 6. decimi

RVRSVS quia lineæ, quarum quadrata proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, sed tamen, quam numerus ad numerum, incommensurabiles quidem sunt longitune, at potentia commensurabiles, vt modo diximus; liquido constat, lineas longitudine incommensurabiles, non omnino & potentia incommensurabiles esse.

esse. Solum enim eæ lineæ longitudine incommensurabiles, quarum quadrata proportionem non habent, quam numerus ad numerum, [a] potẽtia quoque incommensurabiles sunt, [b] cum earum quadrata incommensurabilia sint.

[a] 4. defin.
[b] 8. decimi

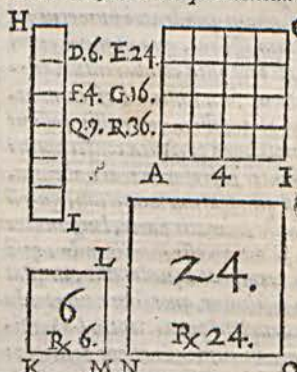
POSTREMO lineas potentia incommensurabiles, esse omnino & longitudine incommensurabiles, perspicuum est. Nam si longitudine essent commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles forent, vt patet ex prima parte corollarij. Quod est absurdum. Ponuntur enim potentia incommensurabiles. Quam ob rem lineæ potentia incommensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles sunt.

SCHOLIVM.

VT autem scopus priorum duarum partium huius theorematis planius perfectiusq; percipiatur, diligenter considerãda sunt hæc, quæ sequuntur. Primum lineas rectas longitudine commensurabiles, quarum quadrata, ex prima parte theorematis, proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, non solum esse eas, quæ numeris exprimi possunt, si cũ linea Rationali proposita comparentur; quales sunt illæ, quæ in demonstratione sunt positæ: (est enim recta AB, 2. & CD, 3.) verum etiam illas, quæ nullis possunt numeris efferri, si cum Rationali linea proposita conferantur: Deinde econtrario, quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, quorũ lineæ, seu latera, ex secunda theorematis parte, longitudine sunt commensurabilia, non solum ea esse intelligenda, quæ continent totidem quadratas mensuras æquales illis, in quas quadratum Rationalis lineæ resolvitur, quot sunt vnitates in numeris quadratis, eandem cum ipsis proportionem habentibus; cuiusmodi sunt quadrata in demonstratione descripta: (continet enim quadratum ex AB, quatuor mensuras quadratas, & quadratum ex CD, nouem; quot nimirum vnitates sunt in quadratis numeris G, H.) Sed ea etiam, quæ vel pauciores, vel plures mensuras quadratas complectuntur, quã

sunt unitates in numeris illis quadratis, si cum quadrato lineæ Rationalis conferantur. Sæpe numero enim lineæ datæ cõmensurabiles inter se sunt longitudine, sed numeris exprimi non possunt, propterea quod Rationali lineæ propositæ sunt longitudine incommensurabiles; Ac propterea quadrata illarum proportionem quidem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, vt in hoc theoremate est ostensum, at pauciores quadratas mensuras, vel plures continent, quam sunt in quadratis illis numeris vnitates. Hæc autem omnia perspicua faciemus hac demonstratione.

EXPONATVR lineæ Rationalis AB, expressa numero 4. cuius quadratum AC, continebit mensuras quadratas 16. Sint quoque numeri D, E, plani similes non quadrati, habentes tamen proportionem, [a] *vt in Arithmeticis est demonstratum, quam quadratus numerus F, ad quadratum numerum G, nempe 4. ad 16. Deinde sumatur rectangulum HI, constans ex sex quadratis mensuris quadrati AC, quot nimirum vnitates in D, numero continentur;* [b] *atq; ipsi HI, quadratum æquale constituatur KL, cuius latus KM. Postremo per ea, quæ in coroll. propos. 6. huius lib. ostendimus, inuenietur recta NO, ad cuius quadratum NP, ita se habeat KL, quadratum rectæ KM, vt numerus D, ad numerum E, vel vt quadratus F, ad quadratum G. Quoniã igitur est vt quadratus numerus F, ad quadratum numerum G, vel vt numerus D, ad numerum E, videlicet 6. ad 24. ita quadratũ KL, ad quadratum NP, per constructionem; Continet autem quadratum KL, 6. mẽsuras quadratas, quadratum 16. continet quadratũ Rationale AC: (constructum enim est quadratum KL, æquale rectangulo HI, constanti ex 6. huiusmodi quadratis mensuris.) continebit quadratum NP, earundem mensurarum quadratarũ 24. ac propterea*



[a] 26. octaui

[b] 14. secũdi

propterea KM, NO, latera quadratorum KL, NP, erũt Rad. 6. & Rad. 24. quæ numeris exprimi nequeunt, cũ 6. & 24. non sint numeri quadrati, eruntq; lineæ Rationali AB, longitudine incommensurabilia, inter se autem commensurabilia longitudine, ex hoc theoremate, cum eorum quadrata proportionem habeant, quam quadratus numerus F, ad quadratum numerum G. Quod etiam ex hoc constare potest. Nam cum quadrata KL, NP, proportionem habeãt, ex coroll. propos. 20. lib. 6. duplicatam laterum KM, NO, sit autem quadraterum proportio subquadrupla, nempe 1. ad 4. erit proportio laterum subdupla uidelicet 1. ad 2. huius enim illa duplicata est, vt hic apparet 1. 2. 4. [a] *Quare longitudine commensurabiles sunt rectæ KM, NO, cum proportionem habeant, quam numerus ad numerum. Intelligendæ sunt ergo in hoc theoremate lineæ etiam illæ longitudine commensurabiles, quæ numeris non possunt exprimi, si cum lineæ Rationali comparentur. Quod si cõsiderentur eædem lineæ KM, NO, simpliciter, & absolute, nulla habita ratione lineæ Rationalis AB, numeris poterunt efferri. Cum. n. proportionem habeant subduplam, si KM, diuidatur in duas partes æquales, diuidetur NO, in eiusdem magnitudinis partes 4. si illa in 3. secabitur hæc in 6. &c. At vero hæ partes nullo modo æquales sunt partibus lineæ Rationalis AB, immo illis omnino sunt longitudine incommensurabiles, vt diximus.*

RVRSVS, quia quadrata KL, NP, proportionem habentia, quam quadratus numerus F, ad quadratum numerũ G, plures quadratas mensuras continent æquales illis, in quas AC, quadratum Rationalis lineæ AB, resoluitur, quam vnitates sunt in dictis numeris quadratis F, G; (Nam KL, æquale est sex huiusmodi mensuris, & NP, continet 24. At numerus quadratus F, componitur ex quatuor unitatibus, & G, ex 16.) Et si maiores quadrati in eadẽ proportione sumantur Q, R, pauciores tales mensuras complectuntur quadrata KL, NP, quam sunt vnitates in numeris quadratis Q, R, cũ alter ex 9. alter vero ex 36. vnitatibus cõstituatur; manifestũ est, in hoc theoremate intelligenda quoq; esse quadrata proportionẽ habentia, quã numerus quadratus ad numerũ quadratũ, quæ pauciores quadratas mẽsuras, vel plures cõprehẽdũt, quã vnitates in illis quadratis numeris reperiuntur, si ea conferantur

[a] 6. decimi

cum

cum quadrato lineæ Rationalis propositæ. Quod si eadē quadrata KL, NP, considerentur absolute, & simpliciter, nulla habita ratione quadrati AC, ex Rationali linea AB. descripti, resolui poterunt in totidem mensuras quadratas, quot vnitates in quadratis numeris F, G, vel Q, R, continentur. Nā si recta KM, diuidatur in duas partes, & NO, in quatuor, vt dictum est, continebit quadratum KL, quatuor mensuras quadratas, & quadratum NP, sexdecim, quot scilicet vnitates reperiuntur in quadratis numeris F, G. Item, si eadem linea secentur in partes tres, & sex, habebunt earum quadrata mensuras quadratas 9. & 36. quot nimirum vnitates comprehenduntur in numeris quadratis Q, R, &c. At huiusmodi mensuræ nullo modo æquales sunt quadratis mensuris, in quas quadratum AC, Rationalis lineæ AB, resoluitur.

IDEM dicemus de omnibus alijs quadratis, eorumq; lateribus, quorum superficies non exprimuntur numeris quadratis, dummodo proportionem habeant inter se, quam numeri quadrati ad numeros quadratos; cuiusmodi sunt quadrata, quorum superficies sint 12. & 3. habentes proportionem, quā quadratus numerus 16. ad quadratum numerum 4. &c.

ITAQVE theorema hoc intelligendum est de lineis longitudine commensurabilibus inter se, quamuis interdum Rationali lineæ incommensurabiles sint, vt sit sensus. Quadrata quæ describuntur a rectis lineis longitudine inter se commensurabilibus, licet interdum longitudine sint incommensurabiles lineæ Rationali propositæ, proportionem inter se habent, quā quadratus numerus ad quadratum numerum, quamuis ipsa quadrata, si cum quadrato Rationalis lineæ conferantur, semper numero numeris quadratis nullo modo possint exprimi: Et quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, siue hæc quadrata numeris quadratis possint exprimi, siue non, si comparentur cum quadrato Rationalis lineæ, latera habebunt longitudine inter se commensurabilia, etiamsi lineæ Rationali sint longitudine incommensurabilia, &c.

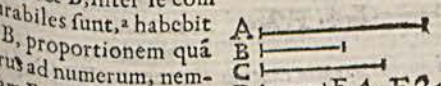
COLLIGIT Campanus ex hoc theoremate, in figuris quadratis diametrum lateri incommensurabilem esse longitudine, hac ratione. Quoniam quadratum diametri duplū est quadrati lateris, vt ad propos. 47. lib. 1. demonstrauimus; Nulla

Nulla autem proportio dupla eadem esse potest, quæ quadrati numeri ad quadratum numerum, quod inter numeros duplā proportionem habentes nullus medius cadat proportionalis, vt in scholio propos. 8. lib. 8. ostendimus: Non habebunt quadratum diametri, & quadratum lateris proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quare ex vltima parte huius theorematis eorum latera, nempe diameter, & latus in uno eodemque quadrato, longitudine inter se sunt incommensurabilia. Hoc etiam nos demonstrauimus in scholio propos. 8. lib. 8. Quod tamen clarius ostendet Euclides propos. vltima huius lib.

THEOR. 8. PROPOS. 10. 11. 10.

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima vero secundæ fuerit commensurabilis; & tertia quartæ commensurabilis erit. Et si prima secundæ fuerit incommensurabilis; & tertia quartæ incommensurabilis erit.

SINT proportionales quatuor magnitudines, A, B, C, D, sitque A, prima secundæ B, commensurabilis. Dico & tertiam C, quartæ D, commensurabilem esse. Quoniam. n. A, & B, inter se commensurabiles sunt,[a] habebit A, ad B, proportionem quā numerus ad numerum, nempe quam E, ad F: Ponitur autem vt A, ad B, ita C, ad D:



Igitur & C, ad D, proportionem habet quam numerus E, ad numerum F.[b] Quare C, & D, commensurabiles inter se sunt.

SED sit iam A, ipsi B, incommensurabilis. Dico & C, ipsi D, esse incommensurabilem. Quoniam. n. A, & B, incommensurabiles sunt,[c] non habebit A, ad B, proportionem

[a] 5. decimi

[b] 6. decimi

[c] 7. decimi

tionem, quam numerus ad numerum: Ponitur autem vt A, ad B, ita C, ad D. Igitur nec C, ad D, proportionem habet, quam numerus ad numerum. [a] Quare C, & D, incommensurabiles sunt inter se. Si quatuor ergo magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

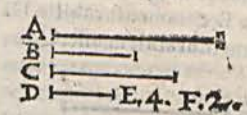
[a] 8. decimi

SCHOLIVM.

QVOD si quatuor propositæ magnitudines fuerint lineæ, prima autem secundæ commensurabilis fuerit longitudine, erit & tertia quartæ longitudine commensurabilis, vt ex demonstratione huius theorematis apparet. Eodem enim modo ostendemus posteriores duas proportionem habere numeri ad numerum. Quare, vt in scholio propos. 5. huius lib. diximus, longitudine commensurabiles sunt.

SI autem prima secundæ fuerit commensurabilis potentia tantum, erit & tertia quartæ potentia tantum commensurabilis. Repetatur enim eadem figura. Quoniam igitur A, commensurabilis est potentia ipsi B, [b] erunt earum quadrata commensurabilia, [c] ac propterea proportionem habebunt, quã numerus ad numerum. [d] Est autem, vt quadratum ex A, ad quadratum ex B, ita quadratum ex C, ad quadratum ex D. (quod quatuor lineæ propositæ A, B, C, D, proportionales sint, & earum quadrata figuræ similes similiterq; descriptæ.) Igitur & quadrata ex C, D, proportionem habebunt, quã numerus ad numerũ. [e] Quare commensurabilia erunt. [f] Ac propterea lineæ C, D, potentia commensurabiles.

[b] 3. defin. [c] 5. decimi [d] 22. sexti



[e] 6. decimi [f] 3. defin.

Quod autem potentia tantum sint commensurabiles, ita manifestum fiet. Quoniam rectæ A, B, cum sint commensurabiles potentia tantum, longitudine incommensurabiles sunt; nam erit earum proportio, quæ numeri ad numerum, vt in scholio propos. 7. huius lib. docuimus; Ac propterea neque C, D, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Longitudine ergo incommensurabiles sunt C, D, ex scholio propos. 8. huius lib. Sunt autem potentia commensurabiles, vt ostendimus: Igitur potentia tantum sunt commensurabiles. Quod est propositum.

EADEM

EADEM ratione, si prima secundæ sit incommensurabilis longitudine tantum, erit & tertia quartæ longitudine tantum incommensurabilis. Nam si A, & B, sint longitudine tantum incommensurabiles; erunt ipsarum potentiæ commensurabiles; ac propterea ipsæ potentia tantum commensurabiles erunt. Igitur, vt nunc ostendimus, erunt quoque rectæ C, D, potentia tantum commensurabiles; Ac idcirco longitudine tãtum incommensurabiles erunt. Quod est propositum.

RVRSVS si quatuor magnitudinum priores duæ fuerint lineæ, duæ vero reliquæ superficies, vel solidæ; sequetur nihilominus, si lineæ sint longitudine commensurabiles, vel incommensurabiles, & reliquas duas magnitudines commensurabiles, vel incommensurabiles esse. Si enim lineæ longitudine sint commensurabiles, erit earum proportio, quæ numeri ad numerum, ex ijs, quæ in scholio propos. 5. huius lib. docuimus. Cum ergo habeant reliquæ duæ magnitudines proportionem eandẽ, quam lineæ, erit quoque illarum proportio, quæ numeri ad numerum; [a] atque adeo commensurabiles erunt. Si vero lineæ lõgitudine incommensurabiles sint, siue potentia commensurabiles existant, siue non; non erit earum proportio, quæ numeri ad numerum, vt constat ex scholio propos. 7. huius lib. Igitur neq; reliquarum duarum magnitudinum eandem cum illis proportionem habentium, proportio erit, quæ numeri ad numerum. [b] Quare incommensurabiles erunt. Quod est propositum.

[a] 6. decimi [b] 8. decimi

EODEM modo, si priores duæ magnitudines fuerint superficies, vel solidæ, posteriores vero duæ, lineæ, demõstrabimus, si plana, vel solida commensurabilia sint, vel incommensurabilia, lineas longitudine commensurabiles esse, vel incommensurabiles. Si enim plana, solidaue commensurabilia sint, [c] habebunt ipsa proportionem, quam numerus ad numerum. Igitur & lineæ eandem cũ ipsis rationẽ habentes, proportionem habebunt, quã numerus ad numerũ; ac propterea longitudine commensurabiles erunt, vt diximus in scholio propos. 6. huius lib. Si vero plana, vel solida sint incommensurabilia, nõ habebũt ea proportionem, quam numerus ad numerum. Igitur neq; lineæ eandem cum ipsis proportionem habentes, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Ergo longitudine incommensurabiles erunt per ea, quæ docuimus in scholio propos. 8. huius lib. Quod est propositum.

[c] 5. decimi

LEMMA

LEMMA.

DVOS numeros planos innenire, qui proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

INVENIANTVR duo plani numeri non similes, per ea, quæ ad finem lib. 8. docuimus. Nam huiusmodi numeri non habebunt proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, vt in scholio propos. 26. lib. 8. demonstrauimus. Quod est propositum.

QVOD si plures numeros inuenire velimus, quorum quilibet duo proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, sumemus quotcunque numeros primos, per ea, quæ in scholio propos. 20. lib. 9. tradidimus, A, 3. B, 5. C, 7. D, 11. E, 13. *horum primorum acceptorum proportionem inter se habent, ex scholio propos. 26. lib. 8. quam numeri quadrati ad numeros quadratos, cum non sint plani similes, vt ad finem lib. 8. docuimus.*

SCHOLIVM.

PORRO inuentionem numerorum planorum non similium, qui videlicet proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, non recte quidam tradiderunt hoc loco, inter quos etiam est Federicus Commandinus. Quod vt ostendamus, adducenda est eorum ratio, qua dictos numeros inuenire conantur. Ita igitur rem expediunt.

EX-

EXPONANTVR quatuor numeri A, B, C, D, ita vt non sit sicut A, ad C, ita B, ad D; & fiat ex A, B, numerus E; & ex C, D, numerus F. Perspicuũ igitur est E, F, numeros planos esse, planos autem dissimiles; quoniam latera proportionalia non sunt, quod facere oportebat.

A, 2.		C, 3.
B, 6.		D, 16.
E, 12.		F, 48.

HÆC est eorum ratio inueniendorum numerorum planorum non similium. Errãt autem huiusmodi interpretes, quia sæpe numero inuenti numeri secundum eorum doctrinam, plani similes sunt. Nam numeri ex eorum demonstratione inuenti, 12. & 48. sunt plani similes, cum proportionem habeant, quam quadrati numeri 4. & 16. Itemq; prior numerus latera habeat 3. & 4. proportionalia lateribus posterioris 6. & 8. vt constat; quamuis latera prioris ab illis assumpta 2. & 6. non sint proportionalia lateribus posterioris acceptis 3. & 16. Satis enim est, vt duo numeri plani sint similes, aliqua duo latera vnius proportionalia esse quibusdam duobus lateribus alterius, non autem requiritur, vt quæcunque duo latera vnius proportionalia sint quibuscunq; duobus lateribus alterius; quæ de re plura scripsimus in defin. 21. lib. 7. & in scholio propos. 23. lib. 8.

PROBL. 3. PROPOS. 11. 10. 11.

PROPOSITAE rectæ lineæ inuenire duas rectas lineas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantum, alteram vero etiam potentia.

SIT recta proposita A, cui primum inuenienda sit linea incommensurabilis longitudine tantum. Inueniantur, per lemma præcedens, duo numeri B, & C, proportionem non habentes, quam quadratus numerus ad quadratum

dratum numerum: Deinde ex corollario propos. 6. huius lib. reperiatur linea D, ad cuius quadratum sic se habeat quadratum ex A, vt numerus B, ad numerũ C. Dico D, esse ipsi A, incommensurabilem longitudine tantum. Quod enim A, & D, longitudine sint incommensurabiles, ita probabitur. Quoniam est quadratum ex A, ad quadratum ex D, vt numerus B, ad numerum C; non est autem proportio B, ad C, quæ numeri quadrati ad numerum quadratum; neq; quadratum ex A, ad quadratum ex D, proportionem habebit, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. [a] Igitur rectæ A, & D, longitudine incomensurabiles sunt. Quod autem tantum longitudine sint incommensurabiles, patet. Cum enim quadrata ex A, & D, proportionem habeãt, quam numerus B, ad numerum C, [b] ipsa commẽsurabilia erunt. Sunt ergo rectæ A, & D, ex definitione, potentia commensurabiles. Quare longitudine tantum incommensurabiles sunt.

A ——— B, 10.
E ———
D ——— C, 6.

[a] 9. decimi

[b] 6. decimi

SIT iam eidem rectæ propositæ A, inueniẽda linea incommẽsurabilis lõgitudine, & potẽtia. [c] Inueniatur recta E, inter rectas A, & D, longitudine tantum incõmensurabiles, media proportionalis. Dico E, ipsi A, incommensurabilẽ esse longitudine, & potẽtia. Quoniam enim est quadratum ex A, ad quadratum ex E, per coroll. propos. 20. lib. 6, vt A, ad D; & A, incommensurabilis est longitudine ipsi D, vt iam est ostensum [d] erit & quadratum ex A, incommensurabile quadrato ex E. Quare rectæ A, E, ex definitione, potẽtia sunt incõmensurabiles; ac proinde ex coroll. propos. 9. huius lib. & omnino lõgitudine incõmensurabiles sunt. Est igitur E, ipsi A, incommensurabilis longitudine, & potentia. Quocirca propositæ rectæ lineæ inuenimus duas rectas, &c. Quod erat demonstrandum.

[c] 13. sexti

[d] 10. deci.

SCHOLIVM.

SI igitur recta A, proposita statuatur Rationalis, ita vt ab ea mensuræ cæterarum sumantur; erit & recta D, per definitionem 6. Rationalis, quia potentia illi est commensurabilis, licet eidem longitudine incommensurabilis sit. At vero E, Irrationalis, ex defin. 7. cum Rationali A, incommensurabilis sit longitudine, & potentia.

CAETERVM ex demonstratione huius theorematis liquido constat, rectam mediam proportionalem inter duas rectas potentia tantum commensurabiles, vel quod idem est, inter duas longitudine tantum incommensurabiles, esse vtrilibet illarum incommensurabilem longitudine & potentia; atque adeo appellari Irrationalem, si alterutra illarum statuatur Rationalis. Ex eo enim quod rectæ A, D, sunt longitudine tantum incommensurabiles, vel commensurabiles potentia tantum, demonstrauimus rectam E, inter illas mediam proportionalem, esse ipsi A, incommensurabilem longitudine, & potentia: Eodemque argumento ostendemus eandem longitudine, & potentia ipsi D, esse incommensurabilem. Cum enim rectæ D, E, A, sint continue proportionales, erit ex coroll. propos. 20. lib. 6. vt quadratum ex D, ad quadratum ex E, ita recta D, ad rectam A: Est autem recta D, recta A, incommensurabilis longitudine, [a] igitur & quadratum ex D, quadrato ex E, incommensurabile erit. Quare rectæ D, & E, ex defin. incommensurabiles sunt potentia. atque adeo & longitudine, per coroll. propos. 9. huius lib.

A ——— B, 10.
E ———
D ——— C, 6.

[a] 10. deci.

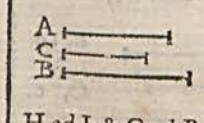
IN codicibus vulgatis præponitur hæc vndecima propositio à Theone propositioni decimæ præcedenti: quod errore librariorum factum esse puto, cum secunda pars huius ex præcedenti propositione decima demõstretur, vt ex dictis apparet.

THEOR. 9. PROPOS. 12.

12.
8.

QVAE eidem magnitudini sunt commensurabiles, & inter se sunt commensurabiles.

SIT vtraq; magnitudo A, B, magnitudini C, commensurabilis. Dico & A, B, inter se esse commensurabiles. Cum enim A, & C, sint commensurabiles, [a] habebit A, ad C, proportionem, quam numerus ad numerum: habeat quam numerus D, ad numerũ E. Rursus quia C, B, commensurabiles sunt, habebit quoque C, ad B, proportionem, quam numerus ad numerum: habeat quam numerus F, ad numerum G, [b] sumanturque tres numeri H, I, K, minimi deinceps proportionales in proportionibus D, ad E, & F, ad G; sitque H, ad I, vt D, ad E, hoc est, vt A, ad C; & I, ad K, vt F, ad G, hoc est, vt C, ad B. Quoniam igitur est A, ad C, vt H, ad I; & C, ad B, vt I, ad K; erit ex æquo A, ad B, vt H, ad K, numerus ad numerum. Quare A, B, proportionem habentes, quam numeri H, K, [c] inter se commensurabiles sunt. Quæ ergo eidem magnitudini commensurabiles sunt, &c. Quod demonstrandum erat.



[a] 5. decimi

[b] 4. octaui

[c] 6. decimi

SCHOLIVM.

QVOD si magnitudines A, B, C, sint lineæ, atq; A, & B, ipsi C, longitudine commensurabiles existant, erunt quoq; A, & B, inter se longitudine commensurabiles, vt constat ex demonstratione theorematis, quia eodem modo ostendemus, lineas A, & B, proportionem habere, quam numerus H, ad numerum K: Quare longitudine commensurabiles erunt, vt ad propos. 6. diximus. Si vero A, & B, fuerint ipsi C, potentia commensurabiles, licet eidem longitudine sint incommensurabiles, demonstrabuntur eodem modo & A, B, inter se commensurabiles potentia. Cum enim A, & C, sint potentia commensurabiles, [d] erit quadratum ex A, ad quadratum ex C, vt numerus ad numerum, nempe, vt D, ad E, cum quadrata ex A, C, per defin. sint commensurabilia. Eodem modo erit quadratum ex C, ad quadratum ex B, vt numerus ad numerũ, nimirũ vt F, ad G. [e] Sumptis ergo in eisdem rationibus D, ad E, & F, ad G, tribus numeris minimis H, I, K, deinceps proportionalibus; erit rursum ex æquo quadratũ ex A, ad quadratũ ex B, vt numerus H, ad numerum K. [a] Quare quadrata ex A, & B, commensurabilia sunt; atque adeo lineæ A, B, potentia commensurabiles. Non tamen ex hoc sequitur, A, & B, potentia tantum esse commensurabiles. Possunt enim esse duæ lineæ lõgitudine inter se cõmensurabiles, licet vtraq; cuipiam alteri lineæ potentia tantũ sit commensurabilis; quales sunt duæ Rationales longitudine inter se cõmensurabiles, potentia vero tantum Rationali expositæ commẽsurabiles, quas quidem inueniemus posteà in scholio 2. propos. 19. huius lib.

[d] 5. decimi

[e] 4. octaui

[a] 6. decimi

SED & conuersum quodammodo huius theorematis demonstrabimus hoc modo.

SI sint duæ magnitudines commensurabiles, altera vero sit vni cuipiam commensurabilis; erit & reliqua eidem commensurabilis.

SINT enim A, & B, commensurabiles, sitq; A, ipsi C, commensurabilis. Dico & B, eidem C, commensurabilem esse. Cum enim tam B, quam C, ipsi A, sit commensurabilis; erunt quoque B, & C, ex hoc theoremate, inter se commensurabiles. Quod est propositum.

A ----------
C --------
B ----------

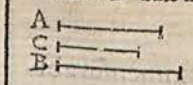
QVOD si magnitudines A, B, C, sint lineæ, & A, B, commensurabiles longitudine, sit autem A, ipsi C, commensurabilis longitudine; erit & B, reliqua eidem C, longitudine commensurabilis. Nam cum tam B, quam C, ipsi A, longitudine sit commensurabilis, erunt etiam B, C, inter se commensurabiles longitudine, vt ostendimus. At vero si lineæ A, & B, potentia tantũ sint cõmensurabiles, & A, ipsi C, commensurabilis siue longitudine, & potentia, siue potentia tantũ, colligemus quidẽ eodem argumento, reliquã B, eidem C, potentia esse commensurabilẽ; quia vtraq; B, C, ipsi A, hac ratione potentia est cõmensurabilis ex hypothesi. Non autẽ colligere licebit, si A, ipsi C, cõmensurabilis sit longitudine, reliquam B, eidẽ C, longitudine commensurabilẽ esse, quia non vtraque B, C, ipsi A, longitudine cõmensurabilis est, sed C, quidẽ longitudine, at vero B, potentia tantum, vt ex hypothesi constat.

12. 0.

THEOR. 10. PROPOS. 13.

SI sint duæ magnitudines, & altera quidem eidem sit commensurabilis, altera vero incommensurabilis: Incommensurabiles erunt magnitudines.

SINT duæ magnitudines A, & B, quarum A, sit ipsi C, commensurabilis, & B, eidem C, incommensurabilis. Dico A, & B, inter se incommẽsurabiles esse. Si enim B, dicatur esse cõmensurabilis ipsi A; cum eidem A, commensurabilis ponatur C; [a] erunt B, & C, inter se commensurabiles. quod est absurdum. ponitur enim B, ipsi C, incommensurabilis. Non ergo B, ipsi A, commensurabilis est. Quare si sint duę magnitudines, & altera quidem, &c. Quod erat ostendendum.



[a] 12. deci.

SCHOLIVM.

SI magnitudines A, B, C, sint lineæ, & A, quidem ipsi C, longitudine commensurabilis, at B, eidem C, incommensurabilis longitudine; erunt A, & B, longitudine incommensurabiles. Si enim longitudine commensurabiles essent, [b] *ostenderemus quoque B, C, esse inter se longitudine commensurabiles. (cum hoc posito, vtraque B, C, ipsi A commensurabilis esset longitudine) quod non ponitur. Pari ratione, si A, ipsi C, potentia sit commensurabilis, siue tantum, siue etiam longitudine, at vero B, eidem C, potentia incommensurabilis; erunt A, & B, potentia incommensurabiles. Si enim essent commensurabiles potentia, essent quoque B, & C, potentia commensurabiles. (cum hoc posito, vtraque B, C, ipsi A, potentia esset commensurabilis,) Quod est absurdum. Ponitur enim B, ipsi C, potentia incommensurabilis.*

[b] 12. deci.

QVONIAM vero hæc propositio 13. apud Theonem lemma

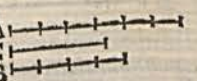
lemma est, sit, vt posthac in nostra editione numerus propositionum Euclidis differat ab eo, quem Theon sequitur. Reliquimus enim de dita opera ordinem ac seriem Theonis hoc loco, quia a iunioribus, & peritioribus Geometris hoc theorema in numerum propositionum Euclidis iam est ascitum.

THEOR. 11. PROPOS. 14.

13. 8.

SI sint duæ magnitudines commensurabiles, altera autem ipsarum magnitudini cuipiam incommensurabilis fuerit: Et reliqua eidem incommensurabilis erit.

SINT duæ magnitudines commensurabiles A, & B, quarum A, incommẽsurabilis sit alteri cuipiam C. Dico & B, eidem C, esse incommensurabilem. Nam si B, dicatur esse commensurabilis ipsi C, ac propterea & C, ipsi B; cũ & A, ipsi B, ponatur commensurabilis; [a] erunt & A, C, inter se commensurabiles. Quod est absurdum. Ponitur enim A, ipsi C, incommensurabilis. Non ergo B, ipsi C, commensurabilis est. Quare si sint duæ magnitudines commensurabiles, &c. Quod demonstrandum erat.



[a] 12. deci.

SCHOLIVM.

HIC quoque, si magnitudines A, B, C, sint lineæ, & A, B, commensurabiles longitudine; sit autem A, ipsi C, siue longitudine tantum, siue longitudine & potentia incommensurabilis; erit & B, eidem C, longitudine incommensurabilis. Si enim B, & C, essent longitudine commensurabiles, [b] *essent quoque A, & C, commensurabiles longitudine. (Cum hoc posito, vtraque A, & C, ipsi B, longitudine esset commensurabilis.) Quod est absurdum. ponitur enim A, ipsi C, longitudine*

[b] 12. deci.

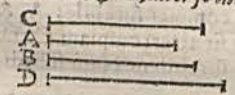
dine incommensurabilis. Quod si A, & B, cõmensurabiles sint potentia tantum, & A, ipsi C, potentia incommensurabilis, colligemus eodem modo, & B, ipsi C, potentia incommensurabilem esse. Alias si B, C, potentia essent commensurabiles; & A, C, potentia commensurabiles essent. (cum hoc posito, utraque A, C, ipsi B, potentia esset commensurabilis.) Quod non ponitur.

a 12. deci.

COLLIGVNT porro ex hoc theoremate interpretes Euclidis sequens theorema ad ea, quæ in hoc lib. demonstrantur, perutile.

QVAE incommensurabilibus sunt commensurabiles; & inter se incommensurabiles erunt.

SINT duæ magnitudines incommẽsurabiles A, B, quibus commensurabiles sint C, & D, nempe C, ipsi A, & D, ipsi B. Dico C, & D, inter se incommensurabiles esse. Quoniam enim A, & C, commensurabiles ponuntur, & est A, ipsi B, incommensurabilis; b erit quoque reliqua C, eidem B, incommensurabilis. Rursus quia D, & B, commensurabiles ponuntur, & est B, ostensæ ipsi C, incommensurabilis; c erit & D, reliqua eidem C, incommensurabilis. Quod est propositum.



b 14. deci.

c 14. deci.

SI autem magnitudines A, B, C, D, sint lineæ, & A, B, vel longitudine tantum incommensurabiles, vel longitudine & potentia; sint autem C, D, ipsis A, B, longitudine commensurabiles; erunt C, & D, eodem argumento, longitudine incõmensurabiles. Si vero A, & B, incõmensurabiles sint potẽtia, & ipsis potẽtia tantũ cõmensurabiles C, & D; ostendemus similiter C, & D, potẽtia esse incõmẽsurabiles; vt perspicuũ ẽt.

LEMMA.

DVABVS datis rectis lineis inęqualibus, inuenire id, quo maior plus potest, quam minor.

QVAMVIS id, quod lemma hoc proponit, ostenderimus antea ad propos. 47. lib. 1. tamen quia hic breuius ex ijs, quæ tradita sunt in lib. 3. & 4. demonstratur, non inutile iudicauimus, idem hoc loco aliter efficere. Sint ergo datæ duæ rectæ lineæ inæquales AB, & C, quarum AB, maior, oporteatque inuenire, quo AB, plus possit quam C. Diuisa AB, bifariam in D, describatur ex centro D, & interuallo DA, vel DB, semicirculus AEB, a in quo aptetur recta AE, ipsi C, æqualis, iungaturque recta EB. Dico rectam AB, plus posse quam C, quadrato rectę EB. b Cum enim angulus E, in semicirculo rectus sit; c erit quadratum ex AB, æquale quadratis ex AE, EB; atque idcirco AB, plus poterit quam AE, hoc est, quam C, quadrato rectę EB. Quod est propositum. Similiter

a 1. quarti

b 31. tertij

c 47. primi

DVABVS datis rectis lineis siue æqualibus, siue inæqualibus, inuenire rectam, quæ illas potest.

HOC etiam aliter tradidtmus ad propos. 47. lib. 1. Sint ergo datę duę rectæ AE, EB, quæ si coniungantur ad angulum rectum E, poterit eas recta ducta AB, d quippe cum quadratum ex AB, æquale sit quadratis ex AE, EB.

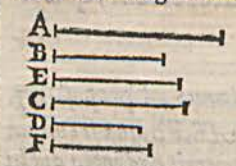
d 47. primi

THEOR. 12. PROPOS. 15. 14. 12.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, prima vero tanto plus possit

quam ſecunda, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine: Et tertia tanto plus poterit quã quarta, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quod ſi prima tanto plus poſſit quã ſecunda, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi incõmenſurabilis lõgitudine: Et tertia tanto plus poterit quam quarta, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.

SINT quatuor rectæ lineæ proportionales A B, C D, poſsitque A, prima plus quam B, ſecunda, quadrato rectæ E, & C, tertia plus poſsit quam D, quarta, quadrato rectæ F. Dico, ſi E, commenſurabilis ſit longitudine ipſi A; & F, commenſurabilem eſſe longitudine ipſi C: Si vero E, ſit longitudine incommenſurabilis ipſi A; & F, ipſi C, longitudine incommenſurabilẽ eſſe. Quoniam enim eſt vt A, ad B, ita C, ad D, [a] erit quoque vt quadratum ex A, ad quadratum ex B, ita quadratum ex C, ad quadratum ex D. Eſt autẽ quadratum ex A, æquale quadratis ex B, E, per hypotheſim; & quadratum ex C, quadratis ex D, F. Igitur erunt quoque, vt quadrata ex B, E, ad quadratum ex B, ita quadrata ex D, F, ad quadratum ex D: Et diuidendo, vt quadratum ex E, ad quadratum ex B, ita quadratum ex F, ad quadratum ex D; [b] Ac propterea erit etiam vt recta E, ad rectam B, ita recta F, ad rectam D; conuertendoque vt B, ad E, ita D, ad F. Quia igitur eſt vt A, ad B, ita C, ad D; & vt B, ad E, ita D, ad F, erit quoque ex æquo, vt A, ad E, ita C, ad F. Quare ſi A, eſt



[a] 22. ſexti

[b] 22. ſexti

eſt longitudine commenſurabilis ipſi E, erit quóque C, ipſi F, longitudine commẽſurabilis: Et ſi A, longitudine eſt incommenſurabilis ipſi E, erit & C, ipſi F, incommenſurabilis longitudine, vt in ſcholio propoſ. 10. huius lib. tradidimus. Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.

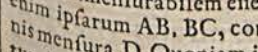
SCHOLIVM.

EODEM *argumento oſtendemus, ſi E, potentia tantũ commenſurabilis fuerit ipſi A; & F, potentia tantum ipſi C, eſſe commenſurabilem, vt conſtat ex ijs, quæ in ſcholio propoſ. 10. huius lib. ſcripſimus.*

THEOR. 13. PROPOS. 16. 15. 9.

SI duæ magnitudines commenſurabiles componantur; & tota magnitudo vtrique ipſarum commenſurabilis erit. Quod ſi tota magnitudo vni ipſarum commenſurabilis fuerit; & quæ a principio magnitudines commenſurabiles erunt.

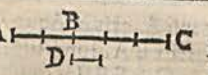
COMPONANTVR duæ magnitudines commenſurabiles A B, B C. Dico totam quoque magnitudinem A C, vtrique ipſarum AB, BC, commenſurabilem eſſe. [a] Sit enim ipſarum AB, BC, communis menſura D. Quoniam igitur D, ipſas AB, BC, metitur, [b] metietur quoque D, totam A C, ex ipſis compoſitam. Cum ergo D, metiatur A C, & A B; erunt A C, A B, commẽſurabiles. Similiter cum D, metiatur AC, & BC; erunt & AB, BC, commenſurabiles; Ac propterea AC, vtrique ipſarum AB, BC, commenſurabilis erit.



[a] 3. decimi

[b] 1. pron.

SED



SED iam tota AC, ex AB, BC, composita commensurabilis sit alteri ipsarum AB, BC, nempe ipsi AB. Dico & AB, BC, inter se commensurabiles esse. [a] Sit enim D, communis mensura ipsarum AC, AB. Quoniam igitur D, metitur totam AC, & ablatam AB; [b] metietur quoque D, reliquam BC. Quare cum D, metiatur AB, BC; commensurabiles erunt AB, BC, inter se. Eodē argumento ostendemus AB, BC, esse commensurabiles, si AC, ipsi BC, fuerit commensurabilis. Si duæ igitur magnitudines cōmensurabiles componantur, &c. Quod ostendendum erat.

[a] 3. deci.

[b] 3. pron.

COROLLARIVM.

HINC sequitur, si tota magnitudo ex duabus composita, commensurabilis sit alteri ipsarum, eandem & reliquæ commensurabilem esse. Vt si AC, ipsi AB, sit commensurabilis, esse quoque eandem AC, reliquæ BC, commensurabilem. Nam vt in posteriori parte theorematis ostensum est, semper D, communis mensura totius AC, & ablatæ AB, cum metiatur totam AC, & ablatam AB, metietur quoque reliquam BC, ex 3. pronunciato. Quare commensurabiles sunt AC, BC. Quod est propositum.

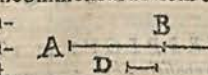
16. 9.

THEOR. 14. PROPOS. 17.

SI duæ magnitudines incommensurabiles componantur, & tota magnitudo vtrique ipsarum incommensurabilis erit. Quod si tota magnitudo vni ipsarum incommensurabilis fuerit; & quæ a principio magnitudines incommensurabiles erunt.

COMPONANTVR duæ magnitudines incōmensurabiles

rabiles AB, BC. Dico totam quoq magnitudinem AC, vtrique ipsarum AB, BC, incommensurabilem esse. Si enim non est vtrique incommensurabilis, sit alteri commensurabilis, si fieri potest,



nempe ipsi AB, [a] sitque D, communis mensura ipsarum AC, AB. Quoniam igitur D, metitur totam AC, & ablatam AB; [b] metietur quoque D, reliquam BC; Ac propterea cum D, metiatur vtramque AB, BC, erunt AB, BC, commensurabiles. Quod est absurdum. ponuntur enim incommensurabiles. Non ergo commēsurabilis est AC, ipsi AB; Eademque ratione neque ipsi BC, commensurabilis erit. Quare vtrique ipsarum AB, BC, incommensurabilis est.

[a] 3. decimi

[b] 3. pron.

SED iam tota AC, composita ex AB, BC, incommēsurabilis sit vni ipsarum componentium, nempe ipsi AB. Dico quoque AB, BC, incommensurabiles esse. Si enim sint commensurabiles, [c] erit quoque tota AC, vtrique ipsarum AB, BC, commensurabilis Quod est absurdum. Ponitur enim AC, alteri ipsarum, nempe ipsi AB, incommensurabilis. Non ergo commēsurabiles sunt AB, BC. Eodem argumento ostendemus AB, BC, incommensurabiles esse, si AC, ipsi BC, incommensurabilis fuerit. Quapropter si duæ magnitudines incommensurabiles componantur, &c. Quod erat ostendendum.

[c] 16. deci.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, si tota magnitudo ex duabus composita incommensurabilis sit alteri ipsarum, eandem & reliquæ incommensurabilem esse. Nempe si AC, incommensurabilis sit ipsi AB, esse quoq; eandem AC, reliquæ BC, incommensurabilem. Si enim AC, ipsi BC, foret commensurabilis, esset quoque AC, ex coroll. præcedentis propos. reliquæ AB, commensurabilis. Quod est absurdum. ponitur enim incommensurabilis. Non est ergo AC, ipsi BC, commensurabilis, sed incommensurabilis. Quod est propositum.

SCHO-

SCHOLIVM I.

PERSPICVVM est, in duabus proximis antecedentibus propositionibus, earumque corollarijs, si de lineis agatur, intelligendas esse lineas longitudine commensurabiles, vel incommensurabiles. Assumitur enim ad vtriusque propositionis demonstrationem communis mensura D, &c. quam quidem solum lineæ longitudine inter se commensurabiles habent, vt ex defin. apparet.

LEMMA I.

SI ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum deficiens figura quadrata; Parallelogrammum applicatum æquale est ei rectangulo, quod sub segmentis rectæ lineæ ex applicatione factis continetur.

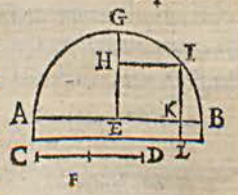
HOC lemma demonstrauimus nos in scholio propos. 28. lib. 6.

LEMMA II.

DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, quartam partem quadrati ex minore descripti ad maiorem applicare, ita vt deficiat figura quadrata.

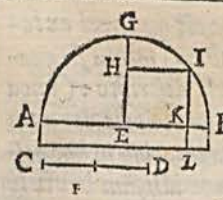
QVAMVIS id, quod hoc lemmate proponitur, absolui possit ex propos. 28. lib. 6. quod quarta pars quadrati ex minore linea descripti minor sit rectangulo ad dimidium maioris lineæ applicato, deficienteq; figura quadrata, vt vult propos. illa 28. lib. 6. hoc est, quadratum ex dimidio minoris lineæ descriptum,

(quod quidem quarta pars est quadrati ex tota descripti, ex scholio propos. 4. lib. 2.) minus sit quadrato ex dimidiata parte maioris descripto: (quod quidem applicatum est ad dimidium maioris, deficitq; figura quadrata.) Quamuis, inquam, absolui hoc possit per propos. 28. lib 6. libet tamen idipsum hoc in loco cum alijs interpretibus exequi alia ratione faciliori. Sint igitur datæ rectæ inæquales AB, CD, quarum AB, maior sit, oporteatque ad AB, applicare parallelogrammum deficiens figura quadrata, quod quidē parallelogrammum æquale sit quartæ parti quadrati ex recta CD, descripti. Sectis rectis AB, CD, bifariam in E, & F, describatur ex centro E, & interuallo EA, vel EB, semicirculus AGB; & ex E, perpendicularis ad AB, ducatur EG. Et quia tota AB, maior ponitur quam tota CD, erit quoque AE, dimidia ipsius AB, hoc est EG, ipsi AE, æqualis, maior quam CF, dimidia ipsius CD. Posita igitur EH, æquali ipsi CF, agatur per H, ipsi AB, parallela HI, demittaturque IKL, ad AB, perpendicularis, & sit KL, ipsi KB, æqualis; Ac tandem perficiantur rectangulum AL, & quadratum BL. Dico parallelogrammum AL, applicatum ad rectam AB, deficiens figura quadrata BL, æquale esse quartæ parti quadrati rectæ CD. Quoniam n. KI, media proportionalis est inter AK, KB, vt in scholio propos. 13. lib. 6. tradidimus;[a] erit rectangulum sub AK, KB, hoc est, rectangulum AL, æquale quadrato ex KI, hoc est, quadrato ex EH; [b] (est enim KI, ipsi



[a] 17. sexti

[b] 34. primi



KI, *ipsi* EH, *æqualis, ob parallelogrammum* EI, *hoc est, quadrato ex* CF: *Est autem quadratum ex* CF, *quarta pars quadrati ex* CD; *quod quadratum ex* CD, *per scholiũ propos. 4. lib. 2. quadruplũ sit quadrati ex* CF. *Igitur parallelogrammum* AL, *ad rectam* AB, *applicatum deficiensque quadrato* BL, *æquale est quartæ parti quadrati ex* CD, *descripti. Quod est propositum.*

SCHOLIVM. II.

EX hoc lemmate absoluemus & hoc problema, quod sequitur, in hunc modum.

DATAM rectam lineam ita secare, vt rectãgulum sub partibus contentum, æquale sit dato rectilineo, quod tamen maius non sit, quam quadratum a dimidia linea descriptum.

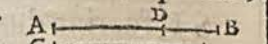
SIT enim recta data AB, *& rectilineum quodcunque, cui æquale ponatur quadratum ex* CF, *non maius quam quadratum ex dimidia* AE, *ita vt latus* CF, *non maius sit latere* AE. *Educta ergo ad* AB, *perpendiculari* EG, *sit* EH, *æqualis ipsi* CF. *Deinde acta* HI, *parallela ipsi* AB, *demittatur* IK, *perpendicularis ad* AB. *Quibus peractis ostendemus, vt prius, rectangulum sub partibus* AK, KB, *æquale esse quadrato ex* IK, *hoc est, quadrato ex* CF, *atque adeo & rectilineo dato, cui æquale est positum quadratum ex* CF. *Quod est propositum. Diximus autem, rectilineum datum non debere esse maius, quam quadratum ex dimidia linea descriptum; quia si maius esset, esset quoque recta* CF, *maior quam recta* EG. *Quare ex* EG, *abscindi non posset recta ipsi* CF, *æqualis: quod tamen ad problema efficiendum requiritur, vt ex demonstratione manifestum est.*

LEMMA

LEMMA III.

SI sint duæ rectæ inæquales, & ad maiorem applicetur quarta pars quadrati ex minore descripti, deficiens figura quadrata; Non erunt segmenta, quæ ex applicatione fiunt, æqualia.

SINT duæ rectę inęquales AB, *& C; & ad maiorem* AB, *applicetur parallelogrammum deficiens quadrato, sitque illud æquale quartę parti quadrati ex minore* C, *descripti, ita vt* DB, *latus sit quadrati, quo parallelogrammum applicatum deficit. Dico segmẽta* AD, DB, *inęqualia esse. Si enim* AD, DB, *segmenta dicantur esse ęqualia; cum ex 1. lemmate parallelogrammum applicatum ad* AB, *deficiensque figura quadrata ex* DB, *descripta, æquale sit rectangulo sub* AD, DB; *sit autem quod sub æqualibus* AD, DB, *quadratum; erit dictum parallelogrammum, quadratum ex* AD, *dimidio ipsius* AB, *descriptum; atque adeo ex scholio propos. 4. lib. 2. quadratum ex* AB, *quadruplũ erit ipsius parallelogrammi: Est autem & quadratum ex* C, *per hypothesim, quadruplum eiusdem parallelogrammi applicati, nempe quartę partis quadrati ex* C. *Igitur quadrata rectarum ex* AB, *& C, æqualia sunt, atque rectę* AB, *& C, ęquales. Quod est absurdum. ponuntur enim inæquales, & AB, maior. Inęqualia igitur sunt segmenta* AD, DB. *Quod est propositum.*



HOC facile etiam apparet ex constructione problematis in antecedente lemmate. Cum enim abscissa sit per

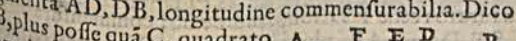
sit per constructionem, E H, æqualis dimidiatæ parti ipsius CD, nempe ipsi C F, ductaque H I, parallela ipsi AB, & tandem demissa perpendicularis I K, vt partes factæ ex applicatione sint A K, K B; manifestum est AK, KB, segmenta esse inæqualia, cum A B, in E, secta sit bifariam. Immo hinc constat, prius segmentum maius esse, & posterius, quod latus est quadrati, quo parallelogrammum applicatum deficit, minus.

17. 13. THEOR. 15. PROPOS. 18.

SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit a minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidat; maior tanto plus poterit quam minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si maior tanto plus possit quam minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit a minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata; in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidet.

SINT

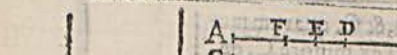
SINT duæ rectæ inæquales A B, & C, quarum maior A B; quartæ autem parti quadrati ex minore C, descripti, per lemma secundum præcedentis propos. applicetur ad A B, parallelogrammum æquale, & deficiens figura quadrata, contentum sub A D, B D, faciatque segmenta AD, DB, longitudine commensurabilia. Dico AB, plus posse quã C, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis. Quoniã. n. per 3. lẽma præcedentis propos. AD, maior est, quam DB; diuidatur AB, bifariam in E, & ipsi E D, æqualis sumatur E F. Quo facto, cum totæ EA, EB, æquales sint, & ablatæ quoque EF, ED; erunt & reliquæ AF, BD, æquales. Et quia recta AB, diuisa est bifariam in E, & non bifariam in D; [a] erit rectangulum sub A D, D B, vna cum quadrato ex E D, æquale quadrato ex EB; Ac propterea quadruplum rectanguli sub A D, D B, & quadrati ex E D, æquale erit quadruplo quadrati ex EB: Est autem quadruplo rectanguli sub AD, DB, æquale quadratũ ex C; (Ponitur enim rectangulum sub AD, DB, æquale quartæ parti quadrati ex C,) & quadruplo quadrati ex E D, æquale est quadratum ex F D; (quadratum enim ex F D, quadruplum est ex scholio propos. 4. lib. 2. quadrati ex ED, cum F D, dupla sit ipsius ED,) & quadruplo quadrati ex EB, æquale est quadratum ex AB. (quod quadratum ex AB, quadruplum sit per scholiũ propo. 4. lib. 2. quadrati ex EB, dimidiata parte ipsius A B.) Igitur & quadrata ex C, & F D, æqualia sunt quadrato ex A B; Ac proinde recta A B, plus potest quam recta C, quadrato rectæ F D. Hanc igitur F D, demonstrare oportet longitudine commensurabilem esse ipsi A B. Quoniam rectæ A D, D B, longitudine ponuntur commensurabiles; [b] erit quoq; tota AB, parti DB, commensurabilis longitudine. Est autem & ipsi DB, composita ex DB, AF, longitudine commensurabilis: (quod composita ex DB, AF, dupla sit ipsius D B) Igitur cum vtraque A B, & composita ex D B, A F, longitudine sit commensurabilis ipsi D B; [c] erunt quoque AB, & composita ex D B, A F, longitudine inter se commensurabiles; Ac propterea cum A B, composita ex AF,



[a] 5. secũdi

[b] 16. deci.

[c] 12. deci.



DB, tanquam una, & ex FD, cõmẽsurabilis sit longitudine cõpositæ ex A F, D B; erit eadem AB, ex coroll. propos. 16. huius lib. commensurabilis lõgitudine reliquæ F D. Ergo A B, plus potest quam C, quadrato rectæ F D, longitudine sibi commensurabilis.

SED iam AB, plus possit quam C, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis; & quartæ parti quadrati ex C, æquale parallelogrammũ applicetur ad AB, deficiens figura quadrata, faciatque segmenta AD, DB. Dico & rectas AD, DB, longitudine esse commensurabiles. Iisdem enim constructis, similiter demonstrabimus AB, plus posse, quam C, quadrato rectæ FD. Quare cũ, AB, ponatur plus posse, quam C, quadrato rectæ lõgitudine sibi cõmensurabilis; erit recta AB, ipsi FD, lõgitudine cõmensurabilis. Igitur cũ tota A B, cõposita ex FD, & ex AF, DB, tanquam vna, commensurabilis sit longitudine ipsi FD; erit eadem AB, longitudine cõmensurabilis reliquæ compositę ex AF, DB, per coroll. propos. 16. huius lib. Est autem & composita ex AF, DB, ipsi DB, longitudine commensurabilis, cum ipsius sit dupla: Igitur cũ vtraque AB, DB, longitudine sit cõmensurabilis compositæ ex AF, D B; [a] erunt quoq; AB DB, longitudine inter se commensurabiles: Atque adeo cum tota AB, composita ex AD, DB, commensurabilis sit longitudine ipsi DB; [b] erunt ipsæ AD, DB longitudine quoque inter se commensurabiles. Quocirca si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 12. deci.

[b] 16. deci.

18.
14.

THEOR. 16. PROPOS. 19.

SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales quartæ autẽ parti quadrati, quod fit a minore, æquale parallelogrammũ ad maiorẽ applicetur deficiẽs figura quadrata, & in partes incõmensurabiles lõgitudine ipsam diuidat; maior tanto plus poterit, quam

quam minor, quãtum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incõmensurabilis. Quod si maior tanto plus possit, quam minor, quãtum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis, quartę autẽ parti quadrati, quod fit a minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata; in partes longitudine incommensurabiles ipsam diuidet.

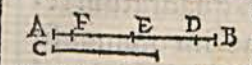
SINT duæ rectæ inæquales AB, & C, quarum maior A B; quartæ autem parti quadrati ex C, minore descripti applicetur ad AB, per 2. lemma propos. præcedentis, parallelogrammum æquale deficiens figura quadrata, quod faciat in recta AB, partes AD, DB, longitudine incõmensurabiles. Dico AB, plus posse quã C, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Iisdem enim quæ supra constructis, similiter ostendemus A B, plus posse quam C, quadrato rectæ F D. Hanc igitur demonstrare oportet ipsi A longitudine esse incommensurabilem. Quoniam rectæ A D, D B, ponuntur longitudine incommensurabiles; [a] erit quoque tota A B, parti D B, longitudine incommensurabilis. Sed D B, longitudine commensurabilis est compositæ ex DB, AF, cum hæc illius sit dupla. Igitur cum duarum linearum commẽsurabilium DB, & quæ componitur ex DB, AF, ipsa DB, longitudine sit incommensurabilis rectæ AB: [b] erit quoque reliqua composita ex D B, A F, eidem A B, longitudine incommensurabilis: Ac propterea cum A B, composita ex AF, DB, tanquam una, & ex F D, incommensurabilis sit longitudine compositæ ex A B, D B, erit eadem A B,

[a] 17. deci.

[b] 14. deci.

per coroll.propos.17. huius lib.& reliquæ F D, longitudine incommensurabilis. Ergo A B, plus potest quam C, quadrato rectæ F D, longitudine sibi incommẽsurabilis.

IAM vero A B, plus possit quam C, quadrato lineæ longitudine sibi incommẽsuraBilis;& quartæ parti quadrati ex C, æquale parallelogrãmum applicetur ad AB, deficiẽs figura quadrata, faciatque in recta AB, partes AD, DB. Dico & rectas AD, DB, esse incommensurabiles longitudine Iisdem enim constructis, ostendemus vt prius, rectam AB, plus posse quam C, quadrato rectæ FD. Quare cum AB, ponatur plus posse, quã C, quadrato rectæ longitudine sibi incommensurabilis; erit AB, ipsi FD, incommensurabilis longitudine. Igitur cum tota AB, composita ex FD, & ex AF, DB, tamquam vna, longitudine incommensurabilis sit ipsi F D; erit eadem AB, per coroll.propos.17.huius lib.& reliquæ compositæ ex AF, DB, longitudine incommensurabilis: Est autem composita ex AF, DB, ipsi DB, longitudine commensurabilis, cum illa huius sit dupla. Igitur cum duarũ linearum commensurabilium, nempe quæ ex A F, D B, componitur,& DB, ipsa composita ex A F, DB, longitudine incommensurabilis sit rectæ A B; [a] erit & reliqua DB, eidem AB, longitudine incõmensurabilis; Ac proinde cum tota AB, composita ex AD, DB, incommensurabilis sit ipsi DB, longitudine; [b] erunt & ipsę A D, D B, longitudine inter se incommensurabiles. Quam ob rem si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartę autem parti quadrati, &c. Quod erat demonstrandum.



[a] 14. deci.

[b] 17. deci.

SCHOLIVM I.

EGIT hactenus Euclides de magnitudinibus commensurabilibus, & incommensurabilibus; nunc ad Rationales & Medias transit in sequentibus.

LEMMA I.

QVONIAM demonstratum est, lineas longitudine commensurabiles, omnino & potentia cõmensurabiles esse, potentia vero commensurabiles, nõ omnino & longitudine, sed posse & longitudine commensurabiles esse, & incommensurabiles; manifestum est, si expositæ Rationali aliqua linea cõmensurabilis fuerit longitudine, illam Rationalem vocari, & ipsi commensurabilem non solum longitudine, sed etiam potentia: longitudine enim commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles sunt. Si vero expositæ Rationali aliqua linea fuerit potentia commensurabilis, si quidem & longitudine, dicetur & sic Rationalis, & commensurabilis ipsi longitudine, & potentia. Quod si expositæ Rationali rursus aliqua linea commensurabilis existens potentia, longitudine fuerit incommensurabilis; dicetur & sic Rationalis, potentia tantum ipsi commensurabilis.

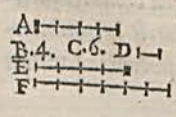
LEMMA II.

EX PROCLO. Rationales vocat eas lineas, quæ expositæ Rationali vel longitudine & potentia commensurabiles sunt, vel potentia solum. Sunt autem & aliæ lineæ, quæ longitudine quidem expositæ Rationali incommensurabiles sunt, potentia autem solum cõmensurabiles; atque ob id rursus dicuntur Rationales, & commensurabiles inter se, quatenus Rationales; commensurabiles, inquam, inter se vel longitudine & potentia, vel potentia solum: Et si quidem longitudine, dicuntur & ipsæ Rationales longitudine inter se commensurabiles, vt intelligatur, etiã potentia commensurabiles esse; Si vero potentia inter

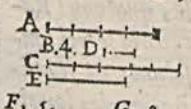
se solum sunt commensurabiles: dicuntur ipsæ quoque Rationales, potentia solum inter se commensurabiles.

SCHOLIVM.

ITAQVE ex his colligere licebit tria genera linearũ Rationalium longitudine inter se commensurabilium. Aut enim duarum linearum Rationalium longitudine inter se cõmensurabilium, altera æqualis est expositæ Rationali; ac proinde vtraque Rationali commensurabilis quoque longitudine: Aut neutra Rationali expositæ æqualis est, longitudine tamen ei vtraque est commensurabilis: Aut denique vtraque expositæ Rationali commensurabilis est solum potentia. Hæc autem tria genera inueniemus hoc modo. Sit expositæ Rationalis A, diuisa in quatuor partes, quot nimirum vnitates sunt in numero B. Sumpto deinde quolibet alio numero C, sit D, rectæ vna partium rectæ A; & quoties D, metitur lineam A, toties metiatur quandam aliã E. Item quoties vnitas est in C, toties eadem D, metiatur quampiam aliam lineam F. Quoniam igitur A, & E, componuntur ex partibus multitudine æqualibus, quæ quidem magnitudine æquales sunt ipsi D; ipsæ æquales erunt. Rursus quia D, metitur omnes tres A, E, & F, erunt omnes tres A, E, & F, longitudine commensurabiles. Quare E, & F, Rationali A, commensurabiles longitudine, Rationales sunt: Sunt autem & ostensæ longitudine inter se commensurabiles, cum habeant D, communem mensuram. Inuentæ ergo sunt duæ Rationales E, F, longitudine commensurabiles & inter se, & expositæ Rationali A, & quarũ vna, nempe E, æqualis est Rationali expositæ A.



IAM vero D, metiatur duas lineas quasdam C, E, per duos numeros F, G, quorum neuter idem sit qui B, ita vt vtraq; linea C, & E, inæqualis sit ipsi A. Erunt igitur vt prius, tres rectæ A, C, E, mensuram habentes communem D, longitudine commensurabiles. Quare C, E, Rationali A, longitudine commensurabiles, Rationales sunt. Cum ergo & inter se sint



sint longitudine commensurabiles; inuentæ erunt duæ Rationales C, E, longitudine commensurabiles & inter se, & expositæ Rationali A, quarum neutra æqualis est Rationali expositæ A.

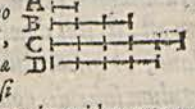
POSTREMO expositæ Rationali A, inueniatur recta B, longitudine tantum incommensurabilis, quæ secetur in quotcunque partes æquales, & sumatur C, composita ex alijs quotcunque partibus, quæ magnitudine æquales sint partibus rectæ B. Quo facto, erũt B, & C, longitudine commensurabiles. Dico eandem expositæ Rationali A, potentia solum esse cõmensurabiles. Quoniam enim A, B, potentia sunt commensurabiles; erit quadratum ex A, quadrato ex B, commensurabile: Est autem eidem quadrato ex B, commensurabile quadratum ex C: quod B, C, longitudine sint commensurabiles, atque adeo & potentia; [b] Igitur quadrata rectarum A, & C, commensurabilia quoque inter se sunt. Quare C, ipsi A, potentia est commensurabilis. Et quia duarum rectarum B, C, longitudine commensurabilium B, est ipsi A, longitudine incommensurabilis; [c] erit quoque reliqua C, eidem A, longitudine incommensurabilis. Est ergo C, solum potentia ipsi A, commensurabilis. Et quia B, & C, Rationali expositæ A, potentia commensurabiles, Rationales sunt; Inuentæ erunt duæ Rationales B, C, longitudine quidem inter se commensurabiles, potentia vero tantum commensurabiles expositæ Rationali A. Quod est propositum.

[a] 11. deci.

[b] 12. deci.

[c] 14. deci.

QVOD si quis optet inuenire quotcunque lineas Rationales longitudine inter se commensurabiles, id efficiet hoc modo. Sumpta mẽsura quauis A, componantur quotlibet lineæ B, C, D, ex tot partibus ipsi A, æqualibus, quot sunt vnitates in totidem numeris inæqualibus E, F, G. Nam lineæ B, C, D, habentes communem mensuram A, longitudine commensurabiles erunt.



CÆTERVM & omnes lineas Rationales, non solum expositæ Rationali, sed etiam inter se esse commensurabiles, facile hoc modo demonstrabimus. [d] Quoniã Rationales lineæ

[d] 6. defin.

sunt, quæ exposita Rationali sunt commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum; [a] *quæ autem eidem commensurabiles, & inter se commensurabiles sunt; manifestum est, Rationales lineas quascunque inter se commensurabiles esse.*

[a] 12. deci.

LEMMA III.

SI sint duæ rectæ lineæ, erit ut prima ad secundam, ita quadratum, quod fit a prima, ad rectangulum, quod sub duabus illis rectis lineis continetur: Et vt secunda ad primam, ita rectangulum sub ipsis, ad quadratum ex prima.

SINT duæ rectæ A, & B. Dico esse vt A, ad B, ita quadratum ex A, ad rectangulum sub A, & B, comprehensum. Ex quantacumque n. linea recta CD,

abscindatur C E, ipsi A, æqualis, & EF, ipsi B. Deinde super CE, describatur quadratum CG, perficiaturque rectangulum G F, contentum sub C E, & E F, hoc est, sub A, & B. [b] *Quoniam igitur est vt CE, ad EF, hoc est, vt A, ad B, ita parallelogrammum CG, hoc est, quadratum ex A, ad parallelogrammum GF, sub A, & B, comprehensum; perspicuum est, si sint duæ rectæ lineæ, esse primam ad secundam, vt quadratum ex prima descriptum, ad rectangulum sub ipsis comprehensum.*

[b] 1. sexti

EODEM modo erit, vt B, ad A, ita rectangulum FG, ad quadratum GC. Quod est propositum.

LEMMA

LEMMA IIII.

SPATIVM Rationali spatio commensurabile, & ipsum Rationale est.

SIT spatium A, commensurabile Rationali spatio B. Dico & A, Rationale esse. Sit nãq; C, quadratũ Rationale, ratione cuius reliqua Rationalia dicuntur, vel irrationalia, quod nimirum ab ex posita Rationali describitur. Quoniam

igitur B, Rationale est, [a] *erit ipsum Rationali C, commensurabile: Est autem & A, ipsi B, commensurabile. Igitur A, & C, cum commensurabilia sint ipsi B,* [b] *inter se quoque commensurabilia erunt; ac proinde spatium A, Rationali quadrato C, ex Rationali linea exposita descripto commensurabile,* [c] *Rationale est. Quod erat demonstrandum.*

[a] 9. defin.

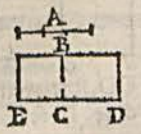
[b] 12. deci.

[c] 9. defin.

THEOR. 17. PROPOS. 20. 19. 15.

QVOD sub Rationalibus longitudine commensurabilibus rectis lineis, secundum aliquem prædictorum modorum, continetur rectangulum; Rationale est.

SIT exposita Rationalis A, & spatium rectangulũ BD, contentum sub Rationalibus longitudine commensurabilibus BC, CD, secundum aliquem prædictorum modorũ. (hoc est, secundum aliquem trium modorũ, quos in scholio 2. antecedẽtis propos. explicuimus; ita vt vel altera ipsarũ



BC,

BC,CD,Rationali expositę A, sit æqualis, vel neutra, sed tamen ei vtraque commensurabilis sit aut longitudine, aut potentia tantum. Dico BD, rectangulum Rationale esse. Describatur. n. ex altera earum, nempe ex BC, quadratum BE. Quoniam igitur BC, Rationalis Rationali expositæ A, commensurabilis est vel longitudine & potentia, vel potentia solum; [a] erit quoque quadratum BE, ex BC, descriptum quadrato ex A, commensurabile: [b] Est autem quadratum ex A, Rationale, ratione cuius reliqua Rationalia uocantur, vel Irrationalia. [c] Igitur & BE, illi commensurabile, Rationale est. Quia vero BC, hoc est, EC, & CD, longitudine commensurabiles sunt; (ponuntur enim BC, CD, Rationales inter se longitudine commensurabiles.) [d] & est vt EC, ad CD, ita EB, ad BD; [e] erunt quoque EB, BD, commensurabilia. Quare ex lemmate 4. antecedētis propos. BD, Rationali BE, commensurabile, Rationale est. Quod igitur sub Rationalibus longitudine commensurabilibus rectis, &c. Quod erat demonstrandum.

a 3. *defin.*
b 8. *defin.*
c 9. *defin.*
d 1. *sexti*
e 10. *deci.*

20.
16.

THEOR. 18. PROPOS. 21.

SI Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum est, longitudine commensurabilem.

SIT rursum exposita Rationalis A, & alia Rationalis BC, secundum aliquem modorum, quos in scholio 2. propositionis 19. expositimus, hoc est, siue BC, æqualis sit Rationali expositæ A, siue non, commensurabilis tamen ei vel longitudine & potentia, vel potētia tantum. Applicetur autē ad BC, Rationale BD, latitudinem faciens CD. Dico CD, Rationalē esse, & ipsi BC, commensurabilē longitudine. Describatur. n. ex BC, quadratū BE; quod similiter,

ter, vt in antecedenti propos. ostendemus Rationale esse. Quia igitur BE, BD, Rationalia sunt, [a] ipsa commensurabilia erūt quadrato ex linea Rationali exposita A, descripto; [b] Ac propterea & cōmensurabilia inter se erūt: [c] Est autē vt BE, ad BD, ita EC, hoc est, BC, ad CD. Igitur & BC, CD, cōmensurabiles sunt longitudine, vt in scholio propos. 10. huius lib. docuimus. Est ergo CD, ipsi BC, cōmensurabilis lōgitudine: [d] sed & Rationalis, quippe quæ Rationali BC, atq; idcirco Rationali expositæ A, commensurabilis sit, vt in scholio propos. 12. huius lib. demōstrauimus. Quare latitudo CD, Rationalis est, & longitudine commensurabilis ipsi BC. Si igitur Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinē efficit, &c. Quod erat demonstrandum.

a 9. *defin.*
b 12. *deci.*
c 1. *sexti*
d 6. *defin.*

LEMMA.

RECTA linea potens spatium Irrationale, Irrationalis est.

POSSIT recta *A*, *spatium Irrationale*, *hoc est*, *quadratum ex A*, *æquale sit spatio cuipiam Irrationali*. *Dico A*, *Irrationalem esse*.

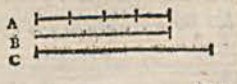
Si enim dicatur Rationalis; *erit eius* A ——— *quadratum Rationale quoque*, *vt in demonstratione propos. 20. huius lib. ostensum est. quod est absurdum. ponitur enim Irrationale. Non ergo A*, *Rationalis est. Igitur Irrationalis.*

HOC idē *constat ex definitione 11. huius lib. Vbi lineæ potētes spatia Irrationalia*, *vocātur Irrationales.*

LEMMA. II.

DVAS rectas Rationales potentia solum commensurabiles inuenire.

DVO *genera sunt linearum Rationalium potentia tantum inter se commensurabiliū. Aut enim altera earum est æqualis expositæ*



Ru-

Rationali, aut neutra. Prioris generis lineas ita inueniemus. Sit exposita Rationalis A, cui

[a] 11. deci. *æqualis sumatur B. Deinde ipsi B,* [a] *inueniatur C, longitudine tantũ incõmensurabilis, seu (quod idẽ est) potentia tantum commensurabilis. Quoniam igitur B, C, ipsi A, commensurabiles sunt; (B, quidem, quod ei sit æqualis; at C, ex constructione, quod inuenta sit potentia tantum commensurabilis ipsi B, atque adeo ipsi A.) Rationales erunt B, & C: Sunt autem & potentia solum commensurabiles. Inuentæ ergo sunt duæ Rationales B, C, potentia tantum commensurabiles, quarum altera, nempe B, expositæ Rationali A, æqualis est.*

POSTERIORIS autem generis lineas hac arte reperiemus. Sit rursus exposita Rationalis A,

[b] 11. deci. *cui longitudine tantũ incommensurabilis* [b] *inueniatur B; & huic rursum longitudine tantum incommensurabilis C, maior aut minor quam A. Dico B, C, esse Rationales potentia tantum commensurabiles. Quod enim sint solum commensurabiles potentia, patet ex constructione. Quod autem sint Rationales, ita ostendemus. Quoniam A, C, ipsi B, potentia sunt commensurabiles; erunt & A, C, commensurabiles potentia, vt in scholio propos. 12. huius lib. demonstrauimus. Quare cum vtraque B, C, exposita*

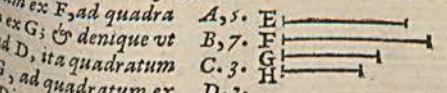
[c] 6. defin. *Rationali A, sit potentia commensurabilis;* [c] *erunt B, C, Rationales. Inuentæ ergo sunt B, & C, Rationales potentia tantum commensurabiles.*

SCHO-

SCHOLIVM.

QVOD *si inueniendæ sint quotcunque lineæ Rationales potentia tantum inter se commensurabiles, exequemur id hac ratione.*

SVMANTVR *per ea, quæ in scholio propos. 20. lib. 9. docuimus, tot numeri primi, quot lineæ Rationales quæruntur nempe, A, B, C, D. Deinde sumpta linea Rationali E, fiat vt A, ad B, ita quadratum ex E, ad quadratum ex F, vt in coroll. propos. 6. huius lib. ostendimus. Item vt B, ad C, ita quadratum ex F, ad quadratum ex G; & denique vt C, ad D, ita quadratum ex G, ad quadratum ex H. Dico rectas E, F, G, H, Rationales esse, & potentia tantũ commensurabiles inter se. Quod enim Rationales sint, manifestum est. Cum enim earum quadrata proportionem habeant, quam numeri A, B, C, D, (nempe quadratum ex E, ad quadratum ex F, vt numerus A, ad numerum B, ex constructione; similiterque quadratum ex F, ad quadratum ex G, vt B, ad C, & quadratum ex G, ad quadratum ex H, vt C, ad D. At vero ex æquo quadratum ex E, ad quadratum ex G, vt A, ad C; similiterq; quadratũ ex E, ad quadratũ ex H, vt A, ad D; & denique quadratum ex F, ad quadratum ex H, vt B, ad D,) erunt ipsa inter se commẽsurabilia,* [a] *6. decimi ac propterea & rectæ ipsæ potentia saltem commensurabiles. Existente ergo E, Rationali, erunt & reliquæ F, G, H, Rationales. Quod autem potentia tantum sint commensurabiles, ita ostendemus. Quoniam earum quadrata proportionalia sunt numeris primis A, B, C, D; numeri autem primi proportionem non habent, quam quadrati numeri, vt ad finem lib. 8. docuimus; non habebunt etiam quadrata rectarum E, F, G, H, proportionem, quam numeri quadrati.* [b] *Quare rectæ* [b] *9. decimi E, F, G, H, longitudine incommensurabiles sunt. Ostensæ sunt autem Rationales, & potentia commensurabiles. Rationales igitur sunt, & potentia tantum commensurabiles. Quod est propositum.*



QVOD *si propositis quotcunque Rationalibus potentia solum commensurabilibus, inuenienda sit adhuc alia, quæ omnibus*

C, 10. omnibus illis commensu-
D, 6, rabilis sit potentia tan-
E, 7. tum, fiet id hoc modo.

Sint propositæ duæ Rationales potentia tantum commensurabiles A, B, quarum quadrata proportionem habeant, quam numerus C, ad numerum D: Sumpto autē alio numero E, qui ad quemlibet ipsorum C, D primus sit; (Inuentetur autem huiusmodi numerus facile, si sumatur primus, qui neutrum ipsorum C, D, metiatur.) fiat vt D, ad E, ita quadratum lineæ B, ad quadratum lineæ F, per coroll. propositionis 6. huius lib. Dico F, Rationalem esse, & ipsis A, B, potentia solum commensurabilem. Quod enim Rationalis sit, ex eo patet, quod commensurabilis sit Rationali B, saltem potentia, cum quadrata rectarum B, F, proportionem habentia, quam numeri D, E, [a] *commensurabilia sint. Cum ergo proportio D, ad E, non sit, quæ numeri quadrati ad numerum quadratum, vt ad finem lib. 8. ostendimus; (quòd D, & E, qui ambo non sunt quadrati, cum E, primus nullo modo quadratus sit, sint inter se primi, ideoque plani non similes, ac proinde ex ijs, quæ in scholio propos. 26. lib. 8. ostendimus, proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratum)* [b] *erunt rectæ B, F, longitudine incommensurabiles. Ergo potentia tantum commensurabiles. Eadem ratione erunt A, & F, potentia solum commensurabiles. Nam ex æquo erit quadratum ex A, ad quadratum ex F, vt C, numerus ad numerum E. Cum ergo hi numeri proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratum; (quod ostendemus perinde, vt idem demonstrauimus de numeris D, & E,) erunt A, F, longitudine incommensurabiles, &c.*

a 6. decimi

b 9. decimi

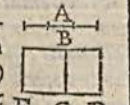
21. 19.

THEOR. 19. PROPOS. 22.

QVOD sub Rationalibus potentia solum commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum; Irrationale est: Et

Et recta linea ipsum potens, Irrationalis est. Vocetur autem Media.

SIT exposita Rationalis A, & rectangulum BD, contentum sub Rationalibus BC, CD, potentia tantum commensurabilibus secundum aliquem modorum, quos in lemmate 2. præcedentis propos. diximus. (hoc est, siue altera illarum æqualis sit Rationali expositæ A, siue non.) Dico rectangulum BD, esse Irrationale; & rectam, cuius quadratum ipsi BD, æquale est, Irrationalem quoque, quæ uocetur Media. Describatur enim ex altera illarum, vt ex BC, quadratum BE, quod erit Rationale, vt in demonstratione propos. 20. diximus. [a] Et quoniam est vt EC, hoc est, BC, ad CD, vt BE, ad BD. Est autem BC, ipsi CD, longitudine incommensurabilis, ex hypothesi; erit ex ijs, quæ in scholio propos. 10. huius lib. tradidimus, BE, ipsi BD, incommensurabile. [b] Quare cum BE, commensurabile sit quadrato ex Rationali exposita A: sit autem BE, ipsi BD, incommensurabile; [c] erit quoque quadratum ex Rationali exposita A, eidem BD, incommensurabile; Ac propterea BD, quadrato Rationalis expositæ incommensurabile existens, [d] Irrationale est. Quamobrem & recta potens ipsum BD, Irrationalis est, ex 1. lemmate propos. antecedentis.



VOCETVR autem hæc linea potens ipsum BD, Media, [e] propterea quod media proportionalis sit inter duas BC, CD, Rationales potentia tantum inter se commensurabiles, quippe cum eius quadratū æquale sit rectangulo BD, sub ipsis BC, CD, comprehenso. Quod igitur sub Rationalibus potentia solum commensurabilibus, &c. Quod demonstrandum erat.

a 1. sexti.

b 9. defin.

c 14. deci.

d 10. defin.

e 17. sexti

SCHO-

SCHOLIVM.

[a] 17. sexti

ITAQVE omnis linea media proportionalis inter duas Rationales potentia tantum inter se commensurabiles, Media vocabitur.[a] Cum enim eius quadratum æquale sit rectangulo sub talibus Rationalibus comprehenso, quod quidem in hoc theoremate ostensum est, esse Irrationale, erit latus ipsius, nempe media proportionalis inter dictas Rationales, linea Irrationalis, quæ Media appellatur. Ex quo lineam Mediam facile describemus, si dicamus eam esse lineam Irrationalem, quæ medio loco proportionalis est inter duas lineas Rationales potentia tantum inter se commensurabiles. Vel quæ potest rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum inter se commensurabilibus contentum. Nam sola hac linea Media hoc loco appellatur.

VT autem recte hoc loco monet Campanus, non solum recta potens rectangulum Irrationale sub duabus rectis Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum, Irrationalis est, vocaturque Media: Verum etiam quadratum ipsius, vel rectangulum illud Medium dicitur, quia medio loco proportionale est inter quadrata illarum rectarum Rationalium potentia solum commensurabilium, quemadmodum & recta ipsa media proportionalis est inter dictas Rationales. Nam si tres lineæ sint cõtinue proportionales, quales sunt BC, & recta Irrationalis, quæ Media dicitur, & CD; eorum quoque rectilinea similia, similiterque descripta super ipsas, cuiusmodi sunt earum quadrata, proportionalia, vt in scholio propos. 22 lib. 6. demonstrauimus. Quare quadratum ex Media descriptum proportionale est inter quadrata rectarum BC, CD, ideoque Medium appellari potest.

HOC autem non ita intelligas, vt putes omne rectangulum Medium contineri sub duabus rectis Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, quale est Medium BD. Hoc enim falsum est, cum & spatium Medium contineri possit sub duabus Irrationalibus, nempe Mediis longitudine, vel potentia tantum inter se commensurabilibus, vt ex propos. 23. & 26. huius lib. constabit. Itaq; non reciprocantur, rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum inter se commensurabilibus

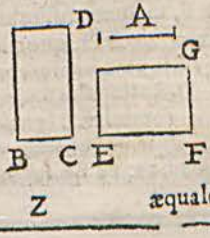
rabilibus contentum, & spatium Medium. Omne siquidem rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum, Medium est, vt ostendimus: At non omne spatium Medium sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus continetur. Vniuerse tamen omne spatium Medium æquale est alteri cuipiam Medio sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contento. Nam alias recta ipsum potens, non esset dicenda Media, quia non posset rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus comprehensum; vel non esset proportionalis inter duas Rationales potentia tantum commensurabiles.

VNDE Medium describi sic poterit, vt dicamus, illud esse rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum: Vel certe rectangulum, quod alteri cuipiam rectangulo sub duabus Rationalibus potentia solum commensurabilibus comprehẽso æquale est, ita vt ipsi possit linea recta, quæ Media in hoc theoremate est vocata. Omne enim Medium non contentum sub duabus huiusmodi Rationalibus reuocari potest ad aliud Medium, cuius latera sunt duæ lineæ Rationales potentia tantum commensurabiles, vt in scholio sequentis theorematis ostendemus.

THEOR. 20. PROPOS. 23. 22. 20.

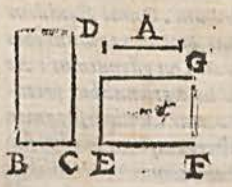
QVOD a Media fit, ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum est, longitudine incommensurabilem.

SIT linea Media A, & Rationalis BC, siue ea sit exposita, siue expositæ commensurabilis longitudine & potentia, vel potentia tantum; [a] appliceturque ad BC, rectangulum BD, æquale quadrato ex Media A, vel rectangulo, quod huic quadrato



[a] 45. pri.

æquale



æquale est, faciatq; latitudinem CD. Dico CD, Rationalem esse, & ipsi B C, longitudine incommensurabilẽ. Quoniam. n. A, Media est, ipsa poterit rectangulum sub duabus rectis Rationalibus potentia tantum inter se commẽsurabilibus contentum; alias non posset dici Media. Sit igitur illud rectangulum EG, sub Rationalibus E F, F G, potentia tantum commensurabilibus contentum. Et quia A, ex hypothesi, potest
[a] 14. sexti etiam ipsum BD; æqualia erunt B D, & E G, [a] lateraque idcirco habebunt reciproca circa æquales angulos; nempe erit vt B C, ad E F, ita F G, ad C D; [b] Ac propterea
[b] 22. sexti quoque vt quadratum ex B C, ad quadratum ex E F, ita quadratum ex F G, ad quadratum ex C D: Sed quadratũ ex B C, commensurabile est quadrato ex E F. (quod rectæ B C, E F ponantur Rationales; atque adeo inter se commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potẽtia tantum.) [c] Igitur & quadratum ex F G, commensu-
[c] 10. deci. rabile erit quadrato ex C D; proptereaque & rectæ F G, CD, commensurabiles erunt saltem potentia. Ergo cum FG, Rationalis expositę Rationali sit commensurabilis, si ipsa non est exposita Rationalis; erit quoque C D, expositæ Rationali commensurabilis, vt ostendimus in scholio propos. 12. huius lib. atque adeo C D, ex definitione, Rationalis erit. Dico quod & longitudine incommensurabilis ipsi BC. Quoniã. n. EF, FG, Rationales sunt potentia tantum commensurabiles, hoc est, longitudine incommensurabiles; & est vt EF, ad F G, ita quadratum ex EF ad rectangulum EG, sub E F, FG, contentum, ex
[d] 10. deci. lemmate 3. propos. 19. huius lib. [d] erit quadratum ex E F, incommensurabile rectangulo E G, atque adeo rectangulo B D, quod huic æquale est. Atqui quadratum ex EF, commensurabile est quadrato ex CD. (quod EF, CD, Rationales sint, atque idcirco saltem potentia commensurabiles.) Igitur cum quadratum ex CD, commensurabile sit quadrato ex E F; at rectangulum B D, eidem
[e] 13. deci. quadrato ex EF, incommensurabile; [e] incommensurabilia

lia erunt quadratum ex CD, & rectangulum BD. Est autem ex lemmate 3. propos. 19. huius lib. quadratum ex CD, ad rectangulũ BD, vt recta CD, ad rectam BC. [a] Incommensurabiles ergo sunt longitudine CD, & B C. Rationalis ergo est CD, & Rationali B C, longitudine incommensurabilis. Quamobrem, quod a Media fit, ad Rationalem applicatum, &c. Quod demonstrandum erat.
[a] 10. deci.

SCHOLIVM.

FACILIVS quam ex propos. 45. lib. 1. applicabimus ad BC, rectangulum quadrato ex A, æquale, si ipsis B C, & A, [b] sumatur tertia proportionalis pro latere C D. Cum enim BC, A, & CD, proportionales sint; [c] erit rectangulum B D, sub extremis B C, C D, contentum æquale quadrato mediæ proportionalis A.
[b] 11. sexti
[c] 17. sexti

HAC arte vtendum erit & in sequentibus, quando ad aliquam rectam applicandum erit rectangulum æquale quadrato cuiuspiam lineæ rectæ.

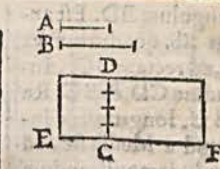
PORRO ex hoc theoremate manifestũ est, omne Medium, hoc est, spatium, quod linea Media potest, æquale esse cuidam alteri rectangulo contento sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus. Nam si illi Medio ad Rationalem lineam applicetur æquale rectangulum, faciet id, per hoc theorema, alterum latus Rationale, longitudine lineæ Rationali incommensurabile. Quare rectangulum hoc applicatum Medio æquale, Medium erit sub duabus Rationalibus potentia solum commensurabilibus contentum. Atq; hoc modo quodcunque Medium reduci poterit ad Medium cõtentum sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus.

THEOR. 21. PROPOS. 24.

23. 21.

MEDIAE cõmensurabilis, Media est.

SIT Mediæ A, recta B, commensurabilis siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & B, Mediam esse. Exposita enim sit Rationalis C D, [d] ad quam applicetur rectãgulũ DE, æquale quadrato ex A, Media.
[d] 45. primi



Quoniam igitur D E. Medium ad Rationalem C D, applicatum, facit C E, latitudinem; [a] erit C E, Rationalis ipsi C D, longitudine incõmensurabilis. Rursus ad C D, Rationalem [b] applicetur rectangulum D F, quadrato ex B, æquale. Et quia rectæ A, B, ponuntur commensurabiles, erũt quoque eorum quadrata, hoc est, rectangula ipsis æqualia, D E, D F, commensurabilia. [c] Est autem vt D E, ad D F, ita recta E C, ad rectam C F. [d] Igitur E C, C F, longitudine sunt commensurabiles. Sed E C, ostensa est Rationalis, & longitudine ipsi C D, incommensurabilis. [e] Igitur & C F, longitudine eidem C D, incommensurabilis est. Cum ergo & Rationalis sit, propterea quod Rationali expositæ C D, sit commensurabilis; (Nam cum E C, C F, sint longitudine ostensæ commensurabiles, & E C, ipsi C D, commensurabilis saltem potentia, quod Rationalis sit; erit & C F, eidem C D, commensurabilis potentia, ex ijs, quæ in scholio propos. 12. huius lib. scripsimus.) erunt C D, C F, Rationales potentia tantum commensurabiles, [f] Ac proinde recta B, potens rectangulum D F, sub Rationalibus potentia tantum commensurabilibus C D, C F, Media est. Mediæ igitur commensurabilis, Media est, Quod ostendendum erat.

[a] 23. deci.
[b] 45. primi
[c] 1. sexti
[d] 10. deci.
[e] 14. deci.
[f] 22. deci.

COROLLARIVM.

EX hoc manifestum est, spatium Medio spatio commensurabile, Medium esse. Postquam n. demonstratum est D F, commensurabile esse Medio D E, ostensum ex eo mox fuit D F, esse quoque Medium. Eademque ratio est in cæteris. Quod tamen hoc etiam modo potest demonstrari.

SIT spatium D F, spatio Medio D E, commensurabile. Dico & D F, Mediũ esse. Possit enim A, Media ipsum D E, Mediũ. (Nam cum D E, Medium sit, poterit ipsum recta, quæ Media dicitur, vt in scholio propos. 22. huius lib. tradidimus.) & B, ipsum D F. Quoniam igitur D E, D F, commensurabilia sunt, erunt quoque quadrata ex A, B, ipsis æqualia, commensurabilia. Quare A, B, rectæ potentia saltẽ sunt cõmensurabiles; Atq; idcirco existente A, Media, erit & B, illi commensurabilis Media, vt in hoc theoremate ostensum est. Igitur & D F, Medium erit. Omne enim spatium, quod potest Media, Medium appellatur, vt in scholio propos. 22. huius lib. docuimus.

LEMMA I.

QVEMADMODVM autem in lemmate 1. propos. 19. huius lib. de Rationalibus dictum est, ita & hic de Medijs dicemus. Nimirum rectam lineam Mediæ longitudine commensurabilem, dici Mediam, & ipsi commensurabilem non solum longitudine, sed & potentia; Vniuerse enim quæ longitudine commensurabiles sunt, etiam potentia sunt commensurabiles. Si vero recta quædam linea Mediæ potentia fuerit commensurabilis, si quidem & longitudine, dicetur & sic Media, & ipsi commensurabilis longitudine & potentia. Quod si Mediæ rursus aliqua linea commensurabilis existens potentia, longitudine fuerit incommensurabilis, dicetur & sic Media ipsi potentia solum commensurabilis.

LEMMA II.

DVAS rectas Medias longitudine commensurabiles; Item duas potentia tantum commensurabiles inuenire.

SIT Media aliqua linea A, cui si inueniantur duæ rectæ commensurabiles B, C; illa quidem longitudine, hæc vero potentia tantum;

a 24. deci. *[a] erit vtraque B, C, Mediæ A, commensurabilis, Media. Cum ergo A, B, sint longitudine commensurabiles; & A, C, potentia tantum; erũt inuentæ A, B, Mediæ longitudine commensurabiles; & A, C, Mediæ potentia solum commensurabiles. Quod est propositum.*

SCHOLIVM.

QVAMVIS omnis linea recta Mediæ commensurabilis, Media sit; nõ tamen omnis Media cuilibet Mediæ est commensurabilis; cum duæ Mediæ dari possint prorsus incommensurabiles, longitudine videlicet, & potentia, vt ex propos. 26. huius lib. apparebit. Vbi etiam docebimus, quanam via inueniendæ sint duæ Mediæ longitudine & potentia incommensurabiles.

24.
23. ## THEOR. 22. PROPOS. 25.

QVOD sub Medijs longitudine commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, Medium est.

CONTINEATVR rectangulum AD, sub Medijs AC, CD, longitudine cõmensurabilibus. Dico AD, Medium esse. Describatur ex CD, Media quadratũ BD, quod erit Medium. b Et quoniam est vt AC, ad CB, ita AD, ad DB: Sunt autẽ AC, CB, hoc est, AC, CD, longitudine cõmensurabiles; c erunt AD, DB, cõmensurabilia. Quare spatium AD, Medio DB, cõmensurabile, Mediũ est, ex coroll. præcedentis propos.

b 1. sexti

c 10. deci.

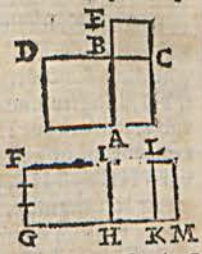
propos. Quod ergo sub Medijs longitudine commensurabilibus, &c. Quod erat ostendendum.

25.
23. ## THEOR. 23. PROPOS. 26.

QVOD sub Medijs potentia tantũ commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, vel Rationale est, vel Medium.

SIT rectangulum AC, comprehensum sub Medijs AB, BC, potentia tantum commẽsurabilibus. Dico AC, esse vel Rationale, vel Medium. Describantur ex AB, BC, quadrata AD, CE, quæ Media erunt, vt in scholio propos. 22. huius lib. docuimus; cum rectæ AB, BC, Mediæ ponantur. Exponatur Rationalis FG, [a] ad quam applicetur rectangulum FH, quadrato AD, ex AB, descripto æquale; & ad HI, rectangulum IK, rectangulo AC, æquale; & denique ad KL, rectangulum LM, æquale quadrato CE, ex BC, descripto; eritque totũ FM, vnum rectangulum, quemadmodum propos. 45. lib. 1. est ostensum. Quia vero AD, CE, Media sũt, erunt & FH, LM, illis æqualia, Media: quæ cum applicentur ad Rationales FG, KL, ([b] est enim & KL, Rationali FG, æqualis, ob parallelogrammum FK, Rationalis.) faciantque latitudines GH, KM, [c] erunt rectæ GH, KM, Rationales, ipsi FG, seu KL, longitudine incommensurabiles. Et quia rectæ AB, BC, potentia inter se sunt commensurabiles, erunt & earũ quadrata AD, CE, atque adeo & ipsis æqualia rectangula FH, LM, commensurabilia: [d] Vt autem FH, ad LM, ita est recta GH, ad KM. [e] Igitur GH, KM, longitudine inter se commensurabiles sunt. Quare GH, KM. Rationales ostensæ, sunt longitudine inter se commensurabiles, Rationali vero FG, solum commensurabiles

a 45. primi



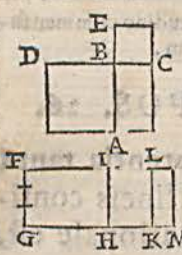
b 34. primi

c 23. deci.

d 1. sexti

e 10. deci.

[a] 20. deci.



potentia, cum ei ostensæ sint longitudine incommẽsurabiles; [a] Ac propterea rectangulum sub ipsis GH, KM, Rationale est. Et quoniam est, vt DB, ad BC, ita AB, ad BE; (quod DB, BC, ipsis AB, BE, sint æquales, vtraque vtrique.) & vt DB, ad BC, ita AD, ad AC; & vt AB, ad BE, ita AC, ad CE; erit quoque vt AD, ad AC, ita AC, ad CE; atque adeo AD, AC, CE, proportionalia

[b] 1. sexti

sunt. Igitur & illis æqualia FH, HL, LM, proportionalia erunt: [c] Habent autem rectæ GH, HK, KM, easdem proportiones, quas rectangula FH, HL, LM. Igitur & rectæ GH, HK, KM, proportionales sunt; [d] propterea que rectangulum sub GH, KM, quadrato ex HK, æquale est. Est autem rectangulum sub GH, KM, ostensum Rationale. Igitur & quadratum ex HK, Rationale est; ideoque & recta HK, Rationalis erit; [e] & ob hoc ipsi FG, Rationali expositæ, hoc est, ipsi HI, commensurabilis vel longitudine, & potẽtia, vel solũ potẽtia. Et si quidẽ HK, ipsi HI, longitudine sit cõmensurabilis; [f] rectangulũ HL, sub Rationalibus HI, HK, lõgitudine cõmensurabilibus contentum, hoc est, AC, illi æquale, erit Rationale. Si vero HK, ipsi HI, potentia solum commensurabilis sit; [g] erit rectangulum HL, sub Rationalibus HI, HK, potentia tantum commensurabilibus contentum, hoc est, AC, illi æquale, Medium. Est ergo AC, rectangulum sub Medijs AB, BC, potentia tantum commensurabilibus contentum, vel rationale, vel Medium. Quocirca, quod sub Medijs potentia tantum commensurabilibus, &c. Quod erat ostendendum.

[c] 1. sexti

[d] 17. sexti

[e] 6. defin.

[f] 20. deci.

[g] 22. deci.

SCHOLIVM.

FACILIVS quam ex 45. propos. lib. 1. applicabimus ad HI, rectangulum ipsi AC, æquale, [h] *si tribus rectis HI, AB, BC, quarta proportionalis sumatur pro latere HK.* [i] *Nam rectangulum sub extremis HI, HK, æquale erit rectangulo sub medijs AB, BC.*

[h] 12. sexti

[i] 16. sexti

HAC

HAC eadem arte vtemur in sequentibus, quando ad aliquam rectam applicandum erit rectangulum æquale alteri rectangulo.

QVONIAM vero in hoc theoremate demonstratur, rectangulum contentum sub duabus rectis Medijs potentia tantum commensurabilibus esse vel Rationale, vel Mediũ; docebit Euclides propos. 28. quanam ratione inuenienda sint duæ Mediæ potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale comprehendant: Propos. vero 29. duas Medias potentia solum commensurabiles inquiret, quæ spatium Medium contineant.

ITAQVE habemus ex his, [a] *rectangulum contentum sub duabus Rationalibus longitudine commensurabilibus esse Rationale;* [b] *Sub duabus vero Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum rectãgulum esse Irrationale, appellarique Medium, & rectam, quæ ipsum potest, Mediam. Rursus ex demonstratis constat,* [c] *rectangulum comprehensum sub duabus Medijs longitudine commensurabilibus esse Medium;* [d] *Rectangulum autem sub duabus Medijs potentia solum commensurabilibus comprehensum esse vel Rationale, vel Medium.*

[a] 20. deci.

[b] 22. deci.

[c] 25. deci.

[d] 26. deci.

QVOD si quis roget, qualenam rectangulum sit illud, quod sub duabus Medijs longitudine & potentia incommensurabilibus continetur; Respondemus illud nec Rationale esse, nec Medium, sed tertium quoddam genus constituere; nempe æquale esse rectangulo, quod continetur sub linea Rationali, & Irrationali, quæ Media appellatur.

SIT enim rectangulũ AC, comprehensum sub duabus Medijs AB, BC, longitudine & potentia incommensurabilibus. Dico AC, neque Rationale esse, neq; Mediũ, &c. Constructis.n. eisdem, vt in theoremate, ostendemus similiter, rectas GH, KM, Rationales esse, & ipsi FG, longitudine incõmensurabiles. Et quia rectæ AB, BC, ponũtur incõmensurabiles longitudine & potentia; erunt & earũ quadrata AD, CE, atque adeo ipsis æqualia rectangula FH, LM, incommensurabilia: [e] *Vt autem FH, ad LM, ita est recta GH, ad rectam KM.* [f] *Igitur rectæ GH, KM, longitudine inter se sunt incommensurabiles. Quare GH, KM, ostensæ Rationales, sunt potentia tantum inter se commensurabiles;* [g] *Ac propterea*

[e] 1. sexti.

[f] 10. deci.

[g] 22. deci.

pterea rectangulum sub ipsis GH, KM, Irrationale est, quod Medium appellatur, & recta ipsum potens, Irrationalis, quæ dicitur Media. [a] Potest autem rectangulum sub ipsis GH, KM, recta HK: (Nam, vt prius, ostendemus tres GH, HK, KM, esse proportionales) Igitur HK, Irrationalis est, & Media. Quare IK, Rationale non est: si enim Rationale esset, [b] faceret ipsum ad Rationalem HI, applicatum latitudinem HK, Rationalem, & ipsi HI, longitudine commensurabilem. Quod est absurdum. ostensa enim est HK, Irrationalis, ac Media. Eodem modo neque IK, Medium est; Si enim esset Medium, [c] faceret ipsum applicatum ad Rationalē HI, latitudinē HK, Rationalē, & ipsi HI, longitudine incommensurabilē. quod est absurdū. ostensa est, n. HK, Irrationalis, & Media. Itaque cū IK, neq; Rationale sit, neq; Medium; necessario neq; AC, illi æquale, Rationale erit, neq; Medium, sed tertium quoddā genus constituet, nempe æquale erit ipsi IK, quod sub Rationali, & Media, cōtinetur, cui HI, Rationalis sit, & HK, ostensa Media. Ex quibus efficitur, rectā quæ potest spatiū sub duabus Medijs lōgitudine & potentia incommensurabilibus) quales ponuntur AB, BC, cōprehensum, posse quoq; rectangulū sub Rationali, & Irrationali, quæ Media vocatur, contentū. Quod est propositū.

a 17. sexti

b 21. deci.

c 23. deci.

26. 22. THEOR. 24. PROPOS. 27.

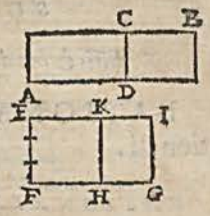
MEDIVM non superat Medium Rationali.

SVPERET Medium AB, Medium AC, rectangulo DB. Dico DB, non esse Rationale. Sit enim, si fieri potest, DB, Rationale. Exposita ergo Rationali linea EF; [d] ad ipsam applicetur rectangulū EG, Medio AB, æquale; & Medio AC, rectangulum EH, æquale, vt sit reliquū HI, Rationali DB, æquale. Erunt igitur EG, EH, æqualia Medijs AB, AC, Media; & HI, æquale Rationali DB, Rationale. Quoniam ergo Media EG, EH, ad Rationalem EF, sunt applicata; [e] erunt rectæ FG, FH, Rationales

d 45. primi

e 23. deci.

nales, & ipsi EF, incommensurabiles longitudine. Rursus, quia Rationale HI, applicatum est ad Rationalem HK; ([a] est enim recta HK, Rationali EF, æqualis) [b] erit recta HG, Rationalis, & ipsi EF, longitudine commensurabilis. Quare cum HG, EF, longitudine sint commensurabiles; & EF, ipsi FH, longitudine incommensurabilis, vt est ostensum; [c] erit & HG, eidem FH, longitudine incommensurabilis. Est autem vt FH, ad HG, ita quadratum ex FH, ad rectangulū sub FH, HG, ex tertio lemmate propos. 19. huius lib. [d] Igitur quadratum ex FH, incommensurabile est rectangulo sub FH, HG. Sed quadrato ex FH, commensurabile est quadratū ex HG; (quod sint ambo ex lineis Rationalibus FH, HG, descripta) [e] atque adeo & duo quadrata ex FH, HG, simul, quadrato ex FH, commensurabilia sunt: Et rectangulo sub FH, HG, commensurabile est id, quod bis continetur sub FH, HG, (quia hoc illius est duplū.) Igitur per ea, quæ in scholio propos. 14. huius lib. ostendimus, & duo quadrata ex FH, HG, simul incommensurabilia sunt rectangulo sub FH, HG, bis. [f] Quare & compositū ex quadratis rectarū FH, HG, & ex rectāgulo bis sub FH, HG, incōmensurabile est cōposito ex quadratis rectarū FH, HG. [g] At quadratis ex FH, HG, vna cum rectāgulo bis sub FH, HG, æquale est quadratum ex FG. Igitur & quadratū FG, incommensurabile est cōposito ex quadratis rectarum FH, HG: Est autem compositum hoc Rationale, ex lemmate 4. propos. 19. huius lib. quod ostensum sit cōmensurabile quadrato Rationali ex FH. Igitur cū huic cōposito, quod Rationale est, incōmensurabile sit quadratū ex FG, [h] erit quadratū ex FG, Irrationale; [i] ac propterea & recta FG, Irrationalis erit. Quod est absurdū. ostensa enim est FG, Rationalis longitudine ipsi EF, incōmensurabilis. Nō ergo DB, quo Medium AB, superat Mediū AC, Rationale est. Quā ob rem Mediū nō superat Mediū Rationali. Quod erat ostēdendū.



a 34. pri.

b 21. deci.

c 14. deci.

d 10. deci.

e 16. deci.

f 17. deci.

g 4. secūdæ

h 10. defin.

i 11. defin.

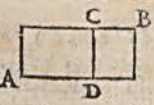
SCHO-

SCHOLIVM.

EX dictis & hoc demonstrabimus.

RATIONALE superat rationale Rationali.

RATIONALE enim AB, superet Rationale AC, spatio DB. Dico DB, quoque esse Rationale. Quoniã.n. AB, AC, Rationalia sũt



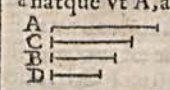
[a] 9. defin. 12. deci.

erunt AB, AC, commensurabilia quadrato Rationalis expositæ; [b] *atque adeo & inter se commensurabilia. Quare cum totum AB, compositũ ex AC, DB, commensurabile sit ipsi AC; erit quoque idem AB, reliquo DB, commensurabile, ex coroll. propos. 16. huius lib. Est autem AB, Rationale. Igitur & DB, ex lemmate 4. propos. 19. huius lib. Rationale est. Quod est propositum.*

27. PROBL. 4. PROPOS. 28. 0.

MEDIAS inuenire potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale comprehendant.

EXPONANTVR per lemma 2. propos. 21. huius lib. duæ Rationales A, B, potentia tantum commensurabiles [c] inter quas media proportionalis sumatur C; [d] fiatque vt A, ad B, ita C, ad D. Dico C, D, esse Medias



potentia tantum commẽsurabiles, quæ Rationale cõprehendant. Quoniam n. A, B, Rationales ponũtur potentia tantum commensurabiles; [e] erit rectangulum sub ipsis contentum, Irrationale, quod Medium vocatur; atque adeo [f] cum ipsum possit recta C, erit C, Media. Et quoniam est vt A, ad B, ita C, ad D; suntque A, B, potentia tantũ commensurabiles; erunt quoque C, D, solum commensurabiles

[c] 13. sexti
[d] 12. sexti
[e] 22. deci.
[f] 17. sexti

surabiles potentia, vt in scholio propos. 10. huius lib. ostendimus. [a] Est ergo & D, Mediæ C, commensurabilis, Media. Quare inuentæ sunt Mediæ C, D, potentia tantũ commensurabiles. Dico iam ipsas continere Rationale. Quoniam.n. est vt A, ad B, ita C, ad D; & permutando vt A, ad C, ita B, ad D; Vt autem A, ad C, ita est C, ad B; erit quoque vt C, ad B, ita B, ad D; ideoq; B, media proportionalis inter C, & D, [b] poterit rectangulum sub ipsis C, D, comprehensum. Est autem quadratum ex B, linea Rationali, Rationale. Igitur & rectangulum sub C, D, Rationale est. Medias ergo inuenimus C, D, potenta tantum commensurabiles, quæ Rationale comprehendunt. Quod faciendum erat.

[a] 24. deci.
[b] 17. sexti

28. PROBL. 5. PROPOS. 29. 0.

MEDIAS inuenire potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineant.

EXPONANTVR per ea, quæ in scholio propos. 21. huius lib. demonstrauimus, tres Rationales A, B, C, potentia tantum commensurabiles; [c] & inter A, B, media proportionalis inueniatur D. [d] Deinde fiat vt B, ad C, ita D, ad E.

Dico D, E, Medias esse, potentia tantum commẽsurabiles, quæ Medium cõtinent. Quoniam.n. A, B, Rationales sunt potentia solum commensurabiles; erit rectangulum sub A, B, atque adeo & quadratum ex D, [e] quod illi æquale est, [f] Irrationale, quod Medium dicitur; & ipsa recta D, Media. Et quia est vt B, ad C, ita D, ad E; sunt autem B, C, Rationales, & potentia solum commensurabiles; erũt quoque D, E, potentia solum commensurabiles, vt in scholio propos. 10. huius lib. demonstratum est. Cum ergo D, Media sit, [g] erit & E, illi potentia solum commensurabilis,

[c] 13. sexti
[d] 12. sexti
[e] 17. sexti
[f] 22. deci.
[g] 24. deci.

rabilis, Media; Ac propterea D, E, Mediæ sunt potentia tantum cõmensurabiles. Dico iam ipsas continere Mediũ. Quoniam.n. est vt B, ad C, ita D, ad E; & permutando vt B, ad D, ita C, ad E: Vt autem B, ad D, ita D, ad A; erit quoque vt D, ad A, ita C, ad E. [a] Rectangulum igitur sub D, E, æquale est ei, quod sub A, C: Est autẽ quod sub A, C, Rationalibus potentia solum commensurabilibus, [b] Irrationale, & Medium. Igitur & rectangulum sub D, E, Medium est. Medias ergo inuenimus D, E, potentia tantum commensurabiles, quæ Medium continent. Quod faciendum erat.

[a] 16. sexti

[b] 22. deci.

SCHOLIVM. I.

IN ijs quæ sequuntur, indigemus hoc problemate.

DVOS numeros planos similes inuenire.

SVMANTVR quatuor quicunque numeri proportionales, A, B, C, D, vt quidem A, ad C, ita B, ad D. Multiplicantes autem se mutuo A, & B, faciant E; Item C, & D, si multiplicantes faciant F. Erunt ergo E, & F, numeri plani similes, quandoquidem latera habent proportionalia, vt ex constructione est manifestum.

A, 6. C, 12.
B, 4. D, 8.
E, 24. F, 96.

QVONIAM autem in lib. 9. ostensum est, si impar numerus, vel par parem multiplicet, procreari numerum parem; Imparem vero, si impar multiplicet imparem; perspicuum est, quonam modo inueniri possint duo plani similes, quorum vterq; par sit, vel impar; Vel vnus quidem par, alter vero impar. Si enim latera sumpta, sint numeri pares, erunt eorum plani pares etiam: si autem numeri sint impares, erunt & plani eorum impares. Quod si vnius latera sint impares numeri, alterius autem pares, erit illorum quidem planus, impar; horum vero par: Similiter pares erunt plani, si quilibet habeat vnum latus numerum parem, alterum vero imparem, &c.

[c] 28. & 29 noni.

LEMMA

LEMMA I.

DVOS numeros quadratos inuenire, ita vt compositus ex ipsis quadratus etiam sit.

INVENIANTVR per ea, quæ in scholio proximo dicta sunt, duo plani similes AB, & C, quorum vterque vel par sit, vel impar. [a] *Et quoniam, siue a pari par auferatur, siue ab impari impar, reliquus par est; detracto BD, ex AB, qui æqualis sit ip si C, erit reliquus AD, par. Quo diuiso bifariã in E; Dico numerum factum ex AB, in BD,* [b] *qui quidem quadratus est, compositum cum quadrato numeri ED, facere quadratũ. Quoniam.n. numerus AD, bifariam est diuisus in E, & ei additus DB; erit ex 6. theorematе eorum, quæ ad propos. 14. lib. 9. demonstrauimus, numerus qui fit ex AB, in BD, vna cum quadrato numeri DE, æqualis quadrato numeri EB. Quare duo quadrati, nempe qui fit ex AB, in BD, & quadratus numeri DE, compositi faciunt quadratum, eum videlicet, qui ex BE, gignitur. quod est propositum.*

A ..... E ..... D ..... B
C .....

[a] 24. & 26 noni.

[b] 1. noni

COROLLARIVM.

EX his manifestum est, quando AB, & C, similes sunt, inuentos esse eadem arte duos numeros quadratos numerorum BE, ED, quorum excessus, nimirum numerus ex AB, in BD, factus, etiam numerus quadratus sit.

QVOD si numeri sumãtur AB, & C, nõ similes, vterq; tamẽ par, vel impar; inuenti erunt eodẽ modo

duo

duo quadrati numerorum B E, E D, quorum excessus, numerus scilicet, qui fit ex A B, in B D, non est quadratus. Si enim quadratus esset, numeri A B, B D, hoc est, A B, & C, plani similes essent. Quod est absurdum. ponuntur enim non similes.

* 2. noni.

SCHOLIVM II.

ITAQVE si iubeamur inuenire duos quadratos numeros, quorum excessus etiam sit numerus quadratus; sumemus vt prius, duos planos similes, quorum vterque par, vel impar sit, nempe A B, & C, & reliqua perficiemus, vt in proximo lemmate est dictum. Nam quadrati numeri ex B E, E D, descripti sunt illi, quos quærimus. Excedit enim quadratus

A ..... E ..... D .....B
C .....

ex B E, quadratū ex E D, numero, qui producitur ex A B, in B D, qui etiā quadratus est.

SI vero inueniendi sint duo quadrati, quorum excessus non sit quadratus: sumendi erunt duo numeri plani A B, & C, non similes, quorū vterque par sit, vel impar, & reliqua peragēda, vt prius. Nam similiter ostendemus

A...E... D..... B
C .....

quadratum ex B E, æquale esse quadrato ex D E, vna cum eo qui ex A B, in B D, fit; Quare excessus quadratorum ex B E, E D, est numerus factus ex A B, in B D, qui cum non sit quadratus; (Si enim esset quadratus, essent A B, B D, plani similes. quod non ponitur) constat propositum.

HOC posterius facilius absoluemus, si quemcunque quadratum numerum diuidamus in duos numeros, quorum alter sit quadratus, alter vero non. Vt si quadratus 36. diuidatur in quadratum 16. & non quadratum 20. excedet quadratus 36. quadratum 16. numero 20. non quadrato. Sic quoque si idem quadratus 36. diuidatur in quadratum 25. & non quadratum 11. superabit quadratus 36. quadratum 25. numero non quadrato 11. & sic de cæteris.

LEMMA.

LEMMA II.

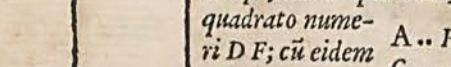
DVOS numeros quadratos inuenire, ita vt compositus ex ipsis non sit quadratus.

SINT duo numeri plani similes A B, & C, pares, vel impares, vt in lemmate præcedē ti, fiatque eadem constructio, ita vt rursus quadratus, qui fit ex

A..H..I.E.F.G...D..... B
C .....

multiplicatione similium numerorum A B, D B, inter se, vna cum quadrato ex D E, æqualis sit quadrato ex B E. Auferatur deinde ex D E, vnitas E F. Erit ergo quadratus ex D F, minor quadrato ex D E, quod & latus D F, latere D E, minus sit. Dico quadratos numeros, quorum alter ex A B, in B D, alter vero ex D F, in se fit, compositos non efficere numerum quadratum. Nam si compositus ex ipsis est quadratus, erit is vel maior quadrato ex B F, vel æqualis, vel minor: quod fieri non posse, in hunc modum demonstrabimus. Sit enim primum maior, quam quadratus ex B F; ac propterea latus ipsius maius latere B F. Erit ergo latus ipsius vel æquale numero B E, vel maius. (Minus enim non erit, quoniam inter numeros B E, B F, sola vnitate inter se distantes nullus medius est numerus, ne vnitas ipsa secetur; Esset autem dictum latus inter ipsos medium, si maius poneretur quam B F, minus vero quam B E.) Si dicatur æquale, ita vt quadrato ex B E, æqualis sit quadratus numerus

compositus ex quadrato, qui fit ex A B, in B D, & ex quadrato numeri D F; cũ eidem quadrato ex B E,



sit ostensus in præcedenti lẽmate æqualis numerus, qui fit ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D E; erit, qui fit ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F, æqualis ei, qui fit ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D E. Ablato ergo communi, eo scilicet qui fit ex A B, in B D; erit reliquus quadratus ex D F, æqualis reliquo quadrato ex D E; Ideoque & latus D F, latere D E, æquale, pars toti. Quod est absurdum. Non ergo latus quadrati compositi ex quadratis, quorum alter ex A B, in B D, alter vero ex D F, inse fit, æquale est numero B E. Sed neque maius. Sit enim, si fieri potest, latus illius æquale numero B I, qui maior sit, quam B F, ita vt quadrato ex B I, æqualis sit quadratus ille compositus. Quoniam igitur quadratus ex B I, latere maiore, maior est quadrato ex B E, latere minore: erit quoque compositus ex quadratis, quorum alter ex A B, in B D, alter vero ex D F, inse fit, (cum hic cõpositus æqualis ponatur quadrato ex B I,) maior quadrato ex B E. Est autem quadrato ex B E, ostensus in lemmate præcedenti æqualis numerus, qui fit ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D E: Ablato ergo communi, qui fit ex A B, in B D; erit reliquus quadratus ex D F, reliquo quadrato ex D E, maior; ac proinde latus D F, latere D E, maius, pars toto. Quod est absurdum. Non ergo latus quadrati compositi ex quadratis, quorum alter fit ex A B, in B D, alter vero ex D F, in se, maius est latere B E. Sed neque æquale, neque

neque minus ostensum est. Non igitur quadratus ille compositus maior est quadrato ex B F.

SIT iam, si fieri potest, numerus qui fit ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F, æqualis quadrato ex B F; & ponatur numerus A H, duplus vnitatis E F. Quia igitur totus A D, totius E D, duplus est, (diuisus enim est A D, in E, bifariam) & ablatus A H, ablatæ vnitatis E F; erit & reliquus H D, reliqui F D, duplus, ex ijs, quę ad propos. 7. lib. 7. ostendimus; atque idcirco H D, in F, bifariam diuiditur. Quare ex 6. theorem. eorum, quæ ad propos. 14. lib. 9. demonstrauimus, erit numerus qui fit ex H B, in B D, vna cum quadrato ex D F, æqualis quadrato ex B F. Sed eidem quadrato ex B F, æqualis ponitur numerus, qui fit ex A B, in B D, vna cum quadrato D F: Igitur qui fit ex H B, in B D, vna cum quadrato ex D F, æqualis est ei, qui fit ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F: & detracto communi quadrato ex D F, relinquetur, qui fit ex H B, in B D, ei qui fit ex A B, in B D, æqualis. Quare cum H B, A B, multiplicantes eundem B D, producant æquales numeros; [a] habeant autem multiplicantes eandem proportionem, quam producti; erit H B, ipsi A B, æqualis, pars toti. Quod est absurdum. Non est ergo, qui ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F, quadrato ex B F, æqualis.

[a] 18. septi.

SIT tandem, si potest fieri, numerus qui ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F, minor quadrato ex B F, ac propterea & latus eius latere B F, minus, quod sit B G, ita vt qui ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F, æqualis sit quadrato ex B G. Sumatur

A . . H . . I . E . F . G . . . D . . . . B
C . . . . . .

autem ipsius E G, duplus A I. Quoniam igitur totus A D, totius F D, duplus est, & ablatus A I, ablati E G; erit rursus & reliquus I D, reliqui G D, duplus; ac propterea ID, in G, diuidetur bifariam. Quare ex eodem theorem. 6. eorum, quæ ad propos. 14. lib. 9. demonstrata sunt, erit numerus qui fit ex I B, in B D, vna cum quadrato ex D G, æqualis quadrato ex B G: ponitur autem eidem quadrato ex B G, æqualis qui fit ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DF. Igitur qui fit ex I B, in B D, vna cum quadrato ex D G, æqualis est ei, qui ex A B, in B D, vna cum quadrato ex DF. Ablatis igitur quadratis ex D G, & D F, quorum qui ex DG, minor est, remanebit qui ex I B, in B D, maior eo, qui ex AB, in B D, pars toto. Quod est absurdum. Non est ergo qui ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F, minor quadrato ex B F. Sed neque maior est, ostensus, neque æqualis. Non igitur quadratus est, qui ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DF. Quod est propositum.

SCHOLIVM III.

EX hoc facile inueniemus duos numeros, ita vt ex illis compositus ad neutrum ipsorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. Si enim per lemma præcedens inueniantur duo quadrati, ita vt compositus ex ipsis non sit quadratus; habebit hic compositus non quadratus ad neutrum ipsorum quadratorum proportionem, quam quadratus ad quadratum.

IDEM obtinebimus, si quemlibet numerum quadratū in duos non quadrates partiti fuerimus. Ita enim quadratus totus ad neutrum eorum, in quos diuisus est, proportionem habebit, quam quadratus ad quadratum.

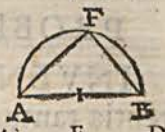
PROBL.

PROBL. 6. PROPOS. 30.

29. 17.

INVENIRE duas Rationales potentia tantum commensurabiles, ita vt maior, quam minor, plus possit quadrato rectæ lineæ longitudine sibi commensurabilis.

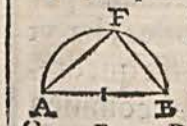
EXPONATVR linea Rationalis A B, & inueniantur ex ijs, quæ in scholio 2. propos. præcedentis tradidimus, duo numeri quadrati C D, C E, quorum excessus D E, non sit quadratus. Deinde per coroll. propos. 6. huius lib. fiat vt C D, numerus ad numerum D E, ita quadratum ex A B, ad aliud quadratum, nimirum ad id, quod ex A F; accommodeturque A F, in semicirculo A B F, circa diametrum A B, descripto: ac denique connectatur recta F B. [a] Quoniam ergo angulus F, rectus est in semicirculo; [b] erit quadratum ex A B, æquale duobus quadratis ex A F, & F B; hoc est, recta AB, plus poterit quam AF, quadrato rectæ FB. Et quia est quadratum ex AB, ad quadratum ex AF, vt numerus CD, ad numerum D E; [c] erunt quadrata ex AB, AF, commensurabilia; atque adeo cum quadratū ex AB, sit Rationale, nempe ex linea Rationali A B, descriptum; erit & quadratum ex A F, Rationale, propterea; & recta AF, ipsum describēs, Rationalis. Rationales ergo sunt AB, AF; atq; adeo cōmensurabiles saltē potentia. Quia vero quadratū ex A B, ad quadratū ex A F, proportionē non habet, quū quadratus numerus ad quadratū numerū; (cū neq; quadratus numerus CD, ad non quadratū D E, proportionem habeat, quā quadratus ad quadratū; alias & DE, quadratus esset, [d] vt in Arithmeticis est demonstratū. qd nō ponitur) [e] erūt rectæ AB, AF,



[a] 31. tertij
[b] 47. pri.
[c] 6. decimi
[d] 24. deci.
[e] 9. decimi

longitudine incommensurabiles: Sunt autem commensurabiles potentia, vt ostensum est. Igitur A B, A F, Rationales sunt potentia tantum commensurabiles.

IAM vero, quoniam est vt CD, ad DE, ita quadratū ex AB, ad quadratum ex A F; erit per conuersionem rationis, vt quadratus numerus C D, ad quadratum numerum CE, ita quadratū ex A B, ad quadratum ex F B (sicut. n. CD, superat DE, quadrato CE, ita etiā quadratum ex AB, superat quadratum ex AF, quadrato ex FB.)[a] Quare rectæ A B, F B, longitudine commensurabiles sunt. Inuenimus ergo duas Rationales AB, AF, potentia tātum commensurabiles, ita vt maior AB, plus possit, quam minor A F, quadrato lineæ F B, sibi longitudine commensurabilis. Quod faciendum erat.



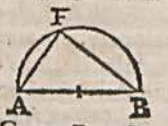
[a] 9. decimi

30. 18.

PROBL. 7. PROPOS. 31.

INVENIRE duas Rationales potentia tantum commensurabiles, ita vt maior, quam minor, plus possit quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

EXPONATVR Rationalis linea AB, inueniantur que per lemma 2. propos. 29. huius lib. duo numeri quadrati C E, E D, ita vt ex illis compositus C D, non sit quadratus, vel certe numerus aliquis quadratus CD, secetur in duos numeros non quadratos C E, E D: Vtrumuis enim horum fiat, totus CD. ad neutrum ipsorū CE, ED, proportionem habebit, quam quadratus ad quadratū, alias secundum priorem modum, esset totus C D, etiam quadratus:



C, 160. D

iuxta posteriorem vero, quilibet ipsorum C E, E D, quadratus quoque,[a] vt in Arithmeticis ostensum est. quod non ponitur. Fiat deinde per coroll. propos. 6. huius lib. vt CD, ad DE, ita quadratum ex A B, ad aliud quadratum, vt ad id, quod ex AF; accommodeturq; AF, in semicirculo AFB, circa AB, descripto. Denique connectatur recta FB. Poterit igitur, vt in præcedenti, A B, plus quam AF. quadrato rectæ FB; Eruntque AB, AF, Rationales potentia solum commensurabiles: Eadem enim hic est demonstratio, quæ in præcedenti propo. Quoniā vero rursus, vt prius, est per conuersionem rationis, vt CD, ad CE, ita quadratum ex AB, ad quadratū ex F B: Non habet autem C D, ad C E, proportionē quam quadratus ad quadratum; Non habebit quoque quadratum ex AB, ad quadratum ex FB, proportionem, quam quadratus numerus ad numerum quadratum.[b] Quare rectæ AB, FB, longitudine incommensurabiles sunt. Inuenimus ergo duas Rationales AB, AF, potentia tantum cōmensurabiles, ita vt maior A B, plus possit quam minor AF, quadrato lineæ FB, sibi longitudine incommensurabilis. Quod erat faciendum.

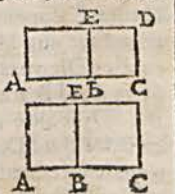
[a] 24. octaui

[b] 9. decimi

LEMMA.

SI sint duæ rectæ lineæ inæquales, erit vt maior ad minorem, ita rectangulum sub ipsis contentum, ad quadratum minoris.

SINT duæ rectæ inæquales AB, BC, in rectum constitutæ, quarū A B, maior sit. Dico esse, vt A B, ad B C, ita rectangulum sub A B, B C, ad quadratum ex B C. Describatur. n. ex BC, quadratū BD, compleaturq; rectangulū A D; eritque rectangulum A E, sub A B, BC, contentum; quod BE, ipsi BC, sit æqualis: perspicuum autem est, esse vt A B, ad BC, ita A E, ad B D.



[c] 1. sexti

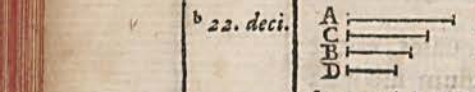
EODEM modo erit, vt minor ad maiorem, ita rectangulum sub ipsis contentum, ad quadratum maioris, vt in secunda figura est manifestum, in qua AB, minor est, quam BC.

31. 24. 25.

PROBL. 8. PROPOS. 32.

INVENIRE duas Medias potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior plus possit quam minor, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

a 30. deci. a REPERTAE sint duæ Rationales A, B, potentia tantum commẽsurabiles, ita vt A, maior plus possit quã B, minor quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis; sitq; C, media proportionalis inter A, & B; & fiat vt A, ad B, ita C, ad D. Quoniã igitur A, B, sunt Rationales potentia solum commensurabiles;



b 22. deci. b erit rectangulum sub A, B, Irrationale, & recta C, ipsum potens, linea Media. Et quia est vt A, ad B, ita C, ad D; sunt autẽ A, & B, potentia tantũ commensurabiles, erũt quoque C, & D, potentia solum commensurabiles, vt in

c 24. deci. scholio propos. 10. huius libri ostendimus. c Quare D, Mediæ C, commensurabilis, Media quoque est. Inuentæ ergo sunt duæ Mediæ C, D, potentia tantum commensurabiles. Dico eas Rationale comprehendere. Cum enim sit vt A, ad B, ita C, ad D; & permutando vt A, ad C, ita B, ad D; sit autẽ vt A, ad C, ita C, ad B; erit quoque vt C,

d 17. sexti ad B, ita B, ad D; d Ac propterea rectangulũ sub C, & D, æquale erit quadrato ex B. Quam ob rem, cum quadratum ex B, Rationali Rationale sit; erit & rectangulũ sub C, D, illi æquale, Rationale. Continent ergo Mediæ C, D, potentia tantum commensurabiles, Rationale. Quoniam

niam vero est vt A, ad B, ita C, ad D: potest autem A, plus quam B, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis, ex constructione; a poterit quoque C, plus quã D, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis. Inuenimus igitur duas Medias C, D, potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale continent, ita vt maior C, plus possit quam minor D, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod faciendũ erat. a 15. deci.

QVOD si repertæ sint A, B, Rationales potentia tantum commnesurabiles, ita vt A, plus possit quam B, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis; reliqua autem fiant, vt prius, ostendemus eodem modo, inuentas esse duas Medias C, D, potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior C, plus possit quam minor D, quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis.

SCHOLIVM.

ALII hoc problema demonstrant per lemma antecedens: Nos autem breuius ac facilius idem sine ipso ostendimus, vt facile iudicabunt, qui cum eorum demonstratione hanc nostram contulerint. Immo rectas C D, Medias esse potentia solum commensurabiles, quæ Rationale contineant, non aliter hic ostendimus, ac in propos. 28. huius lib.

LEMMA.

SI sint tres lineæ rectæ, erit ut prima ad tertiam, ita rectangulum sub prima & secunda contentum, ad id, quod sub secunda & tertia continetur.

SINT tres rectæ AB, BC, CD, in rectum constitutæ. Dico esse vt AB, ad CD, ita rectangulum sub AB, BC, ad rectangulum sub BC, CD. Describatur n. ex BC, quadratũ BCDE, perficiaturque rectangu-

lum.

lum AF; *Eritque* A E, *contentum sub* A B, B C; *&* C F, *sub* B C, C D; *quod* B E, C D, *ipsi* B C, *æquales sint*. [a] *Perspicuum autem est esse* AB, *ad* C D, *vt* AE, *ad* CF. *Quod est propositum*.

[a] 1. sexti

32. 26.

PROBL. 9. PROPOS. 33.

INVENIRE duas Medias potentia solum commensurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior plus possit quam minor, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

SINT inuentę tres Rationales A, B, C, potentia tãtum commensurabiles, ita vt A, plus possit quam C, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis. (Hoc autem fiet in hunc modum. [b] Repertis duabus Rationalibus A, C, potentia tantum commensurabilibus, ita vt A, plus possit quam C, quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine; inueniatur alia B, vtrique A, & C, potentia solum commensurabilis, per ea, quæ in scholio propos. 21. huius lib. demõstrauimus.) [c] Et ipsarum A, B, sumatur media proportionalis D; [d] fiatque vt D, ad B, ita C, ad E. Quoniam igitur ex lemmate antecedenti, est vt A, ad C, ita rectangulum sub A, B, ad rectangulum sub B, C: [e] Est autem rectangulo sub A, B, æquale quadratum ex D; [f] & rectangulo sub B, C, æquale rectangulũ sub D, E, quòd proportionales sint D, B, C, E; Erit quoque vt A, ad C, ita quadratum ex D, ad rectangulum sub D, E: Sed vt quadratum ex D, ad rectangulum sub D, E, ita est per lemma 3. propos. 19. huius lib. recta D, ad rectam E. Igitur erit vt A, ad C, ita D, ad E: Sunt autem A, C, potentia solum commensurabiles. Ergo & D, E, potentia solũ commensurabiles sunt, vt in scholio propos. 10. huius lib.

[b] 30. deci.

[c] 13. sexti

[d] 12. sexti

[e] 17. sexti

[f] 16. sexti

lib. ostendimus. [a] Quia vero D, potens spatium sub A, B, Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, Irrationalis est, & Media; [b] erit quoque E, ipsi ostensa commensurabilis, Media. Inuętæ ergo sunt duę Mediæ D, E, potentia solum commensurabiles. Et quia ostensum est rectangulo sub B, C, [c] quòd Mediũ est, (quòd B, C, sint Rationales potentia tantum commensurabiles,) æquale esse rectangulum sub D, E; erit rectangulum sub D, E, Medium. Denique quia ostendimus esse vt A, ad C, ita D, ad E; potest autem A, plus quam C, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, ex constructione; [d] poterit etiam D, plus quam E, quadrato lineæ longitudine sibi commẽsurabilis. Inuenimus ergo duas Medias D, E, potentia solum commensurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior D, plus possit quam minor E, quadrato lineæ rectæ longitudine sibi commensurabilis. Quod erat faciendum.

[a] 22. deci.

[b] 24. deci.

[c] 22. deci.

[d] 15. deci.

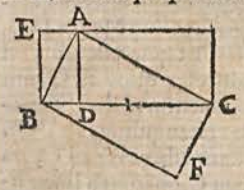
QVOD si repertæ fuerint A, B, C, Rationales potentia tantum commensurabiles, ita vt A, plus possit quam C, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, reliqua autem construantur, vt prius, demonstrabimus similiter, inuentas esse duas Medias D, E, potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior D, plus possit quam minor E, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Id quod facile apparere potest ex adducta demonstratione.

LEMMA I.

SIT triangulum rectangulum ABC, angulum rectum habens BAC, a quo perpendicularis demittatur AD. Dico rectangulum contentum sub CB, BD, æquale esse quadrato ex AB: contentum autem sub BC, CD, æquale quadrato ex A C: & contentum sub B D, D C, æquale quadrato ex A D: contentum denique sub B C, AD, æquale contento sub A B, A C.

QVO-

QVONIAM ex coroll. propos. 8. lib. 6. recta AB, media proportionalis est inter CB, BD; [a] erit rectangulum sub CB, BD, quadrato ex AB, æquale.



EADEM ratione erit rectangulũ sub BC, CD, æquale quadrato ex AC; quoniã per idem coroll. AC, media proportionalis est inter BC, CD.

RVRSVS quia ex eodẽ coroll. AD, inter BD, DC, media est proportionalis, erit eodem modo rectãgulum sub BD, DC, æquale quadrato ex AD.

POSTREMO, [b] quia triangula ABC, ABD, similia sunt; erit vt BC, ad AC, ita AB, ad AD. [c] Quare rectangulum sub BC, AD, æquale est rectangulo sub AB, AC. Quod etiam ita ostendetur. Compleatur rectangulum CE, contentum sub BC, AD. Item rectangulũ AF, sub AB, AC, contentũ. [d] Quoniam igitur rectangulum CE, duplum est trianguli ABC, necnon & rectangulum AF, eiusdem trianguli est duplum; erunt inter se æqualia rectangula CE, AF. quod est propositum.

[a] 17. sexti

[b] 8. sexti

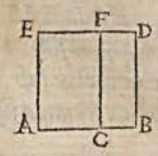
[c] 16. sexti

[d] 41. primi

LEMMA II.

SI recta linea secetur in duas partes inæquales, erit vt maior pars ad minorem, ita rectangulum sub tota & maiore parte, ad rectangulum sub tota & minore parte contentum.

SECETVR recta AB, non bifariam in C, sitque maior pars AC. Dico esse vt AC, ad CB, ita rectangulum sub AB, AC, ad rectangulum sub AB, CB. Describatur enim ipsius AB, quadratum ABDE, ducaturque CF, ipsi AE, parallela; eritq; AF, contentum sub AB, AC, & CD, contentum sub AB, CB; quod AE, CF, ipsi AB, æquales sint. [a] Quoniam igitur est vt AC, ad CB, ita AF, ad CD; constat propositum.



[a] 1. sexti

EADEM ratione erit, vt minor pars BC, ad maiorem CA, ita BF, contentum sub AB, BC, tota, & minore parte, ad CE, contentum sub AB, CA, tota, & maiore parte.

LEMMA III.

SI sint duæ rectæ lineæ inæquales, minor autem secetur bifariam; erit rectangulum sub ipsis contentum duplum rectanguli, quod sub maiori linea & dimidia parte minoris continetur.

SINT duæ rectæ inæquales AB, BC, angulum rectum constituentes ABC, secetur que minor BC, bifariam in D. Dico rectãgulum sub AB, BC, duplum esse rectanguli sub AB, BD. Cõpleatur n. rectangulum AC, sub AB, BC; ducaturq; DE, ipsi AB, parallela; eritq; BE, contentum sub AB, & BD, dimidia minoris. [b] Quoniam igitur AC, ipsius BE, duplum est, quod & basis BC, dupla sit basis BD; constat propositum.

[b] 1. sexti

EODEM

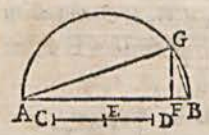
EODEM modo, si BC, secta bifariam, sit maior, erit quod sub AB, BC, continetur, duplum eius, quod continetur sub AB, minore & BD, dimidia maioris, vt ex secunda figura apparet.

33. 27.

PROBL. 10. PROPOS. 34.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis, Rationale; Rectangulum vero sub ipsis contentum, Medium.

[a] 31. deci. [a] REPERIANTVR duæ Rationales AB, CD, potentia solum commensurabiles, ita vt maior AB, plus possit, quã minor CD, quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis; seceturq; CD, bifariam in E. Deinde per lemma 2. propos. 17. huius lib. ad AB, applicetur quadrato ex CE, hoc est, quartæ parti quadrati ex CD, æquale rectangulum deficiens figura quadrata, & sit illud, quod sub AF, FB, continetur. Postremo descripto semicirculo AGB, circa AB, erigatur FG, ad AB, perpendicularis, connectanturq; rectæ AG, GB. Quoniam igitur AB, plus potest, quam CD, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, applicatumque est ad AB, rectangulum sub AF, FB, æquale quartæ parti quadrati ex CD, deficiens figura quadrata; [b] 19. deci. erit AF, ipsi FB, longitudine incommensurabilis. Est autem vt AF, ad FB, ita per lemma 2. propositionis antecedentis, rectangulum sub AB, AF, id rectangulum sub AB, FB; Rectangulum vero sub AB, AF, quadrato ex AG, & rectangulum sub AB, FB, quadrato ex GB, est æquale, per lemma 1. eiusdem antecedentis propositionis; [a] 31. tertij quòd angulus AGB, rectus sit in semicirculo AGB. Igitur quoque erit vt AF, ad FB, ita quadratum ex AG, ad quadratum ex GB; ac propterea cum AF, FB, longitudine sint incõmensurabiles, [b] 10. deci. erũt quadrata ex AG, GB, incommensurabilia. [c] 4. defin. Igitur rectæ AG, GB, potentia incommensurabiles sunt. Et quia quadratum ex Rationali AB, Rationale est, [d] 47. primi æqualeque quadratis ex AG, GB; erit etiam compositum ex quadratis rectarum AG, GB, Rationale. Rursus, quia ex 1. lemmate propositionis præcedentis, rectangulum sub AF, FB, quod quadrato ex CE, æquale est factũ, [e] 17. sexti æquale est quadrato ex FG; (propterea quòd angulus AGB, rectus est, & FG, ad AB, perpendicularis) erunt quadrata ex FG, CE, æqualia; ac proinde & rectæ FG, CE, æquales. Quare CD, dupla existens ipsius CE, dupla etiam erit ipsius FG. Igitur per lemma 3. antecedentis propositionis, rectangulum sub AB, CD, duplum erit rectanguli sub AB, FG. (cum FG, dimidia sit minoris CD,) [f] 22. deci. Sed rectangulum sub AB, CD, Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum, Medium est. Igitur & rectangulum sub AB, FG, illi commensurabile, cum sit eius dimidium, Mediũ est, per coroll. propos. 24. huius lib. Atqui rectãgulo sub AB, FG, per 1. lemma propositionis præcedentis, æquale est rectangulum sub AG, GB. Contentũ igitur sub AG, GB, Medium quoque est: Ostensum autem est compositũ ex earum quadratis, Rationale. Inuentæ ergo sunt duæ rectæ AG, GB, potentia incommensurabiles, quæ faciũt compositum quidem ex ipsarum quadratis, Rationale; Rectangulum vero sub ipsis contentum; Medium. Quod faciendum erat.



SCHOLIVM.

DEMONSTRATVR *hoc loco in scholio quodam antiquo, fieri posse, vt duo spatia Irrationalia componant spatium Rationale, hac fere ratione.*

EXPONATVR *Rationalis linea AB, & duo numeri C, D, quorum C, maior sit, non habentes proportionem, quam*

quam quadratus ad quadratum; fiatq; vt C, ad D, ita quadratum ex AB, ad quadratum ex AE; & tandem descripto quadrato ex AB, educatur EF, ad AB, perpendicularis. Quoniã igitur est vt C, ad D, ita quadratũ ex AB, ad quadratum ex AE: Non habet autẽ C, ad D, proportionẽ quam
[a] 9. decimi C, 6. D, 4. quadratus ad quadratũ; [a] erunt latera AB, AE, dictorum quadratorũ proportionẽ non habentium, quam quadratus ad quadratum, longitudine incommensurabilis: Ac propterea cum AB, tota longitudine sit incommensurabilis parti AE, erit eadem AB, & reliquæ EB, longitudine
[b] 1. sexti incommensurabilis, ex coroll. propos. 17. huius lib. [b] Vt autem AB, ad AE, ita est quadratum ex AB, ad AF. Igitur
[c] 10. deci. cum AB, AE, incommensurabiles sint longitudine, [c] erunt quadratum ex AB, & rectangulum AF, incommensurabilia. Quare quadrato ex AB, existente Rationali, quod & AB, Rationalis ponatur; erit AF, dicto quadrato incommensurabile, Irrationale. Eodemque argumento ostendemus BF, Irrationale esse. Quia vero AF, BF, componunt quadratum Rationale ex AB; perspicuum est, ex duobus Irrationalibus confici posse Rationale. Quod est propositum.

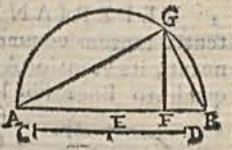
AT vero si AF, FB, Rationalia sint, ostendemus & totũ AFB, ex ipsis compositum Rationale esse. Cum enim vtrumque AF, FB, Rationale sit; erunt ipsa inter se commensurabilia. [d] Igitur & totum AFB, ex ipsis compositum vtrique earum commensurabile erit. Quare AFB, totum commensurabile vtrique Rationali AF, FB, [e] Rationale quoque est. Quod est propositum.
[d] 16. deci.
[e] 9. defin.

34. 28.

PROBL. 11. PROPOS. 35.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; Rectangulum vero sub ipsis contentum Rationale.

[a] REPERIANTVR duæ Mediæ AB, CD, potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior AB, plus possit quã minor CD, quadrato lineæ sibi longitudine incommensuabilis; fiantq; reliqua, vt in præcedenti propos. Ostendemus igitur similiter, vt in propos. antecedenti, rectas AG, GB, potentia esse incommensurabiles. Et quia quadratum ex Media AB, [b] æquale existens quadratis rectarũ AG, GB, Medium est; erit quoque cõpositum ex quadratis rectarum AG, GB, Medium. Rursus vt in antecedẽti propositione, ostẽdemus rectangulũ sub AB, CD, duplum esse rectanguli sub AB, FG; atque adeo illud esse huic commensurabile. Quare cum rectangulum sub AB, CD, Rationale sit, ex constructione; erit & rectangulum sub AB, FG, illi commensurabile, Rationale: Sed per 1. lemma propos. 33. huius lib. rectangulo sub AB, FG, æquale est rectangulum sub AG, GB. Igitur & rectangulum sub AG, GB, Rationale est. Ostensum autem est, compositum ex quadratis ipsarum AG, GB, esse Medium. Igitur duę rectæ AG, GB, quæ ostẽsæ sunt potentia incommensurabiles, faciũt compositum ex earum quadratis Medium, & rectangulum sub eisdem comprehensum, Rationale. Inuentæ ergo sunt duæ rectæ AG, GB, potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, Rectangulum vero sub ipsis contentum, Rationale. Quod erat faciendum.



[a] 32. deci.
[b] 47. primi

PROBL. 12. PROPOS. 36.

35. 29.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis

dratis Medium, & rectangulum sub ipsis contentum Medium, incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis.

a 33. deci. 1 REPERIANTVR duæ Mediæ A B, C D, potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior A B, plus possit quam minor C D, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis; fiantque reliqua, vt in propos. 34.

Ostendemus igitur similiter, rectas A G, G B, potentia incommensurabiles esse. Et quia quadratum ex Media A B, Medium est,
b 47. primi b, & quadratis rectarum A G, G B, æquale; erit & compositum ex quadratis rectarum A G, G B, Medium. Rursus, vt in 34. demonstrabimus, rectangulum sub A B, C D, duplum esse rectanguli sub A B, F G, atque adeo illud esse huic commensurabile. Quare cum ex constructione, rectangulum sub A B, C D, Medium sit: erit quoque rectangulum sub A B, F G, hoc est, sub A G, G B, quod illi per 1. lemma propos. 33. huius lib. æquale est, Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. Quoniam vero A B, longitudine incommensurabilis ponitur ipsi C D; Est autem eidem C D, ipsa C E, longi-
c 13. deci. tudine commensurabilis, quod illa huius sit dupla; erunt A B, C E, longitudine incommensurabiles: Sed vt A B, ad C E, ita est per lemma 3. propos. 19. huius lib. quadratum ex A B, ad rectangulum sub A B, C E, hoc est, ad rectangulum sub A B, F G, hoc est, sub A G, G B, (sunt enim rectangula sub A B, FG, & sub AG, GB, per
d 10. deci. 1. lemma propos. 33. huius lib. æqualia,) Igitur quadratum ex A B, incommensurabile est rectangulo sub A G, G B. Inuentæ sunt ergo duæ rectæ lineæ A G, G B, potentia incommensurabiles, quæ faciunt & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis contentum Medium, incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis. Quod faciendum erat.

SCHO-

SCHOLIVM.

EX hoc vero problemate facile illud absoluemus, quod ad propos. 24. huius lib. nos demonstraturos recepimus, mirum.

INVENIRE duas Medias longitudine, & potentia incommensurabiles.

QVONIAM ostensum est tam compositũ ex quadratis rectarum AG, GB, quàm rectangulum sub ipsis, esse Medium, & hoc illi composito incommensurabile; erunt quoque lineæ potentes illud compositum Medium, & hoc rectangulũ Medium, Mediæ, incommensurabiles tam longitudine, quam potentia. Si enim potentia essent commensurabiles, essent & earum quadrata, hoc est, compositum ex quadratis rectarum AG, GB, & rectangulum sub A G, G B, commensurabilia. quod non ponitur. Quocirca si sumatur A B, potens compositũ ex quadratis rectarum AG, GB, & alia recta potens rectangulum sub AG, G B, id est, media proportionalis inter A G, G B; inuentæ erunt duæ Mediæ & longitudine, & potentia incommensurabiles. Quod est propositum.

PRINCIPIVM SENARIORVM per compositionem.

THEOR. 25. PROPOS. 37. 36. 30.

SI duæ Rationales potentia tantum commensurabiles componantur; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus.

COMPONANTVR duæ Rationales A B, B C, potentia solum commensurabiles, inuentæ per 2. lem-

ma propos. 21. huius lib. Dico totam A C, Irrationalem esse. Quoniã n. AB, longitudine incommensurabilis est ipsi BC; & vt AB, ad B C, ita est

rectangulum sub AB, BC, ad quadratum ex B C, per lemma propos. 31. huius lib. [a] erit rectangulum sub AB, BC, quadrato ex B C, incommensurabile. Sed rectangulo sub A B, B C, commensurabile est eius duplum, nempe quod bis sub A B, B C, continetur; & quadrato ex B C, commensurabile est quadratum rectæ AB; (omnia enim sunt Rationalia) [b] atque adeo & compositum ex quadratis rectarum A B, B C, eidem quadrato ex B C, commensurabile est. Igitur per ea, quę in scholio propos. 14. huius lib. ostendimus, & quod bis sub AB, BC, continetur, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum AB, BC. Quamobrem & compositũ ex eo, quod bis sub AB, BC, & ex composito quadratorum rectarum AB, BC, hoc est, quadratum ex tota AC. ([c] Est enim hoc quadratum æquale quadratis rectarum A B, B C, vna cũ rectangulo sub AB, BC, bis) composito ex quadratis rectarum AB, BC, [d] incommensurabile erit: Est autem compositum ex quadratis rectarũ AB, BC, Rationale, quod commensurabile sit ostensum quadrato Rationali ex BC, Rônali. Igitur quadratũ ex A C, quadrato Rônali ex BC, incommensurabile, [e] Irrationale est; atq; adeo & recta ipsa AC, Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus, seu vt alij loquuntur, Binomiũ, quia ex duobus nominibus, nempe ex duabus Rationalibus lineis AB, BC, potentia solum commensurabilibus componitur. Si duæ igitur Rationales potentia tantum commensurabiles componantur, tota Irrationalis erit, &c. Quod ostendendum erat.

[a] 10. deci.
[b] 16. deci.
[c] 4. secũdi
[d] 17. deci.
[e] 10. defin.

SCHOLIVM.

ITAQVE ex duabus Rationalibus potentia solum commensurabilibus procreantur duæ lineæ Irrationales. Nã recta quæ inter eas est medio loco proportionalis, [f] *Irrationalis est, quæ Media vocatur. At vero composita ex ipsis,* [g] *Irrationalis est, quæ ex binis nominibus dicitur.*

[f] 22. deci.
[g] 37. deci

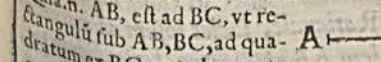
THEOR.

THEOR. 26. PROPOS. 38.

37. 31.

SI duæ Mediæ potentia tantum cõmensurabiles componantur, quæ Rationale contineant; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs prima.

COMPONANTVR duæ Mediæ [a] superius inuentę AB, BC, potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale contineant. Dico totam A C, Irrationalem esse. Quia n. AB, est ad BC, vt rectangulũ sub AB, BC, ad quadratum ex BC, vt in lemmate



propos. 31. huius lib. est ostensum; sunt autem A B, B C, longitudine incommensurabiles; [b] erunt rectangulum sub AB, BC, & quadratum ex B C, incommensurabilia: Sed rectangulo sub AB, B C, commensurabile est, quod sub AB, BC, bis; & quadrato ex BC, commensurabile est compositum ex quadratis rectarum AB, BC. (Nam cum AB, BC, potentia sint commensurabiles, erunt ipsarum quadrata commensurabilia, [c] atque adeo & compositum ex ipsarum quadratis quadrato ex BC, commensurabile erit.) Igitur & rectangulum sub AB, BC, bis, & compositum ex quadratis rectarum AB, BC, incommensurabilia inter se sunt, per ea, quæ in scholio propos. 14. huius lib. sunt demonstrata. Ergo compositum ex quadratis rectarum AB, BC, vna cum rectangulo bis sub AB, BC, hoc est, quadratum ex A C, [d] quod huic composito æquale est, [e] incommensurabile quoque est rectangulo sub A B, BC, bis: Est autem eidem rectangulo bis sub AB, BC, cõmensurabile rectangulum semel sub AB, BC, cũ hoc sit illius dimidium. [f] Igitur quadratum ex AC, incommensurabile est rectangulo sub AB, BC: Ponitur autẽ rectangulum sub AB, BC. Rationale. [g] Irrationale ergo est quadratum

[a] 28. deci.
[b] 10. deci.
[c] 16. deci.
[d] 4. secundi
[e] 17. deci.
[f] 13. deci.
[g] 10. defin.

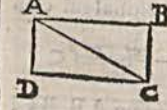
dratum ex A C, [a] & ob id recta quoque A C, Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs prima, vel vt alij loquuntur, Bimediale prius. Si duæ ergo Mediæ potentia tantum commensurabiles componantur, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 11. defin.

LEMMA.

QVOD sub linea Rationali, & Irrationali continetur rectangulum, Irrationale est.

CONTINEATVR rectangulum ABCD, sub Rationali A B, & Irrationali B C. Dico ipsum Irrationale esse. Si enim dicatur esse Rationale, [b] *faciet ipsum ad Rationalem AB, applicatum latitudinem BC, Rationalem. Quod est absurdum. ponitur enim BC, Irrationalis. Non ergo A C, Rationale est. Igitur Irrationale. Quod est propositum.*



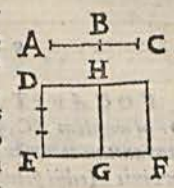
[b] 21. deci.

38.
32.

THEOR. 27. PROPOS. 39.

SI duæ Mediæ potentia tantum commensurabiles componantur, quæ Medium contineant; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs secunda.

COMPONANTVR duæ Mediæ [c] superius inuentæ A B, B C, potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineat. Dico totam A C, Irrationalem esse. Exponatur enim Rationalis D E, [d] ad quam applicetur rectangulum DF, æquale quadrato A C; & cõposito ex quadratis rectarum A B, B C, æquale alterum ad eádem DE, applicetur DG. Et quia quadratum ex A C, hoc est, rectangulum DF, [a] æquale est duobus quadratis ex AB, BC, vna cum rectangulo bis sub A B, B C; erit reliquum HF, æquale reliquo rectangulo, quod bis sub AB, BC, continetur. Quoniã vero, ex hypothesi, rectangulum sub A B, B C, Medium est; erit & rectangulum bis sub AB, BC, ei commensurabile, hoc est, H F, Mediũ, ex coroll. propos. 24. huius lib. Rursus quia quadrata Mediarum AB, BC, potentia commensurabilium, commensurabilia sunt; [b] erit & compositum ex ipsis, nimirum rectangulum D G, vtriuis ipsorum commensurabile: Sed vtrumque quadratorũ ex Medijs A B, BC, Medium est. Igitur & DG, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium erit. Quia igitur Media D G, H F, applicantur ad Rationalem D E; ([c] est enim G H, Rationali DE, æqualis.) [d] erunt eorũ latitudines EG, GF, Rationales ipsi DE, longitudine incommẽsurabiles. Rursus quia AB, BC, longitudine incommensurabiles sunt; & est vt A B, ad BC, ita quadratum ex A B, ad rectangulum sub AB, BC, ex lemmate 3. propos. 19. huius lib. erit quadratum ex AB, incommensurabile rectangulo sub AB, BC, vt in scholio propos. 10. huius lib. ostensum est: Atqui quadrato ex AB, ostensum est commensurabile compositum ex quadratis rectarum A B, B C; & rectangulo sub AB, BC, commensurabile est, quod continetur bis sub AB, BC, cum hoc illius sit duplum. Igitur per ea, quæ in scholio propos. 14. huius lib. diximus, erit & compositũ ex quadratis rectarum AB, BC, hoc est, rectangulũ DG, incommensurabile rectangulo bis sub AB, BC, hoc est, rectangulo HF. [e] Cum ergo sit vt DG, ad HF, ita EG, ad GF; [f] erit EG, ipsi GF, longitudine incommensurabilis: ostensum autem iam fuit E G, G F, esse Rationales. Rationales igitur sunt EG, GF, potentia tantum commensurabiles, [g] ac propterea, & tota EF, composita, Irrationalis est. Quare, per lemma antecedens, DF, contentum sub Rationali DE, & Irrationali EF, Irrationale est; Ac propterea & quadratum ex AC, ipsi DF, æquale, Irrationale est. Quare & recta AC, Irrationalis est. Vocetur autem



[a] 4. secundi
[b] 16. deci.
[c] 34. primi
[d] 23. deci.
[e] 1. sexti.
[f] 10. deci.
[g] 37. deci.

tem ex binis Medijs secunda, seu vt alijs placet, Bimediale secundum. Si duæ ergo Mediæ potentia tantum commensurabiles, &c. Quod erat demonstrandum.

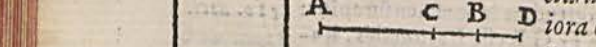
SCHOLIVM.

VOCAVIT Euclides in præcedenti propositione lineã Irrationalem AC, quæ componitur ex duabus Medijs potentia tantum commensurabilibus, quæ Rationale contineant, ex binis Medijs primam: Hic vero lineã Irrationalẽ AC, quę componitur ex duabus Medijs potentia tantum commensurabilibus, quæ Medium contineant, ex binis Medijs secundam, quoniam Rationale & natura, & cognitione prius est Medio, quod Irrationale est, ex propos. 22. huius lib.

LEMMA.

SI recta linea non bifariam secetur, erit cõpositum ex quadratis partium maius, quàm rectangulum sub partibus bis comprehensum, quadrato eius lineę, qua maior pars minorem superat.

SECETVR recta AD, in B, non bifariam, sitque maior pars AB; in qua sumatur BC, minori parti BD, æqualis, vt sit AC, excessus, quo AB, superat BD, hoc est, BC, ipsi BD, æqualem. Dico quadrata rectarum AB, BD, simul maiora esse rectãgulo bis sub AB, BD, quadrato rectę AC. Quo



[a] 7. secundi *niã. n. quadrata ex AB, BC, [a] æqualia sunt rectangulo bis sub AB, BC. vna cum quadrato ex AC; estq; BC, ipsi BD, æqualis: erunt quoq; quadrata ex AB, BD, æqualia rectangulo bis sub AB, BD, vna cũ quadrato ex*

ex AC. Quare quadrata ex AB, BD, maiora sunt, quã rectangulum bis sub AB, BD, quadrato rectæ AC. quod est propositum.

COROLLARIVM.

EX hoc sequitur, quadrata partium inæqualium simpliciter esse maiora rectangulo, quod bis sub partibus inæqualibus continetur.

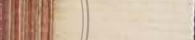
THEOR. 28. PROPOS. 40.

39.
33.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur; quę faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Maior.

COMPONANTVR duæ rectæ [a] superius inuentæ AB, BC, potẽtia incommensurabiles, facientes quidem compositũ ex ipsarum quadratis Rationale; rectangulũ vero sub ipsis contentũ, Mediũ. Dico totã AC, esse Irrationalẽ. Quoniã. n. rectangulũ sub AB, BC, Mediũ ponitur, erit & rectãgulũ bis sub AB, BC, illi cõmensurabile, Mediũ, ex coroll. propos. 24. huius lib. atq; adeo Irrationale. Ponitur autẽ compositũ ex quadratis rectarũ AB, BC, Rõnale. [b] Incõmensurabile ergo est rectangulũ bis sub AB, BC, composito ex quadratis rectarum AB, BC. [c] Igitur & rectangulum bis sub AB, BC, vna cum quadratis ex AB, BC, hoc est, quadratum ex AC, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum AB, BC. Cum ergo hoc compositum ponatur Rationale; [d] erit quadratum ex AC, illi incommensurabile, Irrationale; [e] Ac propterea recta AC, Irrationalis est. Vocetur autẽ Maior, quia [f] cum possit duo quadrata ex AB, BC,

[a] 34. deci.
[b] 10. defin.
[c] 17. deci.
[d] 10. defin.
[e] 11. defin.
[f] 4. secundi



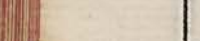
B C, & rectangulum bis sub AB, BC; compositum ex quadratis rectarum AB, B C, per lemma antecedens, maius est rectangulo bis sub AB, BC. Quare cum compositum ex quadratis rectarum AB, BC, Rationale sit, rectangulum vero bis sub A B, B C, Medium; recte vocabitur A C, Maior, siquidem a Rationali, quod maius est, nomen conuenit imponere. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, &c. Quod erat ostendendum.

40.
34.

THEOR. 29. PROPOS. 41.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Medium potens.

[a] 35. deci. COMPONANTVR duæ rectæ, superius inuentæ AB, BC, potentia incommensurabiles, facientes compositum quidem ex quadratis ipsarum, Medium; rectangulum vero sub ipsis contentum, Rationale. Dico totam



A C, Irrationalem esse. Quoniam.n. compositū ex quadratis rectarum AB, BC, Medium est; quod uero continetur bis sub A B, B C, Rationale, quod eius dimidium, nempe quod sub AB, BC, semel cōtinetur, Rationale ponatur; [b] erit compositum ex quadratis rectarum AB, BC, incommensurabile rectangulo bis sub AB, BC. [c] Igitur & compositum ex quadratis rectarum AB, BC, vna cum rectāgulo bis sub AB, BC, hoc est, quadratum ex AC, incommensurabile est rectangulo bis

[b] 10. defin.
[c] 17. deci.

bis sub AB, BC. Cum ergo rectangulum bis sub AB, BC, vt diximus, sit Rationale; [a] erit quadratum ex A C, illi incommensurabile, Irrationale; [b] Ac proinde & recta AC, Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Medium potens, quia potest Medium, nempe compositum ex quadratis rectarum AB, BC, & Rationale, rectangulum scilicet bis contentum sub A B, B C. Conuenit autem Rationale Irrationali anteponi. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommensurabiles, &c. Quod demonstrandum erat.

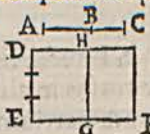
[a] 10. defin.
[b] 11. defin.

41.
35.

THEOR. 30. PROPOS. 42.

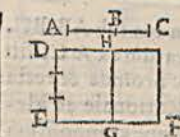
SI duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciāt & compositū ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis continetur, Medium; incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem bina Media potens.

COMPONANTVR duæ rectæ [c] superius inuentæ AB, BC, potentia incommensurabiles, facientes compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub eisdem Medium, incommensurabileq; composito ex quadratis ipsarum Dico totam AC, Irrationalem esse. Exponatur enim Ratio



nalis DE, [d] ad quam applicetur rectāgulum DF, æquale quadrato ex A C; Et composito ex quadratis rectarum A B, B C, alterum æquale applicetur D G. Et quia quadratum ex A C, hoc est, rectangulum D F, [e] æquale est cōposito ex quadratis rectarū AB, BC, vna cum rectangulo bis sub AB, BC, erit reliquum H F, æquale rectangulo

[c] 36. deci.
[d] 45. primi
[e] 4. secūdi



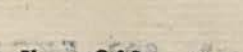
gulo bis sub AB, BC. Quoniam vero tam compositum ex quadratis rectarum AB, BC, hoc est, rectangulum DG, quam rectangulum sub AB, BC, atque adeo ex coroll. 24. huius libri, quod bis sub AB, BC, nempe ipsum HF, (cum illi sit commensurabile) Medium ponitur, [a] facient DG, HF, ad Rationalem DE, applicata latitudines EG, GF, Rationales ipsi DE, longitudine incommensurabiles. Rursus quia compositum ex quadratis rectarum AB, BC, id est, rectangulum DG, incommensurabile ponitur rectangulo sub AB, BC: Eidem autem rectangulo sub AB, BC, commensurabile est ipsius duplum, nempe quod bis continetur sub AB, BC, hoc est, ipsum HF; [b] erunt & DG, HF, incommensurabilia. Quare [c] cum sit vt DG, ad HF, ita EG, ad GF; [d] erunt EG, GF, longitudine incommensurabiles: Atqui EG, GF, ostensæ sunt Rationales. Igitur EG, GF, Rationales sunt potentia solum commensurabiles; [e] Ac propterea tota EF, ex ipsis composita Irrationalis est. Quare DF, contentum sub Rationali DE, & Irrationali EF, ex lemmate propos. 38. huius lib. Irrationale est. Igitur & quadratum ex AC, illi æquale, Irrationale est; [f] ideoque & recta ipsa AC, Irrationalis. Vocetur autem bina Media potens, nimirum & compositum ex quadratis rectarum AB, BC, & rectangulum bis sub AB, BC. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis Medium, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 23. deci.
[b] 13. deci.
[c] 1. sexti.
[d] 10. deci.
[e] 37. deci.
[f] 11. defin.

LEMMA

SI recta linea in partes inæquales secetur, & rursus in alias partes inæquales; erunt quadrata partium magis inæqualium simul maiora quadratis partium minus inæqualiũ simul.

SECETVR recta AB, inæqualiter in C, & rursus inæqualiter in D, sintque priores partes AC, CB, magis inæquales, quam posteriores AD, DB. Dico quadrata ex AC, CB, simul maiora esse quadratis ex AD, DB, simul. Diuisa enim AB, bifariam in E,



cadet punctum D, vel inter E, C, vel inter A, E. Cadat primum inter E, C. Quoniam igitur rectangulum sub AC, CB, vna cum quadrato ex EC, [a] æquale est quadrato ex EB: Item rectangulum sub AD, DB, vna cum quadrato ex ED, æquale est eidem quadrato ex EB; erit rectangulum sub AC, CB, vna cum quadrato ex EC, æquale rectangulo sub AD, DB, vna cum quadrato ex ED. Ablatis igitur quadratis inæqualibus rectarum inæqualium EC, ED, cum quadratũ ex EC, maius sit quadrato ex ED; erit reliquũ rectangulũ sub AC, CB, minus reliquo rectangulo sub AD, DB; ac propterea & rectangulum bis sub AC, CB, minus erit rectangulo bis sub AD, DB. Quoniã vero quadratum ex AB [b] æquale est tã rectangulo bis sub AC, CB, vna cũ quadratis ex AC, CB, quã rectãgulo bis sub AD, DB, vna cum quadratis ex AD, DB; erit rectangulum bis sub AC, CB, vna cum quadratis ex AC, CB, æquale rectãgulo bis sub AD, DB, vna cum quadratis ex AD, DB. Quare cum rectangulum bis sub AC, CB, ostensum sit minus rectangulo bis sub AD, DB, erunt reliqua quadrata ex AC, CB, maiora reliquis quadratis ex AD, DB. Quod est propositum.

[a] 5. secũdi
[b] 4. secũdi

SED cadat iã D, inter A, E. Quoniã igitur partes AC, CB, magis inæquales ponuntur, quã partes AD, DB; erit AD, (quæ minor est posteriorũ) maior quam CB; (quæ priorũ minor est) ac proinde cũ AE, EB, æqua-

quales sint, erit reliqua EC, maior quam reliqua DE.

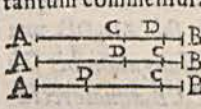
Itaque quia rectangulum sub AC, CB, vna cum quadrato ex
[a] *5. secundi* *EC, æquale est quadrato ex E B: Item rectangulum sub A D, D B, vna cum quadrato ex D E, æquale est quadrato ex AE, hoc est, eidem quadrato ex EB; erit rectangulum sub AC, CB, vna cum quadrato ex EC, æquale rectangulo sub A D, D B, vna cum quadrato ex D E. Igitur vt prius, demonstrabimus quadrata ex AC, CB, maiora esse quadratis ex A D, DB. Quod est propositum.*

42. 36.

THEOR. 31. PROPOS. 43.

QVAE ex binis nominibus, ad vnũ duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT ex binis nominibus A B, diuisa ad punctum C, in sua nomina, ita vt AC, C B, sint Rationales potentia tantum commensurabiles, vt vult propos. 37. huius libri.



Dico A B, ad aliud punctũ diuidi nõ posse in alia nomina, quæ scilicet sint etiam Rationales lineæ potentia tantum commensurabiles. Si enim fieri potest, diuidatur iterũ in sua nomina ad D. Constat ergo AB, in C, nõ diuidi bifariã. Nam si bifariã diuideretur, essent AC, CB, lõgitudine cõmensurabiles, quod est absurdum. ponuntur enim Rationales potentia tantũ cõmensurabiles. Eodẽ modo neque ad D, bifariã secabitur AB, cum & AD, DB, Rationales sint potentia tantũ cõmensurabiles. Secatur ergo A B, tam ad C, quã ad D, inæqualiter; ac propterea partes AC, CB, vel minus inæquales sunt, quã partes AD, DB, vel magis inæquales; Ac propterea per lemma antecedẽs, quadrata ex AC, CB, vel minora sũt quadratis ex AD, DB, vel maiora. (Ne-

[a] (Neque enim partes A D, DB, vbicunq; punctum D, exuterit, partibus A C, C B, æquales erunt, vtraque vtrique, nempe maior maiori, & minor minori. Nam hac ratione secaretur A B, secunda diuisione in eadem nomina, in quæ secta est diuisione prima. quod non ponitur.) Quia vero si ab æqualibus inæqualia demantur, residuorum excessus excessui ablatorum æqualis est, vt in pronũciatio 16. lib. 1. docuimus: Sunt autem quadrata ex A C, C B, vna cum rectangulo bis sub A C, C B, æqualia quadratis ex A D, D B, vna cum rectangulo bis sub A D, D B, [a] quod tam illa, quam hæc æqualia sint quadrato ex A B; fit, vt qui excessus fuerit ablati compositi ex quadratis rectarum A C, C B, & ablati compositi ex quadratis rectarum A D, D B, idem sit reliqui rectanguli bis sub A C, C B, & reliqui rectanguli bis sub A D, D B. Sed excessus compositi ex quadratis rectarum A B, CB, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B, spatium Rationale est. (cum enim rectæ A C, C B, Rationales sint, & ob id earum quadrata, Rationalia; erit & compositum ex earum quadratis, Rationale, ex ijs, quæ in scholio propositionis 34. huius libri ostendimus: eademque ratione erit & compositum ex quadratis rectarum A D, D B, Rationale. Quare cũ Rationale superet Rationale Rationali, vt in scholio propos. 27. huius libri demonstrauimus; manifestum est, excessum compositi ex quadratis rectarum A C, C B, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B, spatium esse Rationale.) Igitur & excessus rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B, spatium Rationale est. [b] Quoniam vero rectangulum sub A C, C B, Medium est, erit & quod bis sub A C, C B, illi cõmensurabile, ex coroll propos. 24. huius lib. Medium; Atque eodem modo rectangulum bis sub A D, D B, Medium erit. [c] Quare cum Medium non superet Medium Rationali; non erit excessus rectanguli bis sub AC, C B, & rectanguli bis sub A D, D B, spatium Rationale. Ostẽdimus autem & Rationale esse. Quod est absurdum. Nõ igitur A B, ex binis nominibus ad aliud punctum, quam ad C, in sua nomina diuiditur. Quare ad vnum duntaxat pun-

[a] *4. secundi*

[b] *22. deci.*

[c] *27. deci.*

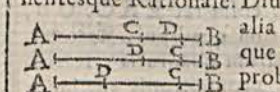
punctum diuiditur in nomina. Quod erat demonstrandum.

43. 37.

THEOR. 32. PROPOS. 44.

QVAE ex binis Medijs prima, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT ex binis Medijs prima A B, diuisa ad punctum C, in sua nomina, ita vt AC, CB, sint Mediæ potentia solum commensurabiles, quæ Rationale contineant, vt vult proposito 38. huius libri. Dico AB, ad aliud punctū diuidi non posse in alia nomina, quæ scilicet sint etiam Mediæ lineæ potentia tantum commensurabiles, continentesque Rationale. Diuidatur enim, si fieri potest, in



alia nomina AD, DB. Igitur vbicunque punctum D, existat, similiter probabimus, vt in præcedenti propositione, excessum rectanguli bis sub AC, CB, & rectanguli bis sub AD, DB, eundem esse, qui est compositi ex quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B: Sed excessus rectanguli bis sub AC, CB, & rectanguli bis sub AD, DB, spatium est Rationale. (Cum enim AC, CB, ponantur continere Rationale, erit & quod bis sub AC, CB, ei, quod continetur semel sub AC, C B, commensurabile, Rationale. Eodemque modo Rationale erit, quod bis sub AD, DB. Quare cum Rationale superet Rationale Rationali, vt in scholio propos. 27. huius libri ostendimus; perspicuum est, excessum rectanguli bis sub A C, CB, & rectanguli bis sub AD, DB, spatium esse Rationale.) Igitur & excessus compositi ex quadratis rectarum AC, CD, & compositi ex quadratis rectarum AD, DB, spatium Rationale est. Quia vero rectæ AC, CB, Mediæ sunt, & potentia commensurabiles, erunt earum quadrata Media quoque, & commensurabilia. [a] Quare & compositum

[a] 16. deci.

positum ex ipsis vtrique ipsorum commensurabile erit. Igitur cum vtrumque sit Medium, erit & compositum ex ipsis, per coroll. propos. 24. huius libri, Medium. Eodem modo Medium ostendemus compositum ex quadratis rectarum AD, DB. Cum ergo Medium non superet Medium Rationali; non erit excessus compositi ex quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarū AD, DB, spatium Rationale. Ostendimus autem & Rationale esse. Quod est absurdum. Non igitur A B, ex binis Medijs prima ad aliud punctum, quam ad C, in sua nomina diuiditur. Quam ob rem ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod demonstrandum erat.

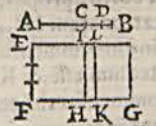
[a] 27. deci.

44. 38.

THEOR. 33. PROPOS. 45.

QVAE ex binis Medijs secunda, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

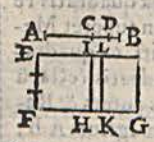
SIT ex binis Medijs secunda A B, diuisa ad punctū C, in sua nomina, ita vt AC, CB, Medię sint potētia tantum commensurabiles, quæ Medium contineant, vt vult propos. 39. huius libri. Dico A B, ad aliud punctum diuidi non posse in alia nomina, quæ scilicet sint etiam lineæ Mediæ potentia tantum commensurabiles, continentesque Medium. Diuidatur enim, si potest fieri, in alia nomina AD, DB. Igitur vbicunque punctum D, existat, similiter ostendemus, vt in propositione 43. quadrata ex AC, CB, vel maiora esse quadratis ex AD, DB, vel minora. Exponatur Rationalis E F, [b] ad quam applicetur rectangulum EG, æquale quadrato ex AB. Item EH, æquale quadratis ex AC, CB. Erit igitur reliquum IG, æquale ei, quod continetur bis sub AC, CB; quandoquidem quadratum ex AB, [c] æquale est quadratis ex AC, CB, &



[b] 45. pri.

[c] 4. secundi

rectangulo bis sub AC, CB. Eodem modo si ad EF, applicetur EK, quadratis ex AD, DB, æquale; erit reliquum LG, æquale rectangulo bis sub AD, DB, comprehenso.



Et quia quadrata ex AC, CB, inæqualia sunt quadratis ex AD, DB; erũt quoque rectangula EH, EK, quæ illis æqualia sunt, inæqualia; ac propterea & rectæ FH, FK, inæquales erunt. Rursus quia quadrata ex AC, CB, maiora sunt, per lemma propos. 39. huius libri, rectangulo bis sub AC, CB; erit & EH, maius quam IG; ac propterea EH, maius quam dimidium ipsius EG, ideoque & recta FH, maior quam dimidiũ ipsius FG. Eadem ratione ostẽdemus FK, maiorẽ esse dimidio ipsius FG. Inæquales ergo sunt partes FH, HG, partibus FK, KG, singulæ singulis. Quoniã vero AC, CB, Mediæ sunt, & potẽtia commẽsurabiles; erũt & earũ quadrata Media, & commensurabilia. [a] Igitur & compositum ex ipsis vtrique ipsorũ sic rum commensurabile erit. Cum ergo vtrũque ipsorũ sit Medium, erit quoque compositũ ex ipsis, hoc est, EH, per coroll. propos. 24. huius libri, Medium. Eademque ratione Medium erit EK. [b] Quare EH, EK, ad Rationalem EF, applicata faciunt latitudines FH, FK, Rationales ipsi EF, longitudine incommensurabiles. Eodem modo cũ rectangulum sub AC, CB, ponatur Mediũ, erit & quod bis sub AC, CB, hoc est, IG, illi commẽsurabile. Mediũ, ex coroll. propos. 24. huius lib. Quare cum applicetur ad Rationalem HI, [c] erit HG, Rationalis ipsi HI, longitudine incommensurabilis. Non aliter ostendemus LG, Medium esse, & KG, Rationalem ipsi KL, lõgitudine commensurabilem. Rursus quia AC, CB, longitudine sunt incommensurabiles; & est vt AC, ad CB, ita per lẽma 3. propos. 19. huius libri, quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, [d] erit quadratum ex AC, rectangulo sub AC, CB, incommensurabile. Sed quadrato ex AC, cõmensurabile est compositum ex quadratis rectarum AC, CB: (cum enim AC, CB, potentia sint commensurabiles, atq; adeo ipsarum quadrata cõmensurabilia; [e] erit & compositum ex ipsis vtrilibet ipsorum, nimirum quadrato

[a] 16. deci.
[b] 23. deci.
[c] 23. deci.
[d] 10. deci.
[e] 16. deci.

quadrato ex AC, commensurabile.) Rectangulo uero sub AC, CB, commensurabile est, quod bis sub AC, CB. Igitur & compositum ex quadratis rectarum AC, CB, hoc est, rectangulum EH, incommẽsurabile est, per scholiũ propos. 14. huius libri, rectangulo bis sub AC, CB, hoc est, ipsi IG. Quocirca [a] cũ sit, vt EH, ad IG, ita FH, ad HG, [b] erunt FH, HG, longitudine incommensurabiles. Ostensæ sunt autem & Rationales. Rationales ergo sunt FH, HG, potentia solum commensurabiles. Igitur FG, tota Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur, diuisaque in nomina ad punctum H. Eodem modo ostendemus & FG, ex binis nominibus diuisam esse in alia nomina ad aliud punctum K. Quod fieri non potest, [c] vt demonstratum est in præcedentibus. Igitur AB, ex binis Medijs secunda non diuiditur in sua nomina ad aliud punctũ, quam ad C. Quare ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat ostendendum.

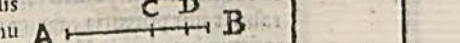
[a] 1. sexti
[b] 10. deci.
[c] 37. deci.
[d] 43. deci.

45.
39.

THEOR. 34. PROPOS. 46.

MAIOR ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT Maior AB, diuisa in sua nomina ad punctum C, ita vt AC, CB, potentia sint incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis Rationale; rectangulum vero sub ipsis



Mediũ, vt vult propos. 40. huius lib. Dico AB, non posse diuidi ad aliud punctũ in alia nomina, quæ scilicet lineæ incõmensurabiles quoq; sint potẽtia, facientes compositum ex ipsarũ quadratis Rõnale, & rectangulũ sub ipsis Mediũ. Si enim fieri potest, diuidatur in alia nomina ad D. Vbicunq; ergo punctum D, extiterit, demõstrabimus similiter, vt in propositione 43. excessum cõpositi ex quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarum AD, DB, eum esse, qui rectanguli bis sub AC, CB, & rectanguli bis sub AD, DB. Sed excessus compositi ex

quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarum AD, DB, spatiũ est Rationale: (quia cũ utrũque compositum ex hypothesi sit Rationale, erit quoq; eorum excessus spatium Rationale, vt in scholio propos. 27. huius libri ostendimus.) Igitur & excessus rectanguli bis sub AC, CB, & rectanguli bis sub AD, DB, spatium est Rationale. Quoniam vero rectangulum sub AC, CB, ponitur Medium, erit & rectangulum bis sub AC, CB, Medium, ex coroll. propos. 24. huius libri, cum ei sit commensurabile. Atque eodem modo Medium erit rectangulum bis sub AD, DB. a Igitur cum Medium non superet Medium Rationali; non erit excessus rectanguli bis sub AC, CB, spatium Rationale: Ostendimus autem & Rationale esse. Quod est absurdum. Non igitur Maior AB, ad aliud punctum, quam ad C, in sua nomina diuiditur. Quapropter ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat demonstrandum.

a 27. deci.

46. 40.

THEOR. 35. PROPOS. 47.

RATIONALE ac Medium potens, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT linea Rationale ac Medium potens AB, diuisa in sua nomina in puncto C, ita vt AC, CB, incommensurabiles sint potentia, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; rectangulum uero sub ipsis Rationale, vt vult propos. 41. huius libri. Dico AB, non posse diuidi in alio puncto in alia nomina, quæ nimirum sint lineæ quoque incommensurabiles potentia, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis Mediũ, & rectangulũ sub ipsis Rationale. Diuidatur enim, si fieri potest, in alia nomina ad D. Vbicunque ergo punctum D, existat, ostendemus non aliter, ac in propos. 43. huius libri, excessum

excessum rectanguli bis sub AC, CB, & rectãguli bis sub AD, DB, eundẽ esse, qui est cõpositi ex quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarum AD, DB. Sed excessus rectanguli bis sub AC, CB, & rectanguli bis sub AD, DB, spatium Rationale est; quod ostendemus, vt in propos. 44. Igitur & excessus cõpositi ex quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarum AD, DB, spatium est Rationale. Quia vero composita ex his quadratis ponuntur esse Media: a Medium autem non superat Medium Rationali; non erit eorum excessus spatiũ Rationale. Sed & Rationale ostendimus. Quod est absurdum. Non igitur AB, Rationale ac Medium potens, ad aliud punctum, quam ad C, in sua nomina diuiditur. Quam ob rem ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod ostendendum erat.

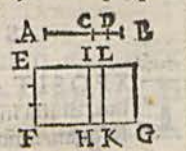
a 27. deci.

47. 41.

THEOR. 36. PROPOS. 48.

BINA Media potens, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT linea potens bina Media AB, diuisa in sua nomina ad C, ita vt AC, CB, potentia incommensurabiles sint, facientes & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis Medium, incommensurabileque composito ex earum quadratis, vt vult propos. 42. huius libri. Dico AB, diuidi non posse ad aliud punctum in alia nomina, quæ videlicet sint etiã lineæ potentia incõmensurabiles, facientes & compositum ex ipsarũ quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis Medium, incommensurabileque composito ex earum quadratis. Nam si potest fieri, diuidatur in alia nomina ad punctum D, ubicunque hoc punctũ D, existat. Constructio autẽ eadem fiat, quæ in propos. 45. ostẽdemusq; vt ibi, partes FH, HG, partibus FK, KG, inæquales esse singulas singulis. Quoniam igitur compositum ex



quadratis rectarum AC, CB, Medium ponitur, erit & EH, illi compoſito æquale, Medium. Item quia rectangulum ſub AC, CB, ponitur etiam Medium, erit & IG, eius duplo æquale. Medium, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. quia illi commenſurabile eſt. Igitur Media EH, IG, applicata ad Rationalem EF, (eſt enim IH, ipſi EF, æqualis) a faciunt latitudines FH, HG, Rationales, longitudine ipſi EF, incomẽſurabiles. Eadem quoque ratione probabimus & rectas lineas FK, KG, Rationales eſſe, longitudine incommenſurabiles ipſi EF. Quia vero compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, deſcriptis, hoc eſt, rectangulum EH, incommenſurabile eſt, ex hypotheſi, rectangulo bis ſub AC, CB, nempe rectangulo IG, b eſtq; vt EH, ad IG, ita FH, ad HG; erunt FH, HG, longitudine incommenſurabiles, vt in ſcholio propoſ. 10. huius libri oſtẽdimus: Sed oſtẽſæ ſunt Rationales. Rationales ergo ſunt FH, HG, potẽtia ſolũ cõmenſurabiles. Igitur tota FG, Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus appellatur, diuiſaque in nomina ad punctum H. Non ſecus demonſtrabimus & FG, ex binis nominibus diuiſam eſſe in alia nomina ad aliud punctum K. Quod fieri non poſſe, c iam ante demonſtratum eſt. Igitur AB, bina Media potens non diuiditur ad aliud punctum quam ad C, in ſua nomina. Quocirca ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod oſtendendum erat.

a. 23. deci.

b 1. ſexti

c 43. deci.

DEFINITIONES SECVNDAE.

EXPOSITA Rationali, & quæ ex binis nominibus, diuiſa in nomina, cuius maius nomen plus poſſit quam minus, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis,

I.

SI quidem maius nomen expoſitæ Rationali commenſurabile ſit longitudine; Vocetur tota ex binis nominibus prima.

II.

SI vero minus nomen expoſitæ Rationali longitudine ſit commenſurabile; Vocetur ex binis nominibus ſecũda.

III.

QVOD ſi neutrum ipſorum nominum ſit longitudine commenſurabile expoſitæ Rationali; Vocetur ex binis nominibus tertia.

RVRSVS ſi maius nomen plus poſſit, quam minus, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis,

IIII.

SI quidem maius nomen expoſitæ Rationali commenſurabile ſit longitudine; Vocetur ex binis nominibus quarta.

V.

SI vero minus nomẽ; Vocetur quinta.

VI.

QVOD si neutrum ipsorum nominum; Vocetur sexta.

SCHOLIVM.

NVMERVS dictarum sex linearū, quæ ex binis nominibus appellantur, colligitur hac ratione. Quoniā nomina lineæ, quæ ex binis nōibus dicitur, sunt lineæ Rōnales potentia tantū commensurabiles, non poterit vtrumq; nomen expositæ Rationali commensurabilæ esse longitudine; (alias enim nomina ipsa essent quoq; lineæ longitudine inter se cōmensurabiles, vt in scholio propos. 12. huius libri docuimus. quod nō ponitur.) Sed vel vnum tantum, nempe maius, aut minus; vel vtrum: Atque ita tria genera consurgunt linearum, quæ ex binis nominibus vocantur. Rursus quia nomina inæqualia sunt; (alias enim essent lineæ inter se longitudine commensurabiles. quod non ponitur.) poterit maius nomen plus, quam minus, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis: Et si quidem plus possit quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis, constituentur vna cum tribus dictis generibus, tres diuersæ lineæ ex binis nominibus, minimum prima, secunda, & tertia ex binis nominibus: Si vero plus possit quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis, efficientur vna cum eisdem tribus generibus aliæ tres diuersæ lineæ ex binis nominibus, videlicet quarta ex binis nominibus, quinta, & sexta, vt ex definitionibus hic ab Euclide traditis perspicuum est. Sunt igitur sex diuersæ lineæ ex binis nominibus appellatæ.

PVLCHRE autem Euclides primas ordine statuit tres, in quibus maius nomen plus potest, quam minus, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis; Secundas vero tres reliquas, in quibus maius nomen plus potest, quam minus, quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine; propterea quod commensurabile antecedit incommensurabile, vt manifestum est.

RVRSVS

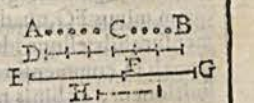
RVRSVS rectè adhuc inter lineas ex binis nominibus, primam omnium ponit, in qua maius nomen commensurabile est longitudine expositæ lineæ Rationali; & secundam, in qua minus nomen eidem Rationali lineæ expositæ longitudine est commensurabile. quoniam maius natura antecedit minus, cū minus a maiori contineatur; tertiam vero, in qua neutrum ipsorum nominum expositæ Rationali longitudine est commensurabile. Et in reliquis tribus eodem modo, primam dicti secundi ordinis quartam appellans; secundam, quintam; & tertiam, sextam.

48. 42.

PROBL. 13. PROPOS. 49.

INVENIRE ex binis nominibus primam.

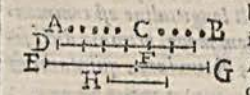
REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, ex ijs, quæ in scholio 2. propo. 29 huius libri scripsimus, quorum excessus AC, non sit quadratus, ita vt AB, CB, proportionem quidem habeant, quam quadratus ad quadratum; at AB, AC, proportionem nō habeāt, quam quadratus ad quadratum: Exponatur Rationalis quæpiam D, cui longitudine commēsurabilis sumatur EF. Erit ergo & EF, Rationali D, commensurabilis, Rationalis. Fiat deinde vt numerus AB, ad AC, ita per coroll. propos. 6. huius libri, quadratum ex EF, ad quadratum ex FG. Dico EG, esse ex binis nominibus primam. Quoniam. n. quadrata ex EF, FG, cū proportionem habeant, quam numeri AB, AC, commensurabilia sunt; erunt & rectæ EF, FG, commensurabiles, saltem potentia: Ostensa autem est EF, Rationalis. Igitur & FG, Rationalis est. Quia vero AB, ad AC, proportionem non habet, quam quadratus ad quadratum, non habebunt quoque quadrata ex EF, FG, proportionem, quam numerus quadratus ad quadratum. Incommensurabiles ergo sunt longitudine rectæ EF, FG. Sunt igitur EF, FG, Rationales potentia solum commensurabiles;



a 6. decimi

b 9. deci.

a 37. deci. les; Atq; idcirco tota EG, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus dicitur. Dico & primam esse. Cum enim sit vt numerus AB, ad numerum AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG; sit autem AB, maior, quam AC; erit quoque quadratum ex EF, maius quam quadratum ex FG. Sit maius, ex lemmate propos. 14. huius libri, quadrato rectæ H. Quoniã igitur est vt AB, numerus ad AC, ita quadratũ ex EF, ad quadratum ex FG; erit quoque, per conuersionem rationis, vt AB, ad CB, videlicet ad excessum, quo antecedens AB, superat consequentem AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H, nimirum ad excessum, quo antecedens quadratum ex EF, superat consequens quadratum ex FG: Habet autem AB, ad CB, proportionem, quam quadratus ad quadratum. Ita



b 9. deci. tur & quadrata ex EF, & H, proportiõtionem habebũt quam numerus quadratus ad numerum quadratum; hæ proinde rectæ EF, H, longitudine commensurabiles sunt. Quoniam igitur maius nomen EF, plus potest, quam minus FG, quadrato rectę H, sibi longitudine commensurabilis; estque idem maius nomen EF, expositæ Rationali D, commensurabile longitudine; erit EG, per definitionem, ex binis nominibus prima. Inuenimus ergo ex binis nominibus primam. Quod faciendum erat.

49. 43.

PROBL. 14. PROPOS. 50.

INVENIRE ex binis nominibus secundam.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in precedenti propositione, expositaq; Rationali quadã D; sumatur ei longitudine cõmensurabilis FG. Erit ergo & FG, Rationali D, commensurabilis, Rationalis. Fiat deinde vt numerus AC, ad numerum AB, ita per coroll. propos. 6. huius libri, quadratum ex FG, ad quadratum ex EF. Dico EG, esse ex binis nominibus secundam.

dam. Quoniã. n quadrata ex FG, EF, proportionem habentia, quam numeri AC, AB, commensurabilia sunt; a 6. deci. erunt & rectę FG, EF, commensurabiles, saltem potentia: Ostensa est autem FG, Rationalis. Igitur & EF, Rationalis est. Quia vero AC, AB, proportionem non habent, quam quadrati numeri; neque quadrata ex FG, EF, proportionem habebunt, quam numeri quadrati. Incõmensurabiles ergo sunt longitudine rectę FG, EF. Sũt igitur EF, FG, Rationales potentia tantum commensurabiles; c Atque idcirco tota EG, Irrationalis est, quę ex binis nominibus dicitur. Dico & secundam esse. Cũ enim sit vt numerus AC, ad numerum AB, ita quadratum ex FG, ad quadratum ex EF: Et conuertendo vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG; sit autẽ AB, maior quam AC; erit & quadratum ex EF, maius, quam quadratum ex FG. Sit, per lemma propos. 14. huius lib. maius quadrato rectæ H. Ostendemus iam, vt in precedenti propos. H, ipsi EF, longitudine commensurabilẽ esse. Quoniam igitur maius nomen EF, plus potest, quã minus FG, quadrato rectę H, sibi longitudine commensurabilis; estq; minus nomen FG, expositę Rationali D, commensurabile longitudine; erit EG, per definitionem, ex binis nominibus secunda. Inuenimus ergo ex binis nominibus secundam. Quod erat faciendum.

b 9. deci.

c 37. deci.

50. 44.

PROBL. 15. PROPOS. 51.

INVENIRE ex binis nominibus tertiam.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in propos. 49. Sumatur alius numerus I, qui ad neutrum ipsorum AB, AC, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. quod quidem fiet, si sumatur I, non quadratus numerus proxime maior, quam AC. Ita enim,

cum

cum non sit quadratus, non habebit ad quadratum A B, proportionem, quam quadratus ad quadratum. Rursus cum sit non quadratus proxime maior, quam A C, differet vel sola vnitate ab AC, vel binario. (Vnitate quidē, quando A C, numerus fuerit, cui addita vnitas non facit quadratum: binario vero, quando vnitas addita ad AC, quadratum facit. Vt si A C, sit 8. erit non quadratus proxime maior 10. differens ab 8. binario, quia vnitas addita ad 8. facit quadratum 9. At si AC, sit 5. erit non quadratus proxime maior 6. differens a 5. vnitate, quia vnitas addita ad 5. non facit quadratum, &c.) Quare vt in scholio propos. 8. lib. 8. ostendimus, non cadet inter I, & AC, medius proportionalis. Igitur non erunt similes plani; ac propterea neque proportionem habebunt, quam numeri quadrati. Exposita iam Rationali quapiam D, fiat per coroll propos. 6. huius lib. vt I, ad A B, ita quadratum ex D, ad quadratum ex EF. [a] Erunt ergo quadrata ex D, & E F, proportionē habentia, quam numerus I, ad numerum AB, commensurabilia; atque adeo & lineæ D, EF, commensurabiles, saltem potentia. Existente igitur D, Rationali, erit & EF, Rationalis. Quia vero I, ad AB, hoc est, quadratum ex D, ad quadratum ex E F, proportionem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratū; [b] erūt D, & EF, rectæ inter se longitudine incommensurabiles. Rursus per dictum coroll. fiat vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG. [c] Erunt ergo quadrata ex EF, FG, proportionem habentia, quam numerus ad numerum, commensurabilia; Ideoque & lineæ EF, FG, commensurabiles, saltem potentia. Igitur cum E F, ostensa sit Rationalis; erit & F G, Rationalis. Et quia A B, ad AC, hoc est, quadratum ex EF, ad quadratū ex FG, proportionem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; [d] erunt EF, F G, longitudine incommensurabiles. Sūt ergo EF, FG, Rationales potentia tantum commensurabiles; [e] Atque ideirco tota EG, Irrationalis est ex binis nominibus appellata. Dico & tertiam esse

[a] 6. decimi

[b] 9. decimi

[c] 6. decimi

[d] 9. decimi

[e] 37. deci.

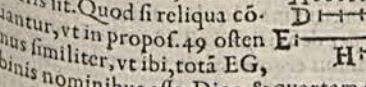
esse. Quoniam. n. est vt I, ad AB, ita quadratum ex D, ad quadratum ex EF; Et vt AB, ad AC, ita quadratū ex EF, ad quadratum ex FG; erit ex æqualitate vt I, ad AC, ita quadratum ex D, ad quadratum ex FG: Non habet autē I, ad AC, proportionem, quā numerus quadratus ad numerum quadratū. Igitur nec quadrata ex D, & FG, proportionem habebunt, quam quadratus numerus ad numerum quadratum; [a] ac propterea rectæ D, & FG, longitudine incommensurabiles sunt. Quoniam autem est vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex F G; Est autem AB, maior quam A C; erit & quadratū ex EF, maius quam quadratum ex FG. Sit ergo maius, per lemma propos. 14. huius lib. quadrato rectæ H. Ostendemus iam similiter, vt in 49. propos. H, ipsi E F, longitudine commensurabilem esse. Quoniam igitur maius nomen EF, plus potest, quam minus F G, quadrato rectæ H, sibi longitudine commēsurabilis; & neutra ipsarum EF, FG, longitudine commensurabilis est expositæ Rationali D, vt demonstratum est; Erit EG, per definitionem, ex binis nominibus tertia. Inuenimus ergo ex binis nominibus tertiam. Quod erat faciendum.

[a] 9. decimi

PROBL. 16. PROPOS. 52. 51. 45.

INVENIRE ex binis nominibus quartam.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, ita vt compositus ex ipsis AB, ad neutrum ipsorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum, ex ijs, quæ in scholio 3. propos. 29. huius lib. tradidimus; exponatur Rationalis quædam D, cui longitudine commensurabilis sumatur EF. Erit ergo & E F, Rōnalis, cū Rationali D, commensurabilis sit. Quod si reliqua cō-



struantur, vt in propos. 49 ostendemus similiter, vt ibi, totā EG, ex binis nominibus esse. Dico & quartam esse. Erit enim rursus

rursus, vt in 49. propos. quadratum ex EF, maius quam quadratũ ex FG. Sit ergo maius, quadrato rectę H. Quoniam igitur eodem modo, vt in 49. propos. per conuersionem rationis est, vt AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H: Non est autem AB, ad CB, vt quadratus ad quadratum; neq; quadratũ ex EF, ad quadratum ex H, erit vt numerus quadratus ad numerum quadratũ. Longitudine ergo incõmensurabiles sunt rectę EF, & H. Itaq; cũ maius nomen EF, plus possit, quam minus FG, quadrato rectę H, sibi longitudine incommensurabilis, & maius rursus nomen EF, longitudine commensurabile expositæ Rationali D; erit EG, per defin. ex binis nominibus quarta. Inuenimus ergo ex binis nominibus quartam. Quod faciendum erat.

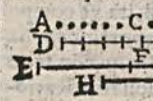
a 9. deci.

52. 46.

PROBL. 17. PROPOS. 53.

INVENIRE ex binis nominibus quintam.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, vt in præcedenti propos. fiat constructio, vt in propos. 50. hoc est, sumatur FG, longitudine commensurabilis expositę Rationali D, &c. Ostendemus ergo vt in propos. 50. EG, esse ex binis nominibus. Dico & quintam esse. Demonstrabimus enim eodem modo, vt in 50. propos. quadratum ex EF, maius esse, quam quadratum ex FG. Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Quoniam vero, vt in propos. 49. ostensum est, per conuersionem rationis, est vt AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H. Ostendemus, vt in propositione antecedenti, rectas EF, & H, longitudine incõmensurabiles esse. Quare cum maius nomen plus EF, possit, quam minus FG, quadrato rectę H, sibi longitudine incommmensurabilis, & minus nomen FG, longitudine commensurabile expositę Rationali D; erit per definitionem EG, ex binis nominibus quinta. Inuenimus ergo ex binis nominibus quintam. Quod faciendum erat.



PROBL.

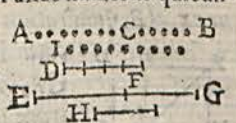
53. 47.

PROBL. 18. PROPOS. 54.

INVENIRE ex binis nominibus sextam.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, planis non similibus, quorum neuter sit quadratus, & compositus ex ipsis AB, non sit quoque quadratus, habeatq; ad neutrũ ipsorum proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; (quod quidem fiet, si numerus qui libet nõ quadratus diuidatur in duos numeros inter se primos. a Nam hac ratione & totus ad vtrũque ipsorum primus erit; atque idcirco proportionem ad illes non habebit, quam quadratus ad quadratum, per ea, quę ad finẽ lib. 8. demonstrauimus.) Sumatur alius numerus quicunque I, qui nec ad AB, nec ad AC, habeat proportionem, quam quadratus ad quadratum; qualis est quiuis numerus quadratus. Hic enim ad AB, & AC, nõ quadratos proportionem nõ habebit, quã quadratus ad quadratũ. Exponatur deinde Rationalis aliqua D; & vt I, ad AB, ita fiat quadratũ ex D, ad quadratũ ex EF, per coroll. propos. 6. huius lib. & reliqua fiãt, vt in propos. 51 ostendemusq; vt ibi, rectas D, & EF, esse longitudine incommẽsurabiles, atq; totã EG, ex binis esse nominibus. Dico & sextãesse. Demonstrabimus. n. similiter, vt in 51. propos. D, & FG, longitudine esse incommensurabiles, essęq; quadratum ex EF, maius, quam quadratum ex FG. Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Ostendemus quoque vt in propos. 49. per conuersionem rationis, esse vt AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H. Cum igitur AB, ad CB, atque adeo quadratum ex EF, ad quadratum ex H, proportionem non habeat, quam quadratus numerus ad quadratum; b erunt rectę EF, & H, longitudine incommensurabiles. Itaque cum maius nomen

a 30. sept.



b 9. deci.

nomen EF, plus posit, quam minus F G, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommẽsurabilis, & neutrum ipsorum nominum EF, F G, longitudine sit commensurabile expositæ Rationali D; erit EG, per definitionem, ex binis nominibus sexta. Inuenimus ergo ex binis nominibus sextam. Quod faciendum erat.

LEMMA.

SI recta linea secta sit vtcunque; erit rectangulum sub partibus contentum, medium proportionale inter earum quadrata: Item rectangulum contentum sub tota, & vna parte, mediũ proportionale inter quadratum totius lineę, & quadratum dictæ partis.

SECTA sit recta AB, vtcunq; in C. Describatur ex AB, quadratum A B D E, in quo diameter ducatur B E: Ducta autem ex C, recta CF, ipsi BD, parallela, quę diametrum secet in G, agatur per G, ipsi AB, parallela HI. Erunt igitur per coroll. propos. 4. lib. 2. FH, CI, quadrata partium AC, CB; vtrumq; autem rectangulorum DG, GA, comprehensum sub eisdem partibus: At vero rectangula CD, AI, sub tota AB, & parte CB, contenta. Dico DG, mediũ proportionale esse inter quadrata FH, CI: At CD, mediũ esse proportionale inter quadrata AD, CI. Quoniã. n. [a] *vt HG, ad GI, ita est tam FH, ad DG, quã AG, ad CI; erit vt FH, ad DG, ita AG, ad CI:* [b] *Est autem AG, ipsi DG, æquale. Igitur erit quoque vt FH, ad DG, ita DG, ad CI; Atq; adeo D G, medium proportionale est inter quadrata FH, CI.*

[a] 1. sexti.

[b] 43. prim.

RVR-

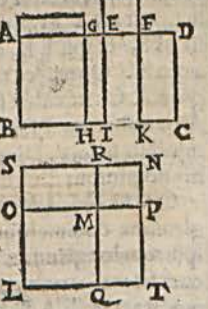
RVRSVS quia est [a] *vt AB, ad CB, ita tam AD, ad CD, quam AI, ad CI; erit vt AD, ad CD, ita AI, ad CI: Est autem A I, ipsi C D, æquale. Igitur erit vt AD, ad C D, ita quoque CD, ad CI. Quare C D, medium proportionale est inter quadrata A D, CI. Eodem modo erit AF, medium proportionale inter quadrata AD, FH.*

[a] 1. sexti.

THEOR. 37. PROPOS. 55. 54. 48.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus prima; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & ex binis nominibus prima AD. Dico rectam lineã, quę potest spatium AC, Irrationalem esse, quæ ex binis nominibus appellatur. Sit. n. ipsius AD, maius nomẽ AE. Erũt igitur ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantũ commensurabiles; & A E, plus poterit, quam ED, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; & deniq; AE, expositæ Rationali AB, longitudine commensurabilis erit. Secetur ED, bifariã in F. Quia igitur AE, plus potest quam ED, quadrato rectæ sibi longitudine commẽsurabilis, si quartæ parti quadrati ex E D, hoc est, quadrato ex EF, æquale parallelogrammũ sub AG, GE, cõtentum, per 2. lemma propos. 17. huius lib. applicetur deficiens figura quadrata; [b] in partes longitudine cõmensurabiles ipsam diuidet. Quare AG, GE, partes inter se



[b] 18. deci.

[a] 14. secun.

ter se longitudine commensurabiles sunt. Ducantur iam per puncta G,E,F, ipsis AB,DC, parallelæ GH,EI,FK.[a] Et parallelogrammo AH, æquale quadratum fiat LM: At parallelogrammo GI, æquale fiat quadratum MN; coniungantur q; quadrata LM,MN, ita ad angulum M, vt latera MO, MP, vnã rectam lineam constituant OP, Facient ergo & latera MQ, MR, vnã rectam QR, vt demonstratum est a nobis ex Proclo ad propos. 15. lib.

[b] 34. prim.

1. propterea quod anguli OMQ, PMR, ad verticem M, sunt æquales, nempe recti. Completo autem rectangulo LN, cum rectæ OM, MP, rectis QM, MR, æquales sint, ideoque & tota OP, toti QR; [b] sit autem OP, ipsis SN, LT; & QR, ipsis LS, TN, æqualis; æquilaterum erit rectangulum LN; ideoque quadratum.

[a] 17. sexti
[d] 1. sexti.

QVONIAM vero rectangulum sub AG, GE, æquale est, per constructionem, quadrato ex EF; [c] erit vt AG, ad EF, ita EF, ad GE; [d] Ac propterea & vt AH, ad EK, ita EK, ad GI. Quare EK, medium proportionale est inter AH, GI, hoc est, inter quadrata LM, MN, illis æqualia: Sed inter eadem quadrata LM, MN, medium proportionale est TM, ex antecedenti lemmate. Aequale igitur est TM, ipsi EK. [e] Cum ergo ipsi TM, æquale sit MS, [f] & ipsi EK, æquale sit FC; erit & MS, ipsi FC, æquale. Quocirca totum quadratum LN, toti rectangulo AC, æquale est; atq; adeo recta OP, potest spatiũ AC, contentum sub AB, Rationali, & AD, ex binis nominibus prima. Dico OP, esse Irrationalem, quæ ex binis nominibus dicitur.

[e] 43. primi
[f] 36. primi

[g] 16. deci.

QVONIAM enim AG, GE, ostensæ sunt longitudine commensurabiles; [g] erit & tota AE, vtriqué ipsarum longitudine commensurabilis: Est autem AE, cum sit maius nomen ipsius AD, ex binis nominibus prima, Rationali AB, commensurabilis longitudine. Igitur & AG, GE, eidem AB, ex scholio propos. 12. huius lib.

lib. longitudine commensurabiles sunt; Atque adeo cum AB, sit Rationalis, erunt & AG, GE, Rationales. [a] Quare rectangula AH, GI, sub Rationalibus longitudine cõmensurabilibus cõtenta Rationalia sunt; Ideoque & quadrata LM, MN, ipsis æqualia, Rationalia erũt; Ac proinde & rectæ OM, MP, Rõnales erũt.

[a] 20. deci.

ET quoniam AE, ipsi ED, longitudine incommensurabilis est; Est autem ipsi AE, longitudine ostensa commensurabilis AG; & ipsi ED, commensurabilis est longitudine EF, eius dimidia; erunt ex scholio propos. 14. huius lib. & AG, EF, inter se longitudine incommensurabiles. Quare & AH, EK, [b] eandem proportionem habentia, quam AG, EF, [c] incommensurabilia sunt, ac proinde & LM, MT, illis æqualia, sunt incommensurabilia. [d] Igitur & rectæ OM, MP, longitudine sunt incommensurabiles, [e] cum eandem habeant proportionem, quam LM, MT: Sunt autem & OM, MP, Rationales ostensæ. Igitur OM, MP, Rationales sunt potentia solum commensurabiles. [f] Quapropter tota OP, potens spatium AC, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus dicitur. Si spatium ergo contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus prima, &c. Quod demonstrandum erat.

[b] 1. sexti
[c] 10. deci.
[d] 10. deci.
[e] 1. sexti.
[f] 37. deci.

THEOR. 38. PROPOS. 56.

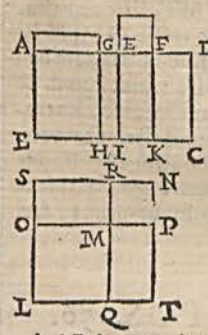
55.
49.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus secunda; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis Medijs prima appellatur.

CONTINEATVR spatiũ AC, sub Rationali AB, & ex binis nominibus secunda AD. Dico rectam lineam, quæ potest spatium AC, Irrationalem esse, quæ ex binis Medijs prima dicitur. Sit. n. ipsius AD, maius nomẽ AE.

Erunt igitur ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantum commensurabiles; & AE, plus poterit quam ED, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commẽsurabilis; Et denique ED, Rationali expositę AB, longitudine cõmensurabilis. Secetur ED, bifariam in F; & reliqua construantur, vt in antecedenti propositione. Quo facto, demonstrabimus similiter, vt ibi, rectam OP, posse spatium AC, contentum sub Rationali AB, & ex binis nominibus secunda AD. Dico iam OP, Irrationalem esse, quæ ex binis Medijs prima vocatur.

QVONIAM enim AE, longitudine incõmensurabilis est ipsi ED; & ED, minus nomen existens ipsius AD, ex binis nominibus secundæ, longitudine commensurabilis est Rationali AB; [a] erunt AE, AB, longitudine incommensurabiles. Et quia AG, GE, ostensæ sunt in antecedenti propositione longitudine cõmensurabiles; [b] erit quoque tota AE, vtrique ipsarum cõmensurabilis. Quare cum AE, maius nomen existens ipsius AD, ex binis nominibus secundæ, linea sit Rationalis; erunt & AG, GE, Rationales: quod cum utraque AG, GE, ipsi AE, sit longitudine commensurabilis; at uero AE, Rationali AB, longitudine incommensurabilis; [c] erit utraque AG, GE, eidem AB, incommensurabilis longitudine. Ac proinde tam AB, AG, quam AB, GE, Rationales sunt potentia solum commensurabiles. [d] Igitur rectangula AH, GI, Media sunt, propterea que & quadrata LM, MN, ipsis æqualia, Media sunt. Ergo & rectæ OM, MP, sunt Mediæ.



QVIA uero AG, GE, longitudine sunt commensurabiles; [e] erunt & AH, GI, eandem cum illis proportionẽ habentia, commensurabilia, atque idcirco & quadrata LM, MN, ipsis æqualia, commensurabilia sunt. Igitur & rectæ OM, MP, commensurabiles sunt, saltem potentia. Et quoniam AE, ED, longitudine incommensurabiles sunt;

[a] 13. deci.
[b] 16. deci.
[c] 14. deci.
[d] 22. deci.
[e] 10. deci.

sunt; Ipsi vero AE, ostensa est longitudine commensurabilis AG; & ipsi ED, longitudine cõmensurabilis est EF, eius dimidia; erunt per scholium propos. 14. huius lib. AG, EF, longitudine incommensurabiles; Ac proinde AH, EK, eandem habentia proportionem cum ipsis, [a] incommensurabilia sunt. Igitur & LM, MT, ipsis AH, & EK, æqualia, incommensurabilia sunt. [b] Ideoq; & rectæ OM, MP, longitudine sunt incommensurabiles. [c] cum eandem habeant proportionem, quã LM, MT. Cum ergo ostensum sit OM, MP, Medias esse, & commensurabiles, erunt OM, MP, Mediæ potentia solum commensurabiles. Quoniam denique ED, minus nomen ipsius AD, ex binis nominibus secundæ, linea est longitudine commensurabilis ipsi AB, hoc est, ipsi EI: Est autem EF, ipsi ED, quoque longitudine commensurabilis; [d] erunt etiam EI, EF, longitudine commensurabiles; Ac propterea cum EI, Rationalis sit, erit & EF, Rationalis. [e] Quare EK, rectangulum, Rationale est: Est autem MT, sub OM, MP, contentum ipsi EK, æquale. Igitur & MT, Rationale est. Quapropter OM, MP, Mediæ sunt potentia tantum cõmensurabiles, Rationaleque continentes; [f] atque adeo OP, Irrationalis est, quæ ex binis Medijs prima appellatur. Si ergo spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus secunda, &c. Quod ostendendum erat.

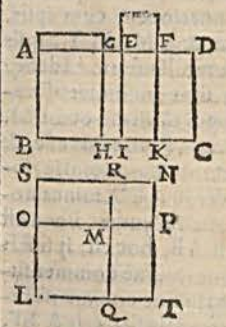
[a] 10. deci.
[b] 10. deci.
[c] 1. sexti.
[d] 12. deci.
[e] 20. deci.
[f] 38. deci.

THEOR. 39. PROPOS. 57. 56. 50.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus tertia; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis Mediis secunda dicitur.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & ex binis nominibus tertia AD. Dico rectam,

quæ potest spatium A C, Irrationalem esse, quæ dicitur ex binis Mediis secunda. Sit.n.ipsius AD, maius nomen A E. Erunt ergo A E, E D, ex defin. Rationales potentia tantum commensurabiles; & A E, plus poterit, quam E D, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; Et denique neutra ipsarum AE, E D, Rationali expositæ A B, longitudine commensurabilis erit. Secta E D, bifariam in F, reliqua omnia fiant, vt in propos. 55. Similiter ergo, vt ibi, ostendemus rectam O P, posse spatium A C: Et vt in antecedenti propos. 56. rectas O M, M P, esse Medias potentia tantum commensurabiles; propterea quod A E, Rationali AB, ponitur longitudine incommensurabilis, quemadmodum & ibi eadem AE, ipsi AB, longitudine erat incommensurabilis. Quoniam vero ED, EF, sunt commensurabiles longitudine; estque E D, ipsi A B, Rationali, hoc est, ipsi EI, longitudine incommensurabilis; [a] erit quoque E F, eidem E I, longitudine incommensurabilis; Sunt autem EF, E I, Rationales, quod E F, dimidia sit ipsius E D, Rationalis; & E I, expositæ Rationali AB, æqualis. Igitur EF, EI, Rationales sunt potentia tantum commensurabiles; [b] Ac propterea E K, Medium est; ideoque & M T, æquale ipsi E K, Medium est, quod sub Mediis O M, M P, continetur. Itaque cum OM, MP, Mediæ sint potentia solum commensurabiles, contineantque spatium *Medium*; [c] erit O P, Irrationalis, quæ ex binis Medijs secunda appellatur. Si igitur spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus tertia, &c. Quod erat demonstrandum.



[a] 14. deci.

[b] 22. deci.

[c] 22. deci.

57.
51.

THEOR. 40. PROPOS. 58.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quarta; Recta linea spatium potẽs Irrationalis est, quæ vocatur Maior.

CONTINEATVR spatium A C, sub Rationali A B, & ex binis nominibus quarta A D. Dico rectam lineam, quę potest spatium AC, esse Irrationalẽ, quæ Maior vocatur. Sit.n. AE, ipsius AD, maius nomen. Erunt ergo ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantum commensurabiles; & A E, plus poterit, quam E D, quadrato rectæ lineæ longitudine sibi incommensurabilis, & denique A E, ipsi A B, commensurabilis erit longitudine. Secta E D, bifariam in F, fiant reliqua omnia, vt in propos. 55. [a] Erunt ergo A G, GE, longitudine incommensurabiles. Demonstrabimus iam eodem modo, vt ibi, O P, posse spatium A C. Dico O P, Irrationalem esse, quæ vocatur Maior. Quoniam.n. A G, G E, longitudine incommensurabiles sunt; [b] erunt & rectangula A H, G I, eandem cum illis habentia proportionem, incommensurabilia; atque adeo & quadrata L *M*, *M*N, ipsis AH, GI, æqualia, incommensurabilia erunt. Quare rectæ O M, *M* P, potentia sunt incommensurabiles. Quia vero A E, maius nomen ipsius A D, ex binis nominibus quartæ, linea est longitudine commensurabilis Rationali A B; erit & A E, Rationalis; [c] & rectangulum A I, sub ipsis contentum, Rationale. Est autem A I, æquale composito ex quadratis L *M*, *M* N: Compositum ergo ex quadratis L *M*, *M* N, Rationale est.

[a] 19. deci.

[b] 10. deci.

[c] 20. deci.

ET quoniam ED, minus nomen ipsius AD, ex binis nominibus quartę, linea est longitudine incommensurabilis Rationali A B, erit & E F, ipsius dimidia eidẽ A B, longitudine incõmensurabilis; Et est EF, Rationalis, cũ sit Rationali ED, commensurabilis. Igitur E F, & A B, Rationales sunt potentia solũ cõmensurabiles. [d] Quare

[d] 22. deci.

EK, Medium est, sub ipsis contentum; ideoq; & MT, illi æquale, contentumq; sub OM, MP, Medium est. Quocirca cum OM, MP, sint potentia incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex ipsarum quadratis LM, MN, Rationale; Rectangulum vero sub ipsis MT, Medium; [a] Irrationalis erit tota OP, quæ Maior nominatur. Si spatium ergo contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quarta, &c. Quod erat ostendendum.

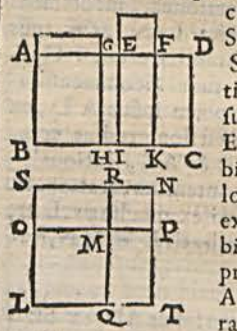
[a] 40. deci.

58.
52.

THEOR. 41. PROPOS. 59.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quinta; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ Rationale & Medium potens appellatur.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & ex binis nominibus quinta AD. Dico rectam lineam, quæ potest spatium AC, esse Irrationalem, quæ dicitur potens Rationale & Medium. Sit.n. ipsius AD, maius nomen AE. Sunt ergo ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantum commensurabiles; & AE, plus potest, quam ED, quadrato rectæ longitudine sibi incommensurabilis; & deniq; ED, longitudine commensurabilis est expositæ Rationali AB. Secta ED, bifariam, fiant reliqua eadem, quæ in



[b] 19. deci.

propos. 55. [b] Erunt igitur rursus AG, GE, longitudine incommensurabiles. Simili autem modo, vt in propos. 55. constabit rectã OP, posse spatiũ AC. Dico OP, Irrationalem esse, quæ potens Rationale & Mediũ appellatur. Erunt enim, vt in propos. antecedenti, rectæ OM, MP, potentia incommensurabiles. Et quia AE, maius nomen ipsius AD, ex binis nominibus quintæ, linea est Rationalis

tionalis & longitudine incõmensurabilis Rationali AB; erũt AE, AB, Rationales potẽtia tantũ cõmensurabiles. [a] Quare rectangulum AI, sub ipsis contentum, Medium est. Est autem AI, æquale composito ex quadratis LM, MN. Igitur & compositum hoc, Medium erit. Rursus quia ED, Rationalis ponitur longitudine commensurabilis Rationali AB, cum sit minus nomẽ ipsius AD, ex binis nominibus quintæ; erit & EF, ipsius dimidia, eidem AB, commensurabilis lõgitudine, & Rationalis. [b] Quare EK, sub Rationalibus EI, EF, lõgitudine commensurabilibus, Rationale est; atque idcirco & MT, sub OM, MP, contentũ Rationale erit, cum ipsi EK, sit æquale. Quamobrẽ cũ rectæ OM, MP, potentia incõmensurabiles sint, faciantque cõpositum quidẽ ex ipsarũ quadratis LM, MN, Medium; Rectangulum vero MT, sub ipsis contentum, Rationale; [c] Irrationalis erit tota OP: quæ dicitur potens Rationale, & Medium. Si igitur spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quinta, &c. Quod erat demostrandum.

[a] 22. deci.

[b] 20. deci.

[c] 41. deci.

THEOR. 42. PROPOS. 60.

59.
53.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus sexta; Recta linea spatiũ potens Irrationalis est, quæ bina Media potens nominatur.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & ex binis nominibus sexta AD. Dico rectam, quę spatium AC, potest, Irrationalem esse, quæ dicitur potẽs bina Media. Sit.n. ipsius AD, maius nomen AE. Sunt ergo AE, ED, ex defin. Rationales potentia tantum commen-

sura-

surabiles;& AE,plus poterit,quam ED, quadrato rectæ sibi longitudine incõmensurabilis;& denique neutra ipsarum AE, ED, longitudine erit commensurabilis Rationali AB,Fiant omnia,quæ in superioribus;[a] eruntque AG,GE,longitudine incommensurabiles.Iã vero ostendemus similiter, vt in propos. 55. rectam OP,posse spatium AC. Item vt in propos.58.rectas O M, MP,potentia esse incommensurabiles. Rursus, vt in antecedenti propos. erit compositum ex quadratis LM,MN,Medium.Vt autẽ in propos.58.erit quoque MT,sub OM,MP,comprehensum,Mediũ. Et quia duarum rectarumAE,EF, illa quidem incommẽsurabilis est longitudine ipsi ED; hæc vero eidem commẽsurabilis;[b] erunt AE, EF, longitudine incommensurabiles.[c] Igitur & AI,EK,incommensurabilia sunt.[d] cum eandem rationem habeant, quam AE, EF. Quare & compositum ex quadratis LM,MN, quod ipsi A I, æquale, est, & rectangulum MT, quod ipsi EK,est æquale, incommensurabilia sunt.Quapropter cum rectæ OM,MP, sint potentia incommensurabiles, faciantque & compositum ex ipsarũ quadratis LM,MN, Medium, & MT,sub ipsis contentum,Medium, incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis;[e] erit tota OP,Irrationalis, quę bina Media potens vocatur. Si ergo spatium contineatur sub Rationali,& ex binis nominibus sexta,&c. Quod ostendendum erat.

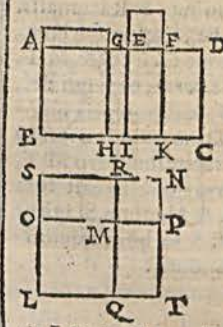
[a] 19. deci.

[b] 13. deci.

[c] 10. deci.

[d] 1. sexti.

[e] 42. deci.



60.

54.

THEOR. 43. PROPOS. 61.

QVADRATVM eius, quæ est ex binis nominibus, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus primam.

SIT

Sit ex binis nominibus A B, cuius maius nomen A C; [a] & ad Rationalem expositam DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, ex binis nominibus esse primam. Applicetur enim ad eandem Rationalem DE, rectangulum DH, æquale quadrato ex AC;& ad HI, aliud IK, æquale quadrato ex CB,Erit igitur reliquum LF, æquale ei, quod bis sub AC, CB, continetur, cum quadrata ex AC,CB, vna cum rectangulo bis sub AC,CB,[b] æqualia sint quadrato ex AB, quemadmodum & eidem quadrato ex AB, æquale est, per cõstructionem rectangulũ DF. Secetur LG, bifariam in M, puncto, per quod ipsis L K, G F, parallela agatur MN; eritque vtrumque rectangulum L N, M F, æquale ei, quod sub AC,CB,continetur.[c] Et quoniam AC, C B, Rationales sunt potentia solum commensurabiles, quod tota AB, sit ex binis nominibus;erũt quadrata ex AC,CB, Rationalia, & ob id commensurabilia; [d] quorum vtriquecum etiam commensurabile sit compositum ex ipsis; erit quoque compositum quadratorum ex A C, C B, Rationale. Est autem huic composito æquale, per constructionem, rectãgulum DK. Igitur & DK, Rationale erit;quod cum applicatum sit ad Rationalem D E,[e] faciet latitudinem D L, Rationalem, & ipsi DE, longitudine commensurabilem.

RVRSVS quia AC,CB, Rationales sunt solum potentia commensurabiles,[f] erit rectangulum sub ipsis, Medium,atq; adeo,& quod bis sub ipsis,cum sit ei commensurabile,hoc est,ipsum LF, Medium erit,per coroll.pro-pos.24.huius lib. Quare LF,applicatum ad L K, Rationalem,[g] facit LG,latitudinem Rationalem,& ipsi L K, hoc est,ipsi DE, longitudine incommensurabilem. Est autem DL, ostensa eidem DE, commensurabilis longitudine. Igitur DL, LG, longitudine incõmensurabiles sunt. Sunt ergo DL, LG, Rationales potentia tantum commẽsurabiles;[i] Ac propterea DG, ex binis nominibus est. Dico & primam esse.

[a] 45. primi

[b] 4. secun.

[c] 37. deci.

[d] 16. deci.

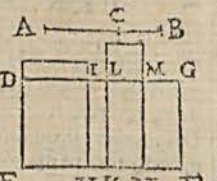
[e] 21. deci.

[f] 22. deci.

[g] 23. deci.

[h] 13. deci.

[i] 37. deci.



QVO-

QVONIAM. n. ex lémate propoſ. 54. huius lib. rectangulum ſub AC, CB, medium proportionale eſt inter quadrata ex AC, CB, erit quoque LN, medium proportionale inter DH, IK, atque adeo [a] cum rectæ DI, LM, IL, eandem rationem habeãt, quam DH, LN, IK; erit quoque recta LM, media proportionalis inter DI, IL. [b] Quare rectangulum ſub DI, IL, æquale eſt quadrato ex LM. Et quia quadrata ex rectis AC, CB, cõmenſurabilia ſunt, quod AC, CB, ponuntur potentia cõmenſurabiles; erunt & DH, IK, ipſis æqualia, commenſurabilia. [c] Igitur & rectæ DI, IL, eandem cum illis habentes rationem, longitudine commenſurabiles ſunt. Quoniam autẽ DK, maius eſt, quam LF, quod & quadrata ex AC, CB, maiora ſint, per lemma propoſ. 39. huius libri, quam rectangulum bis ſub AC, CB; erit & recta DL, maior quã LG, [d] cum DL, LG, eandem rationem habeant, quã DK, LF. Itaque quoniam DL, maior eſt, quam LG, & ad DL, applicatur rectangulum ſub DI, IL, deficiens figura quadrata, æquale quadrato ex LM, hoc eſt, quartæ parti quadrati ex minore LG, deſcripti; (oſtenſum enim eſt rectangulum ſub DI, IL, æquale quadrato ex LM.) diuiditurq; DL, ad I, in partes DI, IL, longitudine commenſurabiles, vt eſt demonſtratum; [e] poterit DL, maior plus quam LG, minor, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quare cum DG, oſtenſa ſit ex binis nominibus, & DL, maius nomen plus poſſe, quam LG, minus nomen, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, atque idem maius nomen DL, longitudine cõmenſurabile Rationali expoſitæ DE; erit ex defin. DG, ex binis nominibus prima. Quadratum ergo eius, quæ eſt ex binis nominibus, &c. Quod oſtendendum erat.

[a] 1. ſexti.
[b] 17. ſexti.
[c] 10. deci.
[d] 1. ſexti.
[e] 18. deci.

61.
55.

THEOR. 44. PROPOS. 62.

QVADRATVM eius, quæ eſt ex binis

binis Medijs prima, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus ſecundam.

SIT ex binis Medijs prima AB, cuius maius nomen AC; [a] & ad Rationalem DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, ex binis nominibus eſſe ſecundã. Cõſtituantur. n. eadem, quæ in propoſ. præcedenti, ita vt rurſus DH, IK, æqualia ſint quadratis ex AC, CB, & vtrumque ipſorum LN, MF, ei quod ſub AC, CB, continetur. Quoniam igitur AC, CB, ex binis Medijs primam AB, componentes [b] Mediæ ſunt potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale continent; erũt quadrata ex AC, CB, atq; adeo rectangula ipſis æqualia DH, IK, commenſurabilia, atque Media. [c] Cum ergo propterea & totum DK, vtrique ipſorum DH, IK, ſit commenſurabile; erit quoque ex coroll. propoſ. 24. huius lib. DK, Medium; quod cum applicatum ſit ad Rationalẽ DE; [d] erit eius latitudo DL, Rationalis ipſi DE, longitudine incommenſurabilis. Rurſus quoniam rectangulum ſub AC, CB, Rationale eſt; erit & eius duplum, nempe LF, Rationale; quod cum applicatum ſit ad Rationalem LK; [e] erit eius latitudo LG, Rationalis ipſi LK, hoc eſt, ipſi DE, longitudine commenſurabilis. Quare cum quadratorum rectarũ DL, LG, ipſa LG, ſit ipſi DE, cõmẽſurabilis longitudine, at DL, longitudine incõmenſurabilis, [f] erũt DL, LG, longitudine incõmenſurabiles. Quod cũ DL, ſtia ſolum cõmẽſurabiles; [g] ac propterea tota DG, ex binis nominibus eſt. Iam vero vt in antecedenti propoſ. demonſtrabimus DL, maius nomen eſſe, & poſſe plus, quam minus LG, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quocirca cum ipſius DG, maius nomen DL, plus poſſit

[a] 45. primi
[b] 38. deci.
[c] 16. deci.
[d] 23. deci.
[e] 21. deci.
[f] 13. deci.
[g] 37. deci.

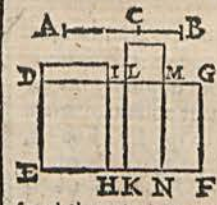
posſit, quam minus nomen LG, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, & minus nomen LG, oſtenſum ſit longitudine commenſurabile Rationali expoſitæ DE; erit ex defin. DG, ex binis nominibus ſecunda. Quadratum ergo eius, quæ eſt ex binis Medijs prima, &c. Quod erat oſtendendum.

62. 56.

THEOR. 45. PROPOS. 63.

QVADRATVM eius, quæ ex binis Medijs ſecũda, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.

SIT ex binis Medijs ſecunda AB, cuius maius nomen AC, [a] & ad Rationalem DE, applicetur rectangulũ DF, æquale quadrato ex AB, latitudinẽ faciẽs DG. Dico DG, eſſe ex binis nominibus tertiã. Cõſtructis. n. ijſdẽ, quæ in propoſ. 61. qm̃ AC, CB, ex binis Medijs ſecundã AB, componentes, [b] Mediæ ſunt potentia ſolum commenſurabiles, quæ Medium continent; Erũt quadrata ex AC, CB, atque adeo rectãgula ipſis æqualia D H, IK, commenſurabilia, & Media. [c] Cum ergo propterea & totum DK, vtrique ipſorum D H, IK, ſit commenſurabile; erit & ex coroll. propoſ. 24. huius libri D K, Medium; quod cum applicatum ſit ad Rationalem DE; [d] erit eius latitudo D L, Rationalis ipſi DE, longitudine incõmenſurabilis. Rurſus quia rectangulum ſub AC, CB, Medium eſt; erit & eius duplum L F, Medium; quod cum applicatum ſit ad Rationalem LK; [e] erit latitudo LG, Rationalis ipſi LK, hoc eſt, ipſi DE longitudine incommenſurabilis. Et quia A C, ipſi C B, longitudine eſt incommenſurabilis; eſtq; vt AC, ad C B, ita per lemma 3. propoſ. 19. huius libri, quadratum ex A C, ad rectangulum ſub AC, CB, [a] erit quoque quadratum ex AC, rectangulo ſub AC, CB, incommenſurabile. [b] Eſt autem quadrato ex AC, commenſurabile compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, quod quadrata ex AC, CB, commenſurabilia ſint, quippe cum rectę ipſę potentia ponantur commenſurabiles; & rectangulo ſub AC, CB, commenſurabile eſt eius duplum, nimirum rectangulum bis ſub AC, CB. Igitur compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, hoc eſt, rectangulum DK, incommenſurabile eſt rectangulo bis ſub AC, CB, hoc eſt, rectangulo L F, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. huius libri conſcripſimus. Quare rectæ DL, LG, eandem rationem cum D K, L F, habentes [c] longitudine ſunt incommenſurabiles: Sunt autem oſtenſæ & Rationales. Rationales ergo ſunt potentia tantum commenſurabiles; [d] ac propterea tota D G, ex binis nominibus eſt. Iam vero vt in propoſ. 61. oſtendemus DL, eſſe maius nomen, poſſeq; plus, quam minus LG, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quamobrem cum D L, maius nomen plus poſsit, quam LG, minus, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, & neutra ipſarum D L, LG, Rationali expoſitæ DE, ſit oſtenſa longitudine cõmenſurabilis; erit ex defin. DG, ex binis nominibus tertia. Quadratũ ergo eius, quę ex binis Medijs ſecũda, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus tertiam. Quod erat demonſtrandum.



a 45. primi
b 39. deci.
c 16. deci.
d 23. deci.
e 23. deci.

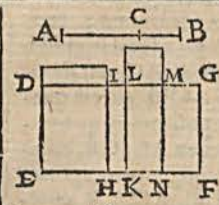
63. 57.

THEOR. 46. PROPOS. 64.

QVADRATVM Maioris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quartam.

SIT

a 10. deci.
b 16. deci.
c 10. deci.
d 37. deci.



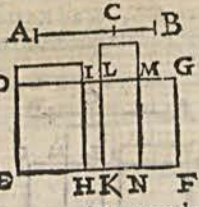
SIT Maior AB, cuius maius nomen AC, [a] & ad Rationalem DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, ex binis nominibus esse quartam. Constituantur enim eadem prorsus, quæ in propos. 61. Et quia AC, CB, Maiorem AB, componentes, [b] potentia incommensurabiles sunt, faciuntque compositum quidem ex quadratis rectarum AC, CB, Rationale, rectangulum vero sub ipsis, Medium; erit quoque DK, composito ex quadratis rectarum AC, CB, æquale existens, Rationale; At vero LF, dupli eius, quod sub AC, CB, continetur, Medium. Quoniam igitur rationale DK, ad Rationalem DE, est applicatum, [c] erit DL, Rationalis ipsi DE, longitudine commensurabilis. Item cum LF, Medium sit applicatum ad Rationalem LK; erit LG, Rationalis ipsi LK, hoc est, ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Quare cum duarum rectarum DL, LG, illa quidem ipsi DE, commensurabilis sit longitudine; hæc vero eidē DE, longitudine incommensurabilis; [c] incommensurabiles erunt longitudine DL, LG: Ostensæ sunt autem & Rationales. Sunt igitur DL, LG, Rationales potentia tantum cōmensurabiles; [f] ideoque DG, ex binis nominibus est. Iam vero vt in propos. 61. demonstrabimus rectangulum sub DI, IL, æquale esse quadrato ex LM. Quia autem quadrata ex AC, CB, incommensurabilia sunt, quod rectæ AC, CB, potentia incōmensurabiles sint; Erunt etiam illis æqualia DH, IK, incommensurabilia; [g] atque adeo & rectæ DI, IL, eandem cum illis habentes proportionem, longitudine incommensurabiles. Quoniam vero vt in propos. 61. ostendimus, DL, maior est, quam LG, & ad DL, applicatum est rectangulum sub DI, IL, quadrato ex LM, hoc est, quartæ parti quadrati ex LG, æquale, deficiens figura quadrata, quod diuidit ipsam DL, ad I, in partes [h] longitudine incommensurabiles; [a] poterit DL, plus quā LG, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quam ob rem cum & ipsa DL, (maius nomen ipsius DG, quæ est ex binis nominibus,) ostensa sit longitudine commensurabilis expositæ Rationali DE; erit ex defi. DG, ex binis nominibus quarta. Quadratum ergo maioris ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat demonstrandum.

a 45. prim.
b 40. deci.
c 21. deci.
d 23. deci.
e 13. deci.
f 37. deci.
g 10. deci.
h 19. deci.

THEOR. 47. PROPOS. 65. 64. 58.

QVADRATVM eius, quę Rationale ac Medium potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quintam.

SIT recta potens Rationale ac Medium AB, cuius maius nomen AC; [a] & ad Rationalem DE, rectangulum DF, applicetur æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, ex binis nominibus quintam esse. Fiant enim eadē omnino, quæ in propos. 61. Quoniam igitur rectæ AC, CB, componentes AB, potentem Rationale ac medium [b] potentia incommensurabiles sunt, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis Medium, at rectā gulum sub ipsis contentum, Rationale; erit DK, æquale composito ex quadratis rectarum AC, CB, Medium; & LN, æquale ei, quod sub AC, CB, continetur, atque adeo ipsius duplum LF, Rationale. Igitur Medium DK, applicatum ad Rationalem DE, [c] facit latitudinem DL, Rationalem, & longitudine Rationali DE, incommensurabilem: At vero Rationale LF, ad Rationalem LK, applicatum, [d] facit latitudinem LG, Rationalem longitudine ipsi LK, hoc est, ipsi DE, commensurabilem. Quia igitur duarum rectarum DL, LG, hæc quidem longitudine commensurabilis est Rationali DE, illa vero longitudine incommensurabilis;



a 45. primę
b 41. deci.
c 23. deci.
d 21. deci.

[a] erunt DL, LG, lõgitudine incommensurabiles. Quare DL, LG, Rationales sunt potẽtia solũ cõmensurabiles; [b] Ac propterea DG, est ex binis nominibus. Iã vero, vt in propos. 61. ostendemus rectangulũ sub DI, IL, æquale esse quadrato ex LM; & vt in antecedente propos. DL, maius nomen esse, atque posse plus, quam LG, quadrato rectę sibi longitudine incommensurabilis. Quapropter cũ & minus nomẽ LG, ostẽsum sit expositæ Rationali DL, longitudine commensurabile; erit ex defin. DG, ex binis nominibus quinta. Quadratum igitur eius, quæ Rationale ac *Medium* potest, &c. Quod demonstrandum erat.

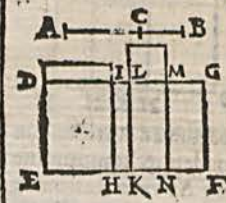
a 13. deci.
b 37. deci.

65. 59.

THEOR. 48. PROPOS. 66.

QVADRATVM eius, quæ bina Media potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus sextam.

SIT bina *Media* potens recta AB, cuius maius nomen AC, [c] & ad Rationalẽ DE, applicetur rectãgulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, esse ex binis nominibus sextã. Constructis.n. iisdem, quæ in propos. 61. quoniã rectę AC, CB, componentes ipsam AB, potentẽ bina *Media*, [d] potentia incommensurabiles sunt, faciuntq; & cõpositum ex ipsarum quadratis *Medium*, & quod sub ipsis cõtinetur, *Medium*, & incommensurabile composito ex quadratis ipsarum; erit tam DK, illi composito æquale, quam LF, rectangulo bis sub AC, CB, æquale, *Mediũ*. Et quia *Media* DK, LF, applicata sunt ad Rationalem DE; [e] erũt eorum latitudines DL, LG, Rationales ipsi DE, longitudine incommensurabiles.



c 45. primi
d 42. deci.
e 23. deci.

Quoniam vero compositũ ex quadratis rectarum AC, CB, incommensurabile est rectangulo sub AC, CB; eidem vero rectangulo sub AC, CB, commensurabile est rectangulum bis sub AC, CB, cum hoc illius sit duplum; [b] Erit compositum ex dictis quadratis, hoc est, DK, incommensurabile rectangulo bis sub AC, CB, hoc est, ipsi LF; Ac propterea rectæ DL, LG, eandem rationem habentes cum DK, LF, [c] longitudine incommensurabiles sunt. Rationales ergo sunt DL, LG, potentia solum commensurabiles; [d] Ac proinde DG, est ex binis nominibus. Iam vero, vt in præcedenti propos. demonstrabimus DL, esse maius nomen; possęq; plus quam LG, quadrato rectæ sibi longitudine incommẽsurabilis. Cũ ergo ostensum sit neutram ipsarum DL, LG, longitudine commensurabilem esse expositæ Rationali DE; erit ex defin. DG, ex binis nominibus sexta. Quadratum igitur eius, quæ bina Media potest ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus sextam. Quod erat ostendendum.

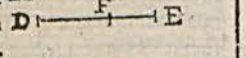
a 42. deci.
b 13. deci.
c 10. deci.
d 37. deci.

THEOR. 49. PROPOS. 67.

66. 60.

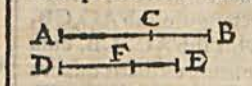
EI, quæ est ex binis nominibus, lõgitudine commensurabilis, & ipsa ex binis nominibus est, atque ordine eadem.

SIT ex binis nominibus quæcunq; AB, diuisa in sua nomina, quorum maius AC, & CB, minus, sitque recta DE, ipsi AB, longitudine commensurabilis. Dico DE, quoq; esse ex binis nominibus, & ordine eandẽ ipsi AB. [e] Fiat.n. vt tota AB, ad totã DE, ita ablata AC, ad ablatã DF. [f] Erit ergo & reliqua CB, ad reliquam FE, vt tota AB, ad totam DE. Et quoniã ipsi AB, longitudine cõmensurabilis ponitur DE; erit & DF, ipsi AC, & FE, ipsi CB, lõgitudine commensu-



e 12. sexti.
f 19. quin.
g 10. deci.

mensura bilis : [a] Sunt autem A C, CB, cum sint nomina eius, quæ ex binis nominibus, Rationales. Igitur & DF, FE, Rationales sunt. Rursus quia est vt A C, ad DF, ita CB, ad FE; & permutando vt A C, ad CB, ita DF, ad FE: Sunt autem AC, CB, potentia solum commensurabiles; [b] erunt & DF, FE, potentia solum commensurabiles. Igitur DF, FE, Rationales sunt potentia tantum commensurabiles; [c] Ac propterea DE, ex binis est nominibus. Dico & ipsi AB, ordine eandem esse. Aut enim AC, plus potest quam CB, quadrato rectæ lineę sibi longitudine commensurabilis, aut incōmensurabilis. Si quidē AC, plus potest quam CB, quadrato rectæ sibi longitudine cōmensurabilis; [d] poterit & DF, plus quā FE, quadrato rectæ sibi longitudine cōmensurabilis. Quod si AC, cōmensurabilis sit longitudine Rationali expositæ, ita vt AB, sit ex binis nominibus prima; [e] erit & DF, eidē Rationali lōgitudine commensurabilis, cum vtraque, & Rationalis, & DF, eidem AC, sit commēsurabilis longitudine. Quare & DE, ex defin. est ex binis nominibus prima, hoc est, ordine eadem. Si vero CB, expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis, vt AB, sit ex binis nominibus secunda; erit eodem modo & FE, Rationali expositę longitudine commensurabilis. Quare & DE, ex defin. est ex binis nominibus secunda. Si denique neutra ipsarum A C, CB, longitudine sit commensurabilis expositæ Rationali, ita vt AB, sit ex binis nominibus tertia; [f] erit & neutra ipsarum DF, FE, longitudine commensurabilis expositæ Rationali. Quare & DE, ex defin. est ex binis nominibus tertia.



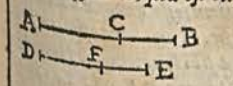
A T si AC, plus possit, quam CB, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; [g] poterit & DF, plus quam FE, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quare vt prius, ostendemus DE, ex binis nominibus quartam esse vel quintam, vel sextam, prout & AB, fuerit ex binis nominibus quarta, vel quinta, vel sexta. Ei igitur, quę ex binis nominibus, longitudine commensurabilis, &c. Quod erat ostendendum.

SCHO-

[a] 37. deci.
[b] 10. deci.
[c] 37. deci.
[d] 15. deci.
[e] 12. deci.
[f] 12. deci.
[g] 15. deci.

SCHOLIVM.

QVOD si recta DE, potentia tantum commensurabilis sit ipsi AB, qua est ex binis nominibus, ostendemus quidem eodem modo, (si loco: Commensurabilis longitudine: in demonstratione reponamus vbique: commensurabilis potentia tantum:) & DE, esse ex binis nominibus: At eam esse ordine eandem ipsi AB, cui commensurabilis est, nullo modo concludemus. Non enim sequitur, si AC, maius nomen longitudine sit commensurabile expositæ Rationali; & DF, maius nomē eidem esse commensurabile longitudine; propterea quod non vtraque, nempe expositæ Rationalis, & DF, eidem A C, longitudine cōmensurabilis est, sed Rationalis quidem commensurabilis longitudine; At vero DF, potentia tantum, ex hypothesi. Immo vero, si AB, sit ex binis nominibus prima, secunda, quarta, vel quinta, fieri nulla ratione potest, vt DE, illi potentia tantū cōmensurabilis sit ex binis nominibus ordine eadem.



SIT enim AB, ex binis nominibus prima, secunda, quarta, vel quinta, diuisa in sua nomina ad C; sitque ei cōmensurabilis potentia tantum DE, quam quidem, vt in theorema te, demonstrabimus esse ex binis nominibus, diuisamque esse in sua nomina ad F; & partes AC, CB, partibus DF, FE proportionales esse, nimirum illas ad has eandem habere rationem, quam tota AB, ad totam DE. Dico nullo modo fieri posse, vt DE, ex binis nominibus sit eadem ordine ipsi AB. Nam si potest fieri, sit vtraque ex binis nominibus prima. Erit ergo vtrumque maius nomen AC, DF, ex defin. Rationali expositæ commensurabilis longitudine. [a] Quare & inter se longitudine commensurabiles erunt. Et quoniam est vt AC, ad DF, ita AB, ad DE; [b] erunt propterea & AB, DE, longitudine commensurabiles. Quod est absurdum. Ponitur enim DE, ipsi AB, potentia solum commensurabilis. Non ergo vtraque AB, DE, ex binis nominibus prima est. Eo de modo neq; vtraq; ex binis nominibus quarta erit. Sed neq; secūda vel quinta. Esset. n. vtrūq; nomen minus CB, FE, ex

[a] 12. deci.
[b] 10. deci.

defin. longitudine commensurabile Rationali expositæ, atque adeo & inter se. Igitur & totæ AB, DE, longitudine forent commensurabiles. quod non ponitur.

SEMPER tamen verum est, si AB, est ex binis nominibus prima, vel secunda, vel tertia, rectam DE, ipsi AB, potentia solum commensurabilem, esse quoque vnam ex illis tribus, licet ordine non eadem sit. Nam hoc posito, potentia AC, plus quam CB, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Cum ergo sit, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE; [a] *poterit quoque DF, plus quam FE, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quare ex defin. erit DE, ex binis nominibus prima, vel secunda, vel tertia. Eodem modo si AB, est ex binis nominibus quarta, vel quinta, vel sexta, ita vt AC, plus possit, quam CB, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis;* [b] *poterit quoque DF, plus quam FE, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, cum sit, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Igitur ex defin. erit DE, ex binis nominibus etiam quarta, vel quinta, vel sexta, licet non eadem ordine ipsi AB.*

IN sequentibus autem quatuor propositionibus necessario erit DE, eadem ordine ipsi AB, quanquam potentia tantum illi commensurabilis sit.

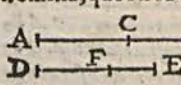
[a] 15. deci.

[b] 15. deci.

67. 61. THEOR. 50. PROPOS. 68.

EI, quæ est ex binis Mediis, longitudine commensurabilis, & ipsa ex binis Mediis est, atque ordine eadem.

SIT ex binis Mediis AB, quæcunque diuisa in sua nomina, quorũ AC, maius, & CB, minus, sitque ei recta DE, lõgitudine commẽsurabilis. Dico DE, quoq; ex binis Mediis esse, & ipsi AB, ordine eandem.



[a] Fiat. n. vt tota AB, ad totã DE, ita ablata AC, ad ablatã DF. [d] Erit ergo & reliqua CB, ad reliquam FE, vt tota AB, ad totam DE. Et quoniam ipsi

[a] 12. sexti.

[d] 19. quin.

ipsi AB, ponitur longitudine commensurabilis DE; [e] erit & DF, ipsi AC, & FE, ipsi CB, longitudine commensurabilis. Sunt autem AC, CB, Mediæ. [b] Igitur & DE, FE, illis commensurabiles, Mediæ sunt. Rursus quia est vt AC, ad DF, ita CB, ad FE; & permutãdo vt AC, ad CB, ita DF, ad FE: [c] Sunt autem AC, CB, potentia solum cõmensurabiles; [d] erunt & DF, FE, solum commensurabiles potentia. Cũ ergo & ostensæ sint Mediæ, erunt DF, FE, Mediæ potentia tantum commensurabiles; [e] Atque idcirco DE, erit ex binis mediis. Dico & ipsi AB, eandẽ esse ordine. Quoniam. n. est vt AC, ad CB, ita DF, ad FE: Est autem vt AC, ad CB, ita quadratũ ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, & vt DF, ad FE, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, FE, ex lemmate 3. propos. 19. huius libri; erit quoque vt quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, ita quadratũ ex DF, ad rectangulum sub DF, FE; & permutando vt quadratum ex AC ad quadratum ex DF, ita rectangulum sub AC, CB, ad rectangulum sub DF, FE. Commensurabile est autem quadratũ ex AC, quadrato ex DF; quod rectæ AC, DF, commensurabiles ostensæ sint longitudine. [f] Igitur & rectangulum sub AC, CB, rectangulo sub DF, FE, commensurabile est. Quare si rectangulum sub AC, CB, fuerit Rationale, ita vt AB, sit ex binis Mediis prima; erit & rectangulum sub DF, FE, Rationale, cum illi sit commensurabile; [g] atque adeo & DE, ex binis Mediis prima erit. Si vero rectangulum sub AC, CB, fuerit Mediũ, ita vt AB, sit ex binis Mediis secunda: erit & rectangulum sub DF, FE, ei commensurabile, Medium, ex corollario 23. propos. 24. huius lib. [h] Ac propterea & DE, erit ex binis Mediis secunda. Quare ei, quæ ex binis Mediis longitudine cõmensurabilis, &c. Quod demonstrandũ erat.

[e] 10. deci.

[b] 24. deci.

[c] 38. deci.

[d] 10. deci.

[e] 38. vel 39. deci.

[f] 10. deci.

[g] 38. deci.

[h] 39. deci.

SCHOLIVM.

EO'DEM prorsus modo demonstrabimus, rectam lineam DE, si potentia tantum fuerit commensurabilis ipsi AE, quæ est ex binis Mediis, ex binis Mediis esse, atque ordine eandem ipsi AB, cui commensurabilis

est; si modo loco: commensurabilis longitudine: in demonstratione dicamus vbique: commensurabilis potentia tantũ, &c. vt manifestum est.

68. 62.

THEOR. 51. PROPOS. 69.

MAIORI commensurabilis, & ipsa Maior est.

SIT linea Maior AB, diuisa in sua nomina ad C, eique commensurabilis sit DE, siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & DE, Maiorem esse. Fiant enim eadem, quæ superius; ita vt partes AC, CB, ad partes DF, FE, eandem habeant rationem, quam tota AB, ad totam DE. Quoniam igitur AB, DE, commensurabiles sunt vel longitudine & potentia, vel potentia tantum; erunt quoque tam AC, DF, quam CB, FE, eodem modo commensurabiles. Rursus quia est vt AC, ad DF, ita CB, ad FE, & permutando vt AC, ad CB, ita DF, ad FE; erit vt quadratum ex AC, ad quadratum ex CB, ita quadratum ex DF, ad quadratum ex FE; & componendo vt compositum ex quadratis rectarum AC, CB, ad quadratum ex CB, ita compositum ex quadratis rectarum DF, FE, ad quadratum ex FE; Et conuertendo, vt quadratum ex CB, ad compositum ex quadratis rectarum AC, CB, ita quadratum ex FE, ad compositum ex quadratis rectarum DF, FE; Et permutando vt quadratum ex CB, ad quadratum ex FE, ita compositum ex quadratis rectarum AC, CB, ad compositum ex quadratis rectarum DF, FE. Commensurabile est autem quadratum ex CB, quadrato ex FE, quod rectæ CB, FE, ostensæ sint commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum. Igitur & compositũ ex quadratis rectarũ AC, CB, cõmẽsurabile est cõposito ex quadratis rectarum DF, FE, Est autem compositum illud Rationale,

a 10. deci.
b 22. sexti
c 10. deci.
d 40. deci.

nale, cum rectæ AC, CB, componant Maiorem AB. Igitur & hoc Rationale est.

RVRSVS quia est vt AC, ad CB, ita DF, ad FE; Vt autem AC, ad CB, ita est quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, & vt DF, ad FE, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, FE, ex lemmate 3. propos. 19. huius libri; Erit quoque vt quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, FE: Et permutãdo vt quadratum ex AC, ad quadratum ex DF, ita rectangulum sub AC, CB, ad rectangulum sub DF, FE. Est autem quadratum ex AC, quadrato ex DF, commensurabile, quod rectæ AC, DF, ostensæ sint commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum. Igitur & rectangulũ sub AC, CB, rectangulo sub DF, FE, commensurabile est. Est autem rectangulum sub AC, CB, Medium. Igitur & rectangulum sub DF, FE, illi commẽsurabile, Medium est, ex coroll. propos. 24. huius libri. Quoniam vero est vt AC, ad CB, ita DF, ad FE; sunt quæ AC, CB, potentia incommensurabiles, cum componãt Maiorẽ AB; Erũt quoque DF, FE, potentia incommensurabiles. Itaq; cum DF, FE, sint potentia incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium, vt ostensum est; erit tota DE, Maior. Maiori ergo commensurabilis, & ipsa Maior est. Quod demonstrandum erat.

a 9. defin.
b 10. deci.
c 40. deci.
d 40. deci.
e 10. deci.
f 40. deci.

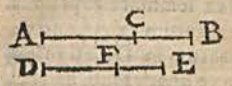
THEOR. 52. PROPOS. 70.

69. 63.

RATIONALE ac Medium potenti commensurabilis, & ipsa Rationale ac Medium potens est.

SIT recta AB, potens Rationale ac Medium, diuisa in sua nomina ad C, eique commensurabilis DE, siue lõgitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & DE, esse potentẽ Rationale ac Medium. Cõstructis enim ijsdem, quæ

quæ ſupra, oſtendemus, vt in præcedenti propoſ. compoſitum ex quadratis rectarum A C, CB, commenſurabile
[a] 41. deci. eſſe compoſito ex quadratis rectarum DF, FE. [a] Eſt autẽ illud compoſitum Medium, cum rectę AC, CB, componant ipſam AB, potentem Rationale ac Medium. Igitur



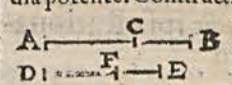
per coroll. propoſ. 24. huius lib. & hoc compoſitum illi commenſurabile, Medium eſt. Eodem modo, vt in eadem propoſ. antecedenti, erit rectangulum ſub A C, C B,
[b] 41. deci. [b] quod Rationale eſt, commenſurabile rectangulo ſub DF, FE; atque adeo & rectangulum ſub D F, F E, Rationale eſt, ex 9. defin. Denique vt in eadem ſuperiori propoſ. erunt DF, FE, potentia incommenſurabiles. Quare cum D F, FE, ſint potentia incommenſurabiles, faciantque compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationale, vt demonſtratum eſt;
[c] 41. deci. [c] erit tota D E, Rationale ac Medium potens. Igitur Rationale ac Medium potenti commenſurabilis, &c. Quod erat demonſtrandum.

70. 64.

THEOR. 53. PROPOS. 71.

BINA Media potenti commenſurabilis, & ipſa bina Media potens eſt.

SIT bina Media potens A B, diuiſa in ſua nomina ad C, eique commenſurabilis DE, ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantum. Dico & D E, eſſe bina Media potentẽ. Conſtructis. n. ijſdem, quę ſupra, oſtẽdemus,



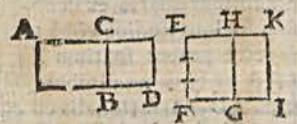
vt in propos. 69. compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, cõpoſito ex quadratis rectarũ D F, FE, commenſurabile eſſe: Nec nõ & rectangulum ſub AC, CB, eſſe commenſurabile rectan-
[d] 42. deci. gulo ſub DF, FE. [d] Cum ergo tam compoſitum ex quadratis rectarum A C, C B, quam rectangulum ſub A C, CB, Medium ſit; erit etiam ex coroll. propoſ. 24. huius libri, tam compoſitũ ex quadratis rectarum DF, FE, quàm rectangulum ſub DF, FE, Medium. Sed & DF, FE, potentia incommenſurabiles ſunt, vt prius. Poſtremo, quia
[a] 42. deci. compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, & rectangulum ſub AC, CB, incommenſurabilia ſunt, ex hypotheſi, propterea quod AB, bina Media poteſt: Eſt autem compoſito ex quadratis rectarum AC, CB, commenſurabile oſtenſum compoſitũ ex quadratis rectarũ D F, FE; & rectãgulo ſub AC, CB, probauimus cõmenſurabile rectãgulum ſub DF, FE; Erunt quoq; ex ſcholio propoſ. 14. huius lib. compoſitũ ex quadratis rectarũ DF, FE, & rectangulum ſub DF, FE, incommenſurabilia. Quare cum rectæ DF, FE, potentia ſint incommenſurabiles, faciantq; compoſitum ex ipſarum quadratis Medium; & quod ſub ipſis continetur, Medium; incommenſurabileque compoſito ex quadratis ipſarum;
[b] 42. deci. [b] erit DE, bina Media potens. Itaque bina Media potenti commenſurabilis, & ipſa bina Media potens eſt. Quod erat oſtendendum.

THEOR. 54. PROPOS. 72.

71. 65.

SI Rationale & Medium componantur, quatuor Irrationales fiunt; vel ea, quæ ex binis nominibus, vel quæ ex binis Medijs prima, vel Maior, vel Rationale ac Medium potens.

SIT Rationale ſpatium A B, cum quo componatur Medium CD. Dico rectam, quæ totum ſpatium AD, poteſt, eſſe vel ex binis nominibus, vel ex binis Medijs primam, vel Maiorem, vel Rationale ac Medium potẽtem. Erit enim A B, vel maius quam C D, vel minus: Aequale ſiquidem non erit; alias cum A B, ſit Rationale, eſſet & illi æquale C D, Rationale, quod non ponitur. Sit primo



maius,

maius, & exposita Rationali EF, [a] applicetur ad eam rectangulũ EG, æquale ipsi AB; & ad HG, aliud HI, æquale ipsi CD, vt totum EI, toti AD, sit æquale. Et quoniã AB, Rationale est, & CD, Medium; erit quoque EG, Rationale, & HI, Medium: quæ cum applicentur ad Rationalem EF; [b] erit EH, Rationalis, & ipsi EF, longitudine commensurabilis; [c] At vero HK, Rationalis, & eidem EF, longitudine incommẽsurabilis. Rursus qa EG, HI, incommensurabilia sunt, vt constat ex definitionibus; quod EG, Rationale sit, at HI, Irrationale, nempe Medium; [d] erunt EH, HK, eandem cum illis habentes rationem, incommensurabiles longitudine. Rationales ergo sunt EH, HK, potentia solum commensurabiles; [e] Ac propterea EK, ex binis nominibus est. Et quoniam maius ponitur AB, quam CD, hoc est, EG, quam HI; erit quoq; EH, maior quã HK, [f] cum EH, HK, eandẽ rationem habeant, quã EG, HI. Iam vero maius nomen EH, plus poterit quam minus HK, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus possit EH, quam HK, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine; erit EK, ex defin. ex binis nominibus prima, cum EH, maius nomen ostensum sit longitudine commensurabile Rationali EF. Quare recta potens spatium EI, contentum sub Rationali EF, & ex binis nominibus prima EK, atque adeo & spatium AD, compositum ex Rationali AB, & Medio CD, [g] Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur.

SI uero EH, plus possit quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; erit EA, ex binis nominibus quarta, ex defin. cum EH, maius nomen ostẽsum sit longitudine cõmensurabile Rationali EF. Quare recta potens spatium EI, contentum sub Rationali EF, & ex binis nominibus quarta EK, atque adeo & spatium AD, [h] Irrationalis est, quæ vocatur *Maior*.

SIT deinde AB, minus quam CD; & eadem construantur, quæ prius. Erit ergo, vt prius, EK, ex binis nominibus,

[a] 45. primi

[b] 21. deci.

[c] 23. deci.

[d] 10. deci.

[e] 37. deci.

[f] 1. sexti.

[g] 55. deci.

[h] 58. deci.

minibus, & EH, ipsi EF, longitudine commensurabilis. Et quia AB, minus est, quam CD, hoc est, EG, quã HI; erit quoq; recta EH, minor quam HK. Poterit igitur rursus HK, maius nomen ipsius EK, quę est ex binis nominibus, plus quam EH, minus nomen, quadrato rectę longitudine sibi commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus possit HK, quam EH, quadrato rectæ longitudine sibi commensurabilis; erit EK, ex binis nominibus secunda, cum EH, minus nomen commensurabile sit longitudine Rationali EF, vt ostensum est. Quare recta potens spatium EI, contentum sub Rationali EF, & ex binis nominibus secunda EK, atque adeo & spatium AD, ex Rationali AB, & Medio CD, compositum, [a] Irrationalis est, quæ dicitur ex binis Medijs prima. [a] 56. deci.

SI vero HK, plus possit quam EH, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis; erit EK, ex binis nominibus quinta, cum EH, minus nomen ostensum sit longitudine commensurabile Rationali EF. Quare recta potens spatium EI, contentum sub Rationali EF, & ex binis nominibus quinta EK, atque adeo & spatium AD, [b] Irrationalis est, quæ Rationale & Medium potens appellatur. Si igitur Rationale, & Medium componantur, quatuor Irrationales fiunt, &c. Quod demonstrandum erat. [b] 59. deci.

72.
66.

THEOR. 55. PROPOS. 73.

SI duo Media inter se incommensurabilia cõponatur, duæ reliquæ Irrationales fiunt, vel ex binis Medijs secunda, vel bina Media potens.

COMPONANTVR duo Media incommensurabilia AB, CD. Dico rectam, quæ potest totum spatium AD, esse vel ex binis Mediis secundam, vel bina Media po-

potẽtem. Erit enim rursus AB, vel maius, quam CD, vel minus: Aequale siquidem non erit; alias essent AB, CD, commensurabilia. quod non ponitur. Sit primo maius, & omnia fiant, quæ in præcedenti propositione. Et quia spatia AB, CD, ponuntur Media, & incommensurabilia; erunt & spatia EG, HI, Media & incommensurabilia; cum illis sint æqualia. [a] Igitur rectæ EH, HK, eandẽ cum illis habentes rationem, longitudine incommensurabiles sunt; & vtraque (cum EG, HI, Media sint, applicentur; ad Rationalem EF,) [b] Rationalis est, ipsi EF, longitudine incommensurabilis. Rationales ergo sunt EH, HK, potentia solum commensurabiles; [c] ac propterea EK, ex binis nominibus est. Quoniam vero AB, maius ponitur quam CD; erit vt in antecedenti propos. EH, maius nomen ipsius EK. Poterit ergo plus quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus possit EH, quam HK, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine, cum vtrumque nomen EH, HK, ostensum sit longitudine incommensurabile Rationali EF; erit EK, ex defin. ex binis nominibus tertia. Quare recta potens spatium EI, contentum sub Rationali EF, & ex binis nominibus tertia EK, atque adeo & spatium AD, [d] Irrationalis est, quæ ex binis Mediis secunda dicitur.

SI vero EH, plus possit quam HK, quadrato rectæ longitudine sibi incommensurabilis, cum vtrumque nomen EH, HK, longitudine sit incommensurabile Rationali EF; erit EK, ex binis nominibus sexta, vt constat ex defin. Recta igitur potens spatium EI, siue spatium AD, [e] Irrationalis est, quæ bina Media potens nominatur.

QVOD si AB, minus sit, quam CD; non aliter propositum concludemus, vt ex figura constat. Quapropter si duo Media inter se incommensurabilia componantur, duæ reliquæ Irrationales fiunt, &c. Quod ostendendum erat.

COROL-

[a] 10. deci.
[b] 23. deci.
[c] 37. deci.
[d] 57. deci.
[e] 60. deci.

COROLLARIVM.

EX his omnibus facile colligitur, eam, quæ ex binis nominibus, & reliquas ipsam subsequentes Irrationales lineas, neque Mediæ, neq; inter se easdẽ esse.

NAM quadratum Mediæ, ad Rationalem lineam applicatum, [a] latitudinem efficit Rationalem, ipsi Rationali longitudine incommensurabilem. [a] 23. deci.

AT quadratum eius, quæ ex binis nominibus, ad Rationalem applicatum, [b] latitudinem efficit ex binis nominibus primam. [b] 61. deci.

ET quadratum eius, quæ, est ex binis Mediis prima, ad Rationalem applicatum, [c] latitudinem facit ex binis nominibus secundam. [c] 62. deci.

QVADRATVM deinde eius, quæ ex binis Mediis secunda, ad Rationalem applicatum, [d] latitudinem facit ex binis nominibus tertiam. [d] 63. deci.

AT vero quadratum Maioris ad Rationalem applicatum, [e] latitudinem facit ex binis nominibus quartam. [e] 64. deci.

QVADRATVM autem eius, quæ Rationale ac Medium potest, ad Rationalem applicatum, [f] latitudinem facit ex binis nominibus quintam. [f] 65. deci.

POSTREMO quadratum eius, quæ bina Media potest, ad Rationalem applicatum, [g] latitudinem facit ex binis nominibus sextam. [g] 66. deci.

ITAQVE cum hæ latitudines differant & a latitudine Mediæ, & inter se; a latitudine quidẽ Mediæ, quod hæc Rationalis sit, illæ vero Irrationales; inter se autem, quod ordine non sint eædem ex binis nominibus; perspicuum est, omnes Irrationales lineas, de quibus hactenus est dictum, inter se differẽtes esse.

SCHOLIVM.

HACTENVS egit Euclides de septem senarijs. IN primo, qui continetur propos. 37. 38. 39. 40. 41. & 42. tradidit ortum sex linearũ Irrationalium, nimirũ eius,

quæ

quæ ex binis nominibus; & eius, quæ ex binis Medijs prima; & eius, quæ ex binis Medijs secunda; & Maioris; & eius, quæ Rationale ac Medium potest; & denique eius, quę potest bina Media.

IN secundo, quem continent propos. 43. 44. 45. 46. 47. & 48. egit de earum diuisionibus, docens singulas in singulis duntaxat punctis diuidi posse.

IN tertio deinde contẽto propos. 49. 50. 51. 52. 53. & 54. docuit inuentionem sex linearum, quæ ex binis nominibus dicuntur, videlicet primæ, secundæ, tertiæ, quartæ, quintæ, & sextæ.

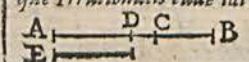
IN quarto, quem absoluunt propos. 55. 56. 57. 58. 59. & 60. ostendit, quo modo hæ sex lineæ Irrationales, quæ in primo senario explicantur, inter se differant, docens, quanam linea Irrationalis sit illa, quæ potest spatium contentum sub Rationali, & ex binis nominibus prima, vel ex binis nominibus secunda, vel tertia, vel quarta, vel quinta, vel sexta.

IN quinto autem, quẽ reperies in propos. 61. 62. 63. 64. 65. & 66. docuit, quasnam latitudines Irrationales faciant quadrata linearum Irrationalium in primo senario explicatarum, ad Rationalem lineam applicata.

IN sexto vero, qui quinque propos. nempe 67. 68. 69. 70. & 71. absoluitur, demonstrauit lineam quamcunque commensurabilem alicui dictarum sex Irrationalium in primo senario, esse Irrationalem eandem illi, cui commensurabilis est.

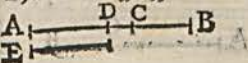
IN septimo denique contento duabus propositionibus, nimirum 72. & 73. explicauit rursus differentiam aliam sex prædictarum Irrationalium.

REPERITVR autem in his sex lineis Irrationalibus, de quibus in primo senario, Analogia seu proportionalitas Arithmetica, quæ quidem consistit in excessu eodem. Et recta media proportionalis, secundum Analogiam Arithmeticam, inter duo nomina cuiusuis lineæ Irrationalis, est quædam Irrationalis eadẽ illi, inter cuius nomina media existit.



SIT enim quæcunque Irrationalis, nempe ex binis nominibus AB, cuius maius nomẽ AC, & diuidatur AB, bifariam in D; & eius dimidia AD, vel DB

DB, æqualis sumatur E. Dico E, mediam esse, secundum Analogiam Arithmeticã, inter AC, CB: & E, esse quoq; ex binis nominibus. Quoniã .n. AC, superat dimidiã AD, rectã DC; & dimidia DB, superat ipsam CB, eadem rectã DC; perspicuum est, dimidiam ipsius AB, nempe E, esse mediam proportionalem inter AC, CB, in Analogia Arithmetica.



RVRSVS quia E, cõmensurabilis est longitudine toti AB, cum hæc illius sit dupla; erit & E, Irrationalis eadem ipsi AB, vt in sexto senario est demonstratum.

IDEM ostendemus non aliter in cæteris lineis Irrationalibus contingere.

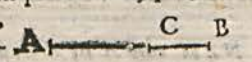
SEQVVNTVR iam septem alij senarij, in quibus eadẽ Euclides demonstrat de sex alijs lineis Irrationalibus, quæ per detractionem generãtur, quæ in precedentibus septem senarijs de Irrationalibus, quæ per compositionem fiunt, eum ostendisse docuimus.

PRINCIPIVM SENARIORVM per detractionem.

THEOR. 56. PROPOS. 74. 73. 68.

SI a Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Apotome.

DETRAHATVR a Rationali AB, Rationalis AC, potẽtia solum commensurabilis ipsi AB. Dico reliquã BC, Irrationalẽ esse. Quoniã .n. per lemma 3. propos. 19. huius lib. est vt AB, ad AC,



ita quadratum ex AB, ad rectangulum sub AB, AC: Et sunt AB, AC, longitudine incommensurabiles; erunt [a] incom- [a] 10. deci.

incommensurabilia quadratum ex A B, & rectangulum sub AB, AC. Sed quadrato ex AB, commensurabile est compositum ex quadratis rectarum AB, AC; (cum enim AB, AC, potentia ponantur commensurabiles, erunt quadrata ex A B, A C, commensurabilia.[a] Igitur & compositum ex ipsis commensurabile erit quadrato ex A B,) rectangulo vero sub A B, AC, comm ensurabile est rectangulum sub AB, AC, bis. Igitur compositum ex quadratis rectarum A B, A C, & rectangulum sub AB, AC, bis contentum, incommensurabilia sunt, vt in scholio propos. 14. huius libri demonstrauimus.[b] Est autem compositum ex quadratis rectarum AB, A C, æquale rectangulo bis sub AB, A C, vna cum quadrato ex BC. Igitur & compositum ex quadratis rectarum AB, AC, per coroll. propos. 17. huius lib. reliquo quadrato ex BC, incommensurabile est. Cum ergo compositum ex quadratis rectarum A B, A C, sit Rationale; (propterea quod commensurabile est quadrato Rationali ex AB, linea Rationali descripto;) erit quadratum ex BC, Irrationale; atque adeo & recta ipsa BC, Irrationalis. Vocetur autem Apotome. Iuniores dicunt Residuum. Si igitur a Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti; Reliqua Irrationalis est, &c. Quod ostendendum erat.

A C B

a 16. deci.

b 7. secun.

SCHOLIVM.

POTVISSET Euclides proponere quoque hanc propositionem hoc modo.

SI a maiori nomine eius, quæ ex binis nominibus, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Apotome.

NAM cum A B, A C, sint Rationales potentia tantum commensurabiles;[c] *erit compositum ex ipsis Irrationalis, quæ ex binis*

A C B

c 37. deci.

binis nominibus dicitur, cuius maius nomen A B, & minus A C. Auferatur igitur A C, minus nomen ex maiori nomine A B, vt relinquatur Apotome BC.

THEOR. 57. PROPOS. 75.

74. 69.

SI a Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Rationale contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

DETRAHATVR a Media AB, Media A C, potentia solum commensurabilis ipsi AB. sitque rectangulum sub AB, AC, Rationale. Dico reliquam BC, esse Irrationalem. Quoniam. n. AB, AC, potentia sunt commensurabiles; erunt quadrata ex AB, AC, commensurabilia;[a] atque adeo & compositum ex ipsis commensurabile erit quadrato ex A C. Est autem quadratum ex A C, Media Irrationale, & Medium. Igitur ex coroll. propos. 24. huius lib. & compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Irrationale erit, ac Medium. Et quia rectangulum sub AB, AC, ponitur Rationale; erit & rectangulum bis sub AB, AC, Rationale. Igitur incommensurabile est compositum ex quadratis rectarum AB, AC, rectangulo bis sub AB, AC.[b] Cum ergo compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale sit rectangulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC; erit quoque rectangulum bis sub A B, AC, vna cum quadrato ex BC, incommensurabile rectangulo bis sub AB, AC.[c] Quare & rectangulum bis sub A B, A C, & quadratum ex B C, incommensurabilia sunt. Existente ergo rectangulo bis sub AB, AC, Rationali; erit quadratum ex B C, Irrationale; ideoque & recta BC, Irrationalis erit. Vocetur autem Mediæ Apotome prima, quia videlicet relinquitur

A C B

a 16. deci.

b 7. secun.

c 17. deci.

Post detractionem minoris nominis lineæ ex binis Medijs primæ, a maiori nomine, vt in scholio sequenti patebit. Si igitur a Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Rationale contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima. Quod ostendendum erat.

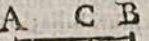
SCHOLIVM.

POTVISSET hæc propositio proponi hoc modo.

SI a maiori nomine eius, quæ ex binis Medijs prima, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

CVM enim AB, AC, sint Mediæ potentia solum commensurabiles, contineantque Rationale; erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ ex binis Medijs prima dicitur, cuius maius nomẽ AB, & minus AC. Aufertur igitur AC, minus nomen ex maiori AB, vt relinquatur BC, Media Apotome prima.

a 38. deci.



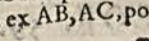
75. 70.

THEOR. 58. PROPOS. 76.

SI a Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Medium contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda.

DETRAHATVR a Media AB, Media AC, potentia solum commensurabilis ipsi AB, sitque rectangulum sub AB, AC, Medium. Dico reliquam BC, esse Irrationalẽ. Quoniam. n. quadrata ex AB, AC, potentia cõmensurabilibus commensurabilia sunt; a erit & compositum ex ipsis vtrique ipsorum commensurabile: Est autem vtrũque ipsorum Medium, quod & rectæ AB, AC, Mediæ ponantur. Igitur & compositum ex ipsis, vtriquę commensurabile, Mediũ est, ex coroll. propos. 24. huius lib. Rursus quia rectangulũ sub AB, AC, Medium ponitur: erit & eius duplum, rectangulum videlicet bis sub AB, AC, ex coroll. propos. 24. huius lib. Mediũ. b Cum ergo compositum ex quadratis rectarũ AB, AC, æquale sit rectãgulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC; superabit compositum ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium est, rectangulum bis sub AB, AC, quod etiam Medium est, quadrato ex BC. c Medium autẽ non superat Medium Rationali. Non ergo quadratũ ex BC, Rationale est. Ergo Irrationale, & ipsa recta BC, Irrationalis. Vocetur autẽ Mediæ Apotome secũda, quoniã relinquitur post detractionem minoris nominis eius, quę ex binis Medij secunda, a maioris nomine, vt ex scholio sequenti apparebit. Si igitur Media Media auferatur, &c. Quod erat ostendendum.

a 16. deci.



b 7. secun.

c 27. deci.

SCHOLIVM.

HOC etiam theorema ita potuisset proponi.

SI a maiori nomine eius, quæ ex binis Medijs secunda, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda.

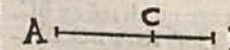
QVONIAM. n. AB, AC, Mediæ sunt potentia tantũ commensurabiles, continentq; Medium; d erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ ex binis Medijs secunda appellatur, cuius maius nomen AB, & minus AC. Aufertur igitur AC, minus nomen ex maiori AB, vt relinquatur BC, Media Apotome secunda.

d 39. deci.

76. 71.

THEOR. 59. PROPOS. 77.

SI a recta linea recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor.

DETRAHATVR a recta AB, recta AC potentia ipsi AB, incommensurabilis; 

Sit autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale; rectangulum vero sub AB, AC, Medium. Dico reliquam BC, Irrationalem esse. Quoniam.n. compositū ex quadratis rectarū AB, AC, Rationale est; rectangulum vero sub AB, AC, atque adeo, ex coroll. propos. 24. huius lib. & ei commensurabile, hoc est, rectangulum bis sub AB, AC, Medium, hoc est, Irrationale; [a] erit compositum ex quadratis rectarum AB, AC, incommensurabile rectangulo bis sub AB, AC. [b] Est autem compositum ex quadratis rectarū AB, AC, æquale rectangulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC. Igitur & compositum ex quadratis rectarum AB, AC, per coroll. propos. 17 huius lib. reliquo quadrato ex BC, incommensurabile erit. Ponitur autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale. [c] Igitur quadratum ex BC, illi incōmensurabile, Irrationale est, & linea BC, Irrationalis. Vocetur autē Minor, quoniam relinquitur post detractionem minoris nominis lineę Maioris, a maiori nomine, vt in scholio sequēti dicemus. Si igitur a recta linea recta auferatur, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 10. defin.
[b] 7. secun.
[c] 10. defin.

SCHO-

SCHOLIVM.

SIC etiam theorema hoc poterat proponi.

SI a maiori nomine lineæ Maioris minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor.

NAM cum AB, AC, sint potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale, quod autem sub ipsis continetur, Medium: [a] *erit compositum ex ipsis Irrationalis, quæ vocatur* Maior, *eiusq; maius nomen AB, minus autem AC. Aufertur igitur AC, minus nomen ex maiori AB, vt relinquatur* Minor *BC.* [a] 40. decimi.

THEOR. 60. PROPOS. 78. 77. 72.

SI a recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autē sub ipsis continetur, Rationale: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.

DETRAHATVR ex recta AB, recta AC, potentia ipsi AB, incommensurabilis; sit autem compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis, Rationale. Dico reliquam BC, esse Irrationalem. Quoniam.n. compositū ex quadratis rectarum AB, AC, Medium est, hoc est, Irrationale; at rectangulum sub AB, AC, atque adeo & eius duplum, nempe quod bis sub AB,

[a] 10. defin. AB, AC, Rationale; [a] erit compositum ex quadratis rectarum AB, AC, incommensurabile rectangulo bis sub

[b] 7. secun. AB, AC, [b] Est autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale rectangulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC. Igitur & rectangulũ bis sub AB, AC, vna cũ quadrato ex BC, incõmensurabile est rectãgulo bis sub AB, AC. [c] Sũt ergo & rectãgulũ bis sub AB, AC, & quadratũ ex BC, incõmensurabilia. Cũ ergo rectangulũ bis sub AB, AC, Rationale sit; [d] erit quadratũ ex BC, Irrationale, & recta BC, Irrationalis. Vocetur autẽ cum Rationali Medium totum efficiens: quia eius quadratũ additum rectãgulo bis sub AB, AC, quod Rationale est, facit totum compositum ex quadratis rectarũ AB, AC, quod Medium existit. Si igitur a recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium: quod autem sub ipsis continetur, Rationale: Reliqua Irrationalis est, &c. Quod ostendendum erat.

[c] 17. deci.

[d] 10. defin.

SCHOLIVM.

HOC etiam modo Euclides theorema hoc potuisset proponere.

SI a maiori nomine eius, quæ Rationale ac Medium potest, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.

[c] 41. deci. *CVM enim AB, AC, sint potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis, Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale; [c] erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ nominatur Rationale ac Medium potens, cuius maius nomen est AB, minus autem AC. Auferatur igitur minus nomen AC, a maiori AB, ac BC, cum Rationali Medium totum efficiens relinquatur.*

THEOR.

THEOR. 61. PROPOS. 79. 78. 73.

SI a recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat & compositum ex ipsarum quadratis, Medium; & quod sub ipsis continetur, Medium, incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

DETRAHATVR ex recta AB, recta AC, potentia ipsi AB, incommensurabilis; Sitque tam compositũ ex ipsarum quadratis, quam rectangulum sub ipsis Medium, incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis. Dico reliquam BC, esse Irrationalem. [a] Quoniam enim compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale est rectangulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC, superabit compositum ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium ponitur, rectangulum bis sub AB, AC, quod ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium etiam est, (cum Medio, quod sub AB, AC, continetur, sit commensurabile) quadrato ex BC. [b] Medium autem non superat Medium Rationali. Non ergo quadratum ex BC, Rationale est. Ergo Irrationale, & recta ipsa BC, Irrationalis. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiẽs, quia eius quadratum cum rectangulo bis sub AB, AC, quod Medium est, facit totum cõpositum ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium etiam est. Si igitur a recta recta auferatur, &c. Quod ostendendum erat.

[a] 7. sec.

[b] 27. deci.

SCHO-

SCHOLIVM.

IN hunc modum proponi quoque potuisset hoc theorema.

SI a maiori nomine eius, quæ bina Media potest, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

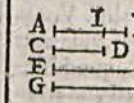
QVONIAM cum AB, AC, sint potentia incommensurabiles, faciantque & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis Medium, incommensurabileq; composito ex quadratis ipsarum; [a] *erit composita ex illis Irrationalis, quæ bina Media potens dicitur, cuius maius nomen AB, & minus AC. Aufertur igitur minus nomen AC, ex maiori AB, vt relinquatur BC, cum Media Medium totum efficiens.*

[a] 42. deci.

LEMMA.

SI idem excessus sit inter primam magnitudinem, & secundam, qui inter tertiam magnitudinem, & quartam; erit & vicissim idem excessus inter primam magnitudinem, & tertiam, qui inter secundam magnitudinem & quartam.

SINT quatuor magnitudines AB, CD, EF, GH, sitq; IB, excessus inter AB, CD, æqualis excessui KF, inter EF, GH. Dico eundem esse excessum inter AB, EF, qui est inter CD, GH. Quoniã. n. IB, excessus est inter AB, & CD; erit AI, ipsi CD, æqualis. Eodem modo æqualis erit EK, ipsi GH. Idem igitur excessus erit inter AI, & EK, qui inter CD, & GH; cum hæ magnitudines illis sint æquales, singulæ singulis. Est autem totorum AB, EF, ex pronunciato 16. lib. 1. idem excessus, qui inter AI, EK; quod IB, KF, æquales ponantur. Igitur idem quoque excessus erit inter AB, & EF, qui inter CD, & GH. quod est propositum.



COROLLARIVM.

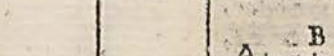
EX his constat, quatuor magnitudines Arithmeticam Analogiam habentes, habere quoque vicissim Arithmeticam Analogiam. quoniam huiusmodi Analogia consistit in eodem excessu, quem ostendimus eundem esse inter primam, & tertiam magnitudines, qui inter secundam & quartam magnitudines reperitur, si idem sit excessus inter primam magnitudinem, & secundam, qui inter tertiam magnitudinem, & quartam, hoc est, si quatuor magnitudines Analogiam Arithmeticam habeant.

THEOR. 62. PROPOS. 80. 79. 74.

APOTOMAE vna tantũ congruit recta linea Rationalis potentia solum commensurabilis existens toti.

SIT Apotome AB; congruens autem ei Rationalis BC, potentia solum toti AC, commensurabilis. Dico ipsi AB, aliam rationalẽ non congruere, quæ toti sit potentia tantum commensurabilis. Si enim fieri potest, cõgruat alia Rationalis BD, ita vt BD. ipsi AD, sit potentia solum commensurabilis. Et quia BC, Rationalis est; erit AC, illi solum potentia cõmensurabilis,

surabilis, Rationalis. Rationales ergo sunt AC, BC, potentia tantum commensurabiles. Eodem modo erunt & AD, BD, Rationales potentia solum commensurabiles. Quoniam vero idem excessus est inter compositum ex



quadratis rectarum AC, BC, & rectangulum bis sub AC, BC, qui inter compositũ ex quadratis rectarum AD, BD, & rectangulum bis sub AD, BD; (superat enim compositum ex quadratis rectarum AC, BC, rectãgulum bis sub AC, BC, quadrato ex AB; a quòd compositum ex quadratis rectarum AC, BC, æquale sit rectangulo bis sub AC, BC, vna cum quadrato ex AB. Et eodem modo compositũ ex quadratis rectarũ AD, BD, superat rectangulum bis sub AD, BD, quadrato eodẽ ex AB; b cum & compositum ex quadratis rectarũ AD, BD, æquale sit rectangulo bis sub AD, BD, vna cum quadrato ex AB:) erit quoque permutando, ex lemmate antecedenti, idem excessus inter compositum ex quadratis rectarum AC, BC, & compositum ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectãgulum bis sub AC, BC, & rectangulum bis sub AD, DB. Est autem excessus inter illa cõposita, spatium Rationale, ex scholio propos. 27. huius lib. quod vtrũq; Rationale sit. (Nam cum AC, BC, sint Rationales potentia solum cõmensurabiles; erũt earum quadrata, Rationalia, & cõmensurabilia. c Igitur & compositum ex ipsis vtriq; illorum commensurabile est, atq; adeo & Rationale; ex 9. defin. Non aliter Rationale ostẽdemus compositum ex quadratis rectarum AD, BD. Igitur & excessus inter rectangulum bis sub AC, BC, & rectangulum bis sub AD, BD, spatium Rationale est. d Et quia rectangulum sub AC, BC, Rationalibus potentia solũm commensurabilibus Medium est; erit ex corollario propositionis 24. huius lib. & eius duplum, nempe rectangulum bis sub AC, BC, Medium. Eademque ratione Medium erit rectangulum bis sub AD, BD. e Medium autem non superat Medium Rationali. Igitur excessus inter rectangulum bis sub AC, BC, & rectangulum bis sub AD, BD, Rationale spatium non est. Sed & Rationale ostensum est. Quod est absurdum. Ergo ipsi AB, alia

a 7. secun.

b 7. secun.

c 61. deci.

d 22. deci.

e 27. deci.

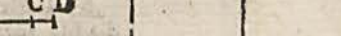
alia Rationalis non congruit, præter BC, quæ toti sit potentia tãtum commensurabilis. Apotomæ igitur vna tantum congruit, &c. Quod erat ostendendum.

80.
75.

THEOR. 63. PROPOS. 81.

MEDIAE Apotomæ primæ vna tantum congruit recta linea Media, potentia solum commensurabilis existens toti, & cum tota Rationale continens.

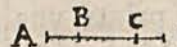
SIT Mediæ Apotome prima AB; & ipsi congruat BC, Media toti AC, potentia solum commensurabilis, & rectangulum sub AC, BC, sit Rationale. Dico ipsi AB, aliam Mediam non congruere, quæ toti sit potentia tantum commensurabilis, contineatque cum tota Rationale. Si enim fieri potest, congruat alia BD, Media toti AD, potentia tantum commensurabilis, sitque rectangulum sub AD, BD, Rationale. Et quia BC, Media est potentia solum ipsi AC, commensurabilis; a erit & AC, Media, cum illi sit commensurabilis. Mediæ ergo sunt AC, BC, potentia tantum commensurabiles. Quoniã vero idem excessus est inter compositum ex quadratis rectarum



AC, CB, & compositum ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectangulum bis sub AC, BC, & rectangulum bis sub AD, BD, vt in propos. præcedenti ostensum est: Est autem excessus inter hæc rectangula, ex scholio propositionis 27. huius lib. spatium Rationale; quod vtrũq; sit Rationale. (cum enim rectangulum sub AC, BC, ponatur Rationale; erit rectangulum bis sub AC, BC, illi commensurabile, Rationale. Atque eadẽ ratione Rationale erit rectangulum bis sub AD, BD.) Igitur & excessus inter compositũ ex quadratis rectarum AC, BC, & compositum ex quadratis rectarum AD, BD, spatium Rationale est. Et quoniam rectæ AC, BC, Mediæ sunt potentia solum commensurabiles; erunt & ipsarum quadra-

a 24. deci.

quadrata Media,& commensurabilia. a Igitur & compositum ex ipsis utrique ipsorum commensurabile est, atq; adeo & Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. Non aliter quoque Medium erit compositum ex quadratis rectarum AD, BD. b Medium autem non superat Mediũ Rationali. Igitur ex



cessus inter cõpositum ex quadratis rectarum AC, BC, & compositũ ex quadratis rectarum AD, BD, spatium Rationale nõ est. Sed & Rationale ostensum est. Quod est absurdum. Ergo ipsi AB, alia Media non congruit, præter BC, quæ toti sit potenria solum commensurabilis, contineatq; cũ tota Rationale. Mediæ igitur Apotomæ primæ vna tantum congruit, &c. Quod erat demonstrandum.

a 16. deci.

b 27. deci.

81. 76. THEOR. 64. PROPOS. 82.

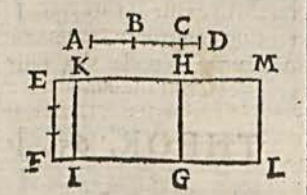
MEDIAE Apotomæ secundæ vna tantum congruit recta linea Media potentia solum commensurabilis existens toti, & cum tota Medium continens.

SIT Mediæ Apotome secũda AB, cui congruat Media BC, toti AC, potentia tantum commensurabilis, & rectangulũ sub AC, BC, sit medium. Dico ipsi AB, aliam mediam non congruere, quæ toti sit potentia tantum commensurabilis, contineatque cum tota Mediũ. Si enim fieri potest, cõgruat ipsi alia BD, media toti AD, potentia tantum commensurabilis, sitque rectangulum sub AD, BD, Medium. Exponatur Rationalis EF, c ad quam applicetur rectangulum EG, æquale composito ex quadratis rectarum AC, BC, & ad eandem EF, aliud EI, applicetur æquale quadrato ex AB. Et deniq; aliud EL, æquale composito ex quadratis rectarum AD, BD. d Quoniam igitur compositum ex quadratis rectarum AC, BC, æquale est rectangulo bis sub AC, BC, vna cum

c 45. prim.

d 7. secun.

cum quadrato ex AB; erit KG, æquale ei, quod bis continetur sub AC, BC. Eodemque modo erit KL, æquale ei, quod bis continetur sub AD, BD. Et quoniam AC, BC, Mediæ sunt, & potentia commensurabiles; (cum enim BC, Media ponatur, erit & AC, ipsi potẽtia cõmensurabilis, Media) erunt & earũ quadrata Media, & cõmensurabilia. b Ergo & compositum ex ipsis commensurabile est vtriq; eorum; atque idcirco & Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. Igitur & EG, quod illi composito æquale est, Medium est; quod cum applicetur ad Rationalem EF, c erit EH, Rationalis ipsi EF, longitudine incommensurabilis. Rursus quia rectangulum sub AC, BC, Medium est; erit ex coroll. propos. 24. huius lib. & eius duplum, nempe KG, Medium; quod cũ applicetur ad Rationalem KI, d erit KH, Rationalis ipsi KI, hoc est, ipsi EF, longitudine incommensurabilis. Et quia AC, BC, longitudine incommensurabiles sunt, estque vt AC, ad BC, ita quadratum ex AC, ad rectãgulum sub AC, BC, vt ostendimus lemmate 3. ad propos. 19. huius lib. e erit quadratum ex AC, incõmensurabile rectãgulo sub AC, BC. Est autem quadrato ex AC, commensurabile compositum ex quadratis rectarum AC, BC, hoc est, rectangulum EG. (cum enim rectæ AC, BC, ponantur potentia commensurabiles; erunt & earum quadrata commensurabilia f. Igitur & compositum ex ipsis commensurabile est vtrique ipsorum, nempe quadrato ex AC,) & rectangulo sub AC, BC, commensurabile est eius duplum, videlicet KG. Igitur & EG, ipsi KG, incommensurabile est, ex iis, quæ in scholio propos. 14. huius lib. docuimus. g Rectæ igitur EH, KH, eãdem habentes rationem cum EG, KG, longitudine incommẽsurabiles sunt: Sed & Rationales sunt ostensæ. Rationales ergo sunt potẽtia tantum commensurabiles. Quapropter cum ex Rationali EH, auferatur Rationalis KH, potentia solum commen



a 24. deci.

b 16. deci.

c 23. deci.

d 23. deci.

f 10. deci.

g 16. deci.

h 10. deci.

sura-

surabilis ipsi EH, [a] erit EK, Apotome, & illi congruens KH. Similiter demonstrabimus EK, Apotomen esse, & illi congruentem KM. Non igitur Apotomæ vna tantũ congruit recta linea Rationalis potẽtia solum commensurabilis existens toti: quod est absurdum. Vnam enim tantum congruere, [b] demonstratum est. Igitur mediæ Apotomæ secundæ vna tantum congruit, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 74. deci.

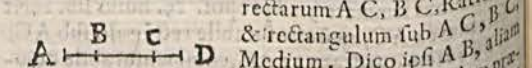
[b] 80. deci.

82. 77.

THEOR. 65. PROPOS. 83.

MINORI vna tantum congruit recta linea potẽtia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium.

SIT Minor AB, & illi congruens BC, toti AC, potẽtia incõmensurabilis, faciẽsq; compositũ ex quadratis rectarum AC, BC, Rationale, & rectangulum sub AC, BC, Medium. Dico ipsi AB, aliam non cõgruere, quæ eadem præstet. Sit enim, si fieri potest, alia congruens BD, toti AD, potentia incommensurabilis, faciensque compositum quidem ex quadratis rectarum AD, BD, Rationale, at rectangulum sub AD, BD, Medium. Quoniam igitur vt in propos. 80. demonstratum est, idem excessus est inter compositum ex quadratis rectarum AC, BC, & ęquiter compositum ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectangulum bis sub AC, BC, & rectangulum bis sub AD, BD. Est autem excessus inter illa composita, spatium Rationale, ex scholio propos. 27. huius libri; quod vtrũque Rationale ponatur. Igitur & excessus inter rectangulum bis sub AC, BC, & rectangulũ bis sub AD, BD, spatium est



Rationale. sed & non Rationale est. Cũ enim rectangulum sub AC, BC, ponatur Medium, erit quoque ex coroll. propos. 24. huius lib. eius duplum, nempe rectangulum bis sub AC, BC, Medium. Similiterque Medium erit rectangulum bis sub AD, BD. [a] Quare vnum non superabit alterum Rationali.) Quod est absurdum. Ergo ipsi AB, alia recta præter BC, non congruit potentia toti incommensurabilis, &c. Minori ergo vna tantũ congruit, &c. Quod erat demonstrandum.

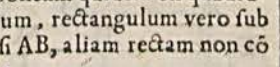
[a] 27. deci.

THEOR. 66. PROPOS. 84.

83. 78.

EI, quæ cum Rationali Medium totum facit, vna tantum congruit recta linea potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale.

SIT recta cum Rationali Medium totum faciens AB, cui congruat recta BC, toti AC, potentia incommensurabilis, faciensq; compositum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Medium, rectangulum vero sub AC, BC, Rationale. Dico ipsi AB, aliam rectam non cõgruere, quę hæc eadem faciat. Si enim fieri potest, congruat ipsi alia recta BD, toti AD, potentia incommensurabilis, faciensq; compositum quidem ex quadratis rectarũ AD, BD, Medium, rectangulum vero sub AD, BD, Rationale. Quoniam igitur vt in propos. 80. ostensum est, idem excessus est inter compositum ex quadratis rectarũ AC, BC, & compositũ ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectangulum bis sub AC, BC, & rectangulum bis

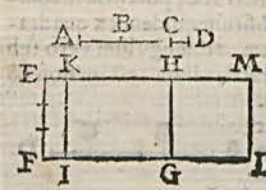


sub AD, BD. Est autẽ excessus inter hæc rectangula, spatiũ Rationale, vt in propos. 81. demonstrauimus. Igitur & excessus inter illa cõposita, spatiũ Rationale est: sed
[a] 27. deci. & nõ Rationale est; cũ vtrumq; sit Mediũ. [a] Medium, n. Medium non superat Rationali. Quod est absurdũ. Non ergo ipsi AB, alia recta, quam BC, congruet potentia toti incommensurabilis, &c. Quare ei, quæ cum Rationali Medium totum facit, vna tantum congruit, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 67. PROPOS. 85.

84. 79. EI, quæ cum Medio Medium totum facit, vna tantum cõgruit recta linea potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciẽs & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis continetur Medium, incommensurabileq; cõposito ex ipsarum quadratis.

SIT recta AB, cum Medio Medium totum faciens, ipsi vero congruens BC, toti AC, potentia incommensurabilis, faciensq; & compositum ex quadratis rectarũ AC, BC, Medium, & rectangulum sub AC, BC, Mediũ, incommensurabileq; composito ex quadratis rectarum AC, BC. Dico ipsi AB, aliã non congruere, quæ eadem hæc faciat. Si.n. fieri potest, cõgruat ipsi recta alia BD, toti AD, potẽtia incõmensurabilis, ita vt & compositũ ex quadratis rectarũ AD, BD, Mediũ sit, & rectãgulum sub AD, BD, Medium quoque, ac incommensurabile cõposito ex quadratis rectarum AD, BD. Constructis autem iisdem, quæ in propos. 82. quoniam compositum ex quadratis rectarum AC, BC, Medium est; erit etiam EG,



EG, illi æquale, Medium. [a] Recta igitur EH, Rationalis est, ipsi EF, longitudine incommensurabilis. Rursus quia rectangulum sub AC, BC, Medium est; erit & eius duplum KG, Medium. [b] Igitur & recta KH, Rationalis est, longitudine ipsi EF, incommensurabilis. Et quoniã KG, commensurabile est rectangulo sub AC, BC, cum illud huius sit duplum; at rectangulum sub AC, BC, incommensurabile ponitur composito ex quadratis rectarum AC, BC; [c] erit quoque KG, eidem composito, hoc est, ipsi EG, incommensurabile; ac propterea rectæ EH, KH, eandem habentes cum EG, KG, rationem, [d] longitudine incommensurabiles sunt. Sed & ostensæ sunt Rationales. Rationales ergo sunt potentia solum commensurabiles. Quare cum ex Rationali EH, auferatur Rationalis KH, potentia solum commensurabilis ipsi EH; [e] erit EK, Apotome, & ei congruens KH. Non aliter ostendemus EK, esse Apotomen, & ei congruentem esse KM. Non igitur Apotomæ vna tantum recta congruit, &c. Quod est absurdum. [f] Vnam enim tantum congruere demonstratum est. Igitur ei, quæ cum Medio Medium totum facit, vna tantum congruit, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 23. deci.
[b] 23. deci.
[c] 14. deci.
[d] 10. deci.
[e] 74. deci.
[f] 80. deci.

DEFINITIONES TERTIAE.

EXPOSITA Rationali, & Apotoma; si tota plus possit, quam congruens, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis,

I.

SI quidem tota expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome prima.

II.

Si vero congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome secunda.

III.

QVOD si neque tota, neque congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome tertia.

RVRSVS si tota plus possit, quam cõgruens, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis,

IIII.

SI quidem tota expositæ Rationali sit longiiudine commensurabilis; Vocetur Apotome quarta.

V.

SI vero congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome quinta.

VI.

QVOD si neque tota, neque congruens

gruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome sexta.

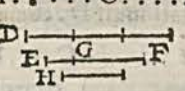
SCHOLIVM.

NON aliter colligitur numerus harum sex Apotomarũ, ac superius numerus sex linearum ex binis nominibus fuit collectus. Sunt enim sex hæ Apotomæ, rectæ lineæ, quæ relinquuntur post detractionem minorum nominum ex maioribus nominibus sex linearum, quæ ex binis nominibus dicuntur, vt ex definitionibus est perspicuum.

PROBL. 19. PROPOS. 86.

INVENIRE primam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in scholio 2. propos. 29. huius libri docuimus, quorũ excessus AC, non sit quadratus; ita vt AB, CB, proportionem quidem habeant, quam quadratus ad quadratũ, at AB, AC, non. Exponatur Rationalis quæpiam D, cui longitudine commensurabilis sit EF. Eritque EF, cũ cõmensurabilis sit Rationali D, Rationalis. Fiat deinde vt numerus AB, ad numerum AC, ita per coroll. propos. 6. huius lib. quadratum ex EF, ad quadratum ex GF. Dico EG, esse primam Apotomen. [a] Quoniam enim quadrata ex EF, GF, proportionem habentia, quam numeri AB, AC, cõmensurabilia sunt; Erunt & rectæ EF, GF, commensurabiles, saltem potentia. Cum ergo EF, ostensa sit Rationalis, erit & GF, Rationalis. Quia vero AB, AC, proportionem non habent, quam quadrati numeri; neq; quadrata ex EF, GF, proportionem habebunt, quam quadrati numeri. [b] Incommensurabiles ergo sunt longitudine rectæ

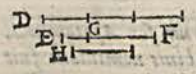


[a] 6. deci.

[b] 9. deci.

ctæ EF, GF. Rationales ergo sunt EF, GF, potentia tantum commensurabiles; atque ideirco reliqua EG, Apotome est. Dico & primam esse. Posit enim recta EF, plus quã recta GF, quadrato H. Et quia est, vt numerus AB, ad numerũ AC, ita quadratũ ex EF, ad quadratũ ex GF; erit per conuersionẽ rõnis, vt AB, ad CB, ita quadratũ ex EF, ad quadratũ ex H. Habent autẽ AB, CB, proportionem, quam numeri quadrati. Igitur & quadrata ex EF, & H, proportionem habent, quam numeri quadrati; [b] propterea rectæ EF, & H, longitudine commensurabiles sunt. Quoniam igitur tota EF, plus potest, quam congruens GF, quadrato rectæ H, sibi longitudine commensurabilis; estque tota eadem EF, expositæ Rationali D, commensurabilis longitudine; erit EG, ex defin. prima Apotome. Inuenimus ergo primam Apotomen. Quod faciendum erat.

A . . . . . C . . . . B



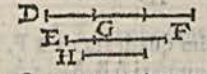
86. 81.

PROBL. 20. PROPOS. 87.

INVENIRE secundã Apotomẽ.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in propos. præcedenti; expositaq; Rationali D, sumatur ei longitudine commensurabilis GF; eritque GF, Rationali D, commensurabilis, Rationalis quoque. Fiat deinde vt numerus AC, ad numerum AB, ita quadratum ex GF, ad quadratum ex EF, per coroll. propos. 6. huius libri. Dico EG, esse secundam Apotomen.

A . . . . C . . . . B



[c] Quoniam enim quadrata ex GF, EF, proportionem habentia, quam numeri AC, AB, commensurabilia sunt; Erunt & rectæ GF, EF, commensurabiles, saltem potentia. Cum ergo GF, sit ostensa Rationalis; erit quoq; EF, Rationalis. Quia vero numeri BC, AB, atq; adeo & quadrata ex GF, EF, proportionem non habent, quam numeri quadrati; erunt GF, EF, longitudine incommensurabiles. Rationales ergo sunt GF, EF, potentia solum commensurabiles; [b] Ideoque EG, reliqua, Apotome est. Dico & secundam esse. Posit enim recta EF, plus quam GF, quadrato ex H. Qm̃ ergo est vt AC, ad AB, ita quadratũ ex GF, ad quadratũ ex EF; & conuertẽdo, vt AB, ad AC, ita quadratũ ex EF, ad quadratũ ex GF: Ostendemus iam, vt in antecedenti propos. rectam H, ipsi EF, longitudine esse commensurabilem. Quam ob rem cum tota EF, plus possit, quam congruens GF, quadrato rectæ H, sibi longitudine commensurabilis, sitque congruens GF, expositæ Rationali D, longitudine commensurabilis; erit EG, ex defin. secunda Apotome. Inuenimus ergo secundam Apotomen. Quod erat faciendum.

[a] 9. deci.
[b] 74 deci.

PROBL. 21. PROPOS. 88.

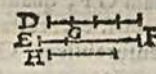
87. 82.

INVENIRE tertiam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in propos. 86. sumatur alius numerus I, vt in propos. 11. huius lib. docuimus, qui ad neutrum ipsorum AB, AC, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. Exposita deinde Rationali D, fiat vt I, ad AB, ita quadratũ ex D, ad quadratũ ex EF, per coroll. propos. 6. huius libri. [c] Eruntque quadrata ex D, & EF, proportionẽ habentia, quam numeri I, & AB, commensurabilia; atque adeo & rectæ D, & EF, commensurabiles, saltem potentia. Existente ergo D, Rationali, erit & EF, Rationalis. Et quia numeri I, & AB, ac propterea quadrata ex D, & EF, proportionem non habent, quam numeri quadrati; [d] erunt rectæ D, & EF, longitudine incommensurabiles. Rursus fiat vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF, ex eodem corollario

A . . . . C . . . . B

I . . . . .



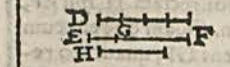
[c] 6. deci.
[d] 9. deci.

propos.6. huius lib. Dico EG, esse tertiam Apotomen.

[a] 6. deci. [a] Quoniam enim quadrata ex EF, GF, proportionem habentia, quam numeri AB. AC, commensurabilia sunt; erunt & rectæ EF, GF, commensurabiles, saltem potentia. Cum ergo EF, ostensa sit Rationalis, erit & GF, Rationalis, cum illi hæc sit commensurabilis, vt demonstrauimus. Et quia AB, AC, atq; adeo & quadrata ex EF, GF,

A . . . . . C . . . . B

I . . . . . .



[b] 9. deci. proportionem non habent, quam numeri quadrati; [b] Erunt rectæ EF, GF, longitudine incommensurabiles. Rationales ergo sunt EF, GF, potentia solum commensurabiles; Ac propterea cum ex EF, auferatur GF, potentia illi solum commensurabilis; [c] reliqua EG, Apotome erit. Dico & tertiam esse. Quoniã. n. est vt I, ad AB, ita quadratum ex D, ad quadratũ ex EF; & vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratũ ex GF; erit ex æquo vt I, ad AC, ita quadratum ex D, ad quadratum ex GF: Non habent autem numeri I, & AC, proportionem, quã numeri quadrati. Neque igitur quadrata ex D, & GF,

[c] 74. deci.

[d] 9. deci. proportionem habebunt, quam numeri quadrati. [d] Sunt ergo rectæ D, & GF, longitudine incommensurabiles. Igitur neutra ipsarum EF, GF, longitudine commensurabilis est expositæ Rationali D. Posit iam EF, plus quam GF, quadrato rectæ H; Ostendemusque, vt in propos. 86. rectam H, esse ipsi EF, longitudine commensurabilem. Quapropter cum tota EF, plus possit quam congruens GF, quadrato rectæ H, longitudine sibi commensurabilis, & neutra ipsarum EF, GF, longitudine commensurabilis sit Rationali D, expositæ; erit ex defin. EG, tertia Apotome. Inuenimus ergo tertiam Apotomen. Quod faciendum erat.

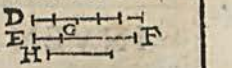
PROBL.

PROBL. 22. PROPOS. 89. 88. 83.

INVENIRE quartam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, ita vt AB, ex illis compositus ad neutrum ipsorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum, per ea, quæ in scholio 3. propos. 29. huius lib. docuimus; exponatur Rationalis D, cui longitudine commẽ surabilis sit EF; eritq; propterea & EF, Rationalis. Quod si reliqua fiant, quæ in propos. 86. ostendemus, vt ibi, EG, esse Apotomen. Dico & quartam esse. Posit enim EF,

A . . . . . C . . . B



plus quam GF, quadrato rectæ H. Et quia est vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF; erit per conuersionem rationis, vt AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H. Cum ergo AB, & CB, proportionem non habeant, quam numeri quadrati; [a] erunt rectæ EF, & H, longitudine incommensurabiles. Quoniã igitur tota EF, plus potest, quam congruens GF, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, estque eadem tota EF, commensurabilis longitudine Rationali D; erit ex defin. EG, quarta Apotome. Inuenimus ergo quartam Apotomen. Quod erat faciendum.

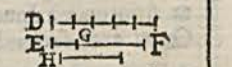
[a] 9. deci.

THEOR. 23. PROPOS. 90. 89. 84.

INVENIRE quintam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, vt in propos. præcedenti, fiat constructio, vt in propos. 87. hoc est, sumatur GF, longitudine commensurabilis Rationali D, &c. Ostendemus ergo vt in propos. 87. EG, esse Apotomen. Dico & secundam

A . . . . . C . . . B



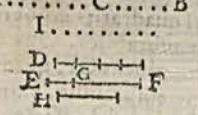
dam esse. Possit enim EF, plus quam GF, quadrato rectæ H. Et quia similiter, vt in propos. 86. ostendemus, per conuersionem rationis, esse vt AB, ad CB, ita quadratū EF, ad quadratum ex H; erunt rursus, vt in propos. antecedenti, rectæ EF, & H, longitudine incommensurabilis; estque congruens GF, Rationali D, commensurabilis longitudine; erit ex defin. EG, quinta Apotome. Inuenimus ergo quintam Apotomen. Quod faciendum erat.

90. 85.

PROBL. 24. PROPOS. 91.

INVENIRE sextam Apotomen.

REPERTIS tribus numeris AC, CB, & I, vt in propos. 54. ita vt AB, ad neutrum ipsorum AC, CB; & I, ad neutrum ipsorum AB, AC, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum: exponatur Rationalis D, & reliqua fiāt, vt in propos. 88. Ostendemus ergo similiter, vt ibi, D, & EF, longitudine incommensurabiles esse; & EG, Apotomen esse.



Dico & sextam esse. Nam vt in propos. 88. erunt D, & GF, longitudine quoque incommensurabiles; Atque adeo neutra ipsarum EF, GF, longitudine commensurabilis est expositæ Rationali D. Possit iam EF, plus quam GF, quadrato rectæ H, quam ostendemus, vt in propos. 89. longitudine incommensurabilem esse ipsi EF. Igitur cum tota EF, plus possit, quam congruens GF, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, & neutra ipsarum EF, GF, longitudine sit commensurabilis Rationali D; erit ex defin. EG, sexta Apotome. Inuenimus ergo sextam Apotomen. Quod erat faciendum.

SCHO

SCHOLIVM.

SED & expeditius sex dictas Apotomas inuenietmus hac ratione, vt Theon docet hoc lōco.

SIT inuenienda exempli gratia, prima Apotome.[a] Reperiatur prius ex binis nominibus prima AB, cuius maius nomen AC, & minus CB. Abscissa igitur ex AC, recta CD, quæ æqualis sit ipsi CB: Dico AD, esse primam Apotomen. Quoniā. n. AC, CB, Rationales sunt potentia tantū cōmēsurabiles; erunt etiā AC, DC, Rationales potentia tantum commensurabiles.[b] Est ergo AD, Apotome. Et quia AC, plus potest, quam CB, hoc est, quam DC, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine cōmensurabilis: & est AC, Rationali expositæ longitudine commensurabilis, ex definitione eius, quæ ex binis nominibus prima dicitur; erit ex definitione Apotoma primæ, AD, prima Apotome. Eadē ratione ex cæteris, quæ ex binis nominibus dicūtur, & alias Apotomas inueniemus, vt ex secunda secundam, ex tertia tertiam, ex quarta quartam, ex quinta quintam, & ex sexta sextā, si minora nomina ex maioribus auferamus.

[a] 49. decim.

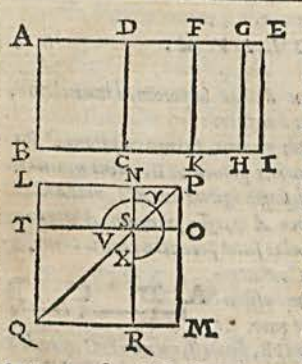
[b] 74. decim.

THEOR. 68. PROPOS. 92.

91. 86.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma prima; Recta linea spatium potens Apotome est.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & Apotoma prima AD. Dico rectam lineam, quæ potest spatium AC, Apotomen esse. Sit ipsi AD, congruens DE. Erunt igitur AE, DE, ex defin. Apotomæ primæ, Rationales potentia solum commēsurabiles; & tota AE, longitudine commensurabilis Rationali AB; & denique eadem AE, tota plus poterit, quam



quam congruēs DE, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Secetur D E, bifariam in F, & quadrato ex F E, hoc est, quartæ parti quadrati ex DE, applicetur ad AE, rectangulū æquale sub AG, GE, deficiens figura quadrata, per lemma 2. propos. 17. huius lib. Et quia AE, plus potest, quā DE, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; [a] erunt rectæ AG, G E, longitudine commensurabiles; [b] Ac propterea & vtraque toti AE, longitudine commensurabilis erit: Est autem AE, Rationali *AB*, longitudine cōmensurabilis. [c] Igitur & vtraq; AG, GE, ipsi AB, longitudine est cōmensurabilis; atq; ex definitione 6. Rationalis. Quare ductis GH, EI, ipsi A B, parallelis, quæ ipsi BC, productæ occurant in H, I; [d] erit vtrumque rectangulum AH, GI, contentum sub duabus rationalibus longitudine cōmensurabilibus, Rationale. Rursus quia vtraq; D F, FE, longitudine cōmensurabilis est ipsi DE; & DE, longitudine incōmensurabilis est Rationali AB; (Nā si cōmensurabilis esset lōgitudine, cū & AE, sit eidem AB, longitudine commensurabilis; [e] essent AE, DE, longitudine quoque commensurabiles. Quod est absurdum. ponuntur enim solum potentia commēsurabiles:) [f] erit etiam vtraque ipsarum DF, FE, ipsi AB, longitudine incommensurabilis. Et quoniam vtraq; DF, FE, Rationali DE, commensurabilis, Rationalis est; Erunt propterea tam AB, DF, quam AB, FE, Rationales potentia tantum commensurabiles. Quare ducta FK, ipsi AB, parallela, [g] erit vtrumque rectangulum DK, F I, contentum sub Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, Medium.

[a] 18. deci.
[b] 16. deci.
[c] 12. deci.
[d] 20. deci.
[e] 12. deci.
[f] 14. deci.
[g] 22. deci.

IAM vero ipsi A H, [h] fiat quadratum æquale LM, & ipsi GI, æquale fiat quadratum N O, communem habens

[h] 14. secun.

habens cum L M, angulum L P M. [a] Erunt igitur quadrata LM, NO, circa eandem diametrum, quæ sit PQ. Perficiatur autem figura, vt vides. Quoniam igitur rectangulum sub AG, GE, per constructionem, æquale est quadrato ex FE; [b] erunt tres rectæ AG, FE, GE, proportionales; [c] Ac propterea cum AH, FI, GI, eandem cum ipsis habeant rationem; erit FI, mediū proportionale inter AH, GI, hoc est, inter quadrata LM, NO, illis æqualia. Est autem inter eadem LM, NO, per lemma propos. 14. huius lib. medium quoque proportionale LO. Igitur rectangula FI, LO, æqualia sunt: [d] Sed ipsi FI, æquale est DK, & ipsi LO, æquale est MN. Est ergo totum DI, toti gnomini VYX, cum quadrato NO, æquale. Est autem & totum AI, per constructionem, æquale quadratis LM, NO, Igitur & reliquum AC, reliquo quadrato TR, est æquale; Ac propterea recta T S, potest spatium A C. Dico TS, Apotomen esse.

[a] 26. sexti
[b] 17. sexti
[c] 8. sexti
[d] 36. primi

QVONIAM enim spatia AH, G I, ostensa sunt Rationalia; & eis æqualia sunt LM, NO, erunt quoq; quadrata LM, NO, Rationalia; atq; adeo & rectæ T O, SO, Rationales. Rursus quia FI, Medium est ostensum; erit & L O, illi æquale, Medium. Incommensurabilia ergo sunt L O, & NO, cum vnum sit Irrationale, alterum vero Rationale. Igitur rectæ T O, SO, [e] eandem rationem habentes cum LO, NO [f] longitudine incommensurabiles sunt; [g] Atque idcirco reliqua T S, Apotome est. Si spatium ergo contineatur sub Rationali, & Apotoma prima, &c. Quod demonstrandum erat.

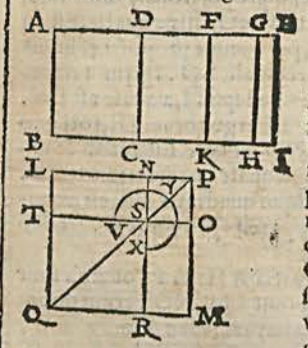
[e] 1. sexti
[f] 10. deci.
[g] 74. deci.

THEOR. 69. PROPOS. 93. 92. 87.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma secunda; Recta linea spatium potens, Mediæ est Apotome prima.

CON-

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & Apotoma ſecunda AD. Dico rectam, quæ ſpatium AC, poteſt, Mediæ Apotomen eſſe primam. Sit ipſi AD, congruens recta DE. Erunt ergo AE, DE, ex definitione Apotomæ ſecundæ, Rationales potentia tantum commenſurabiles, & congruens DE, longitudine commenſurabilis Rationali AB; Et denique AE, plus poterit, quam DE, quadrato rectæ ſibi commenſurabilis longitudine. Secetur DE, bifariã in F, & reliqua omnia conſtruãtur, vt in propoſitione præcedenti. Eruntque rurſus, vt in antecedenti propoſitione, AG, GE, longitudine commenſurabiles; Ac propterea & vtraque toti AE, longitudine commenſurabilis. Eſt autem AE, Rationali AB, longitudine incommenſurabilis: (Si enim commenſurabilis eſſet ipſi AB, longitudine, cum DE, eidem AB ponatur longitudine commenſurabilis; eſſent AE, DE, inter ſe quoque commenſurabiles longitudine. Quod eſt abſurdum, ponuntur enim potentia tantum commenſurabiles.) Igitur & vtraque ipſarum AG, GE, longitudine incommenſurabilis eſt eidẽ AB. Eſt autem vtraque AG, GE, Rationali AE, commẽſurabilis, Rationalis. Rationales ergo ſunt tam AB, AG, quam AB, GE, potentia ſolum commenſurabiles; Atque ideirco rectangulum vtrumq; AH, GI, contentum ſub Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus, Medium eſt. Rurſus quia vtraque DF, FE, ipſi DE, longitudine commenſurabilis eſt; & ponitur DE, Rationali AB, longitudine commenſurabilis; erit quoque, vt in ſcholio propoſitionis 12. huius lib. oſtendimus, eidem AB, Rationali longitudine commẽſurabilis vtraque DF, FE; atque adeo & Rationalis. Vtrumque ergo rectangulum DK, FI, contentum ſub Rationalibus longitudine commenſurabilibus, Rationale eſt. Iam vero, vt in præcedenti propoſ. demonſtrabimus rectam TS, poſſe ſpatium AC. Dico TS, Mediæ Apotomen eſſe primã.



a 18. deci.
b 16. deci.
c 12. deci.
d 14. deci.
e 22. deci.
f 20. deci.

QVONIAM enim AG, GE, longitudine ſunt cõmenſurabiles, erunt & AH, GI, eandem cum illis habentia rationem, commenſurabilia; atque adeo & LM, NO, quadrata illis æqualia, commenſurabilia erunt. Igitur & latera eorum, nempe rectæ TO, SO, ſaltem potentia erunt commenſurabiles. Sunt autem & Mediæ, quod quadrata LM, NO, Mediis AH, GI, æqualia, (oſtenſa. n. ſunt AH, GI, Media eſſe.) Media ſint. Et quoniam FI, atque adeo ſibi æquale LO, Rationale eſt, propterea que Medio NO, incommenſurabile; erunt rectæ TO, SO, eandem cum illis rationem habentes, longitudine incõmenſurabiles. Cum ergo & Mediæ ſint oſtenſæ, & commenſurabiles; erunt TO, SO, Mediæ potentia tantum commenſurabiles. Cum ergo contineant LO, quod Rationale eſt oſtenſum; erit TS, Mediæ Apotome prima. Si ergo ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma ſecunda, &c. Quod demonſtrandum erat.

a 10. deci.
b 10. deci.
c 75. deci.

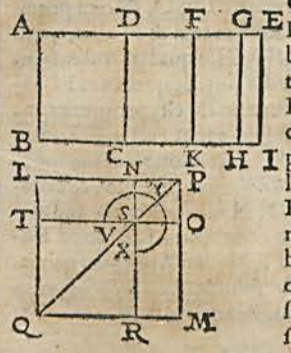
THEOR. 70. PROPOS. 94.

93. 88.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma tertia; Recta linea ſpatium potens, Mediæ eſt Apotome ſecunda.

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & Apotoma tertia AD. Dico rectam, quæ ſpatium AC, poteſt, eſſe Mediæ Apotomen ſecundam. Sit. n. ipſi AD, congruẽs DE. Erunt ergo, ex definitione Apotomæ tertiæ, AE, DE, Rationales potentia tantũ cõmenſurabiles, & neutra ipſarum AE, DE, longitudine commenſurabilis Rationali AB; Et denique AE, plus poterit, quam DE, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis.

surabilis. Secetur DE, bifariam in F, & cætera fiant, vt in propos. 92. eruntque rursus, vt ibi, AG, GE, longitudine inter se commensurabiles; [a] Ac propterea & vtraque tota AE, longitudine commensurabilis erit. Est autem AE, posita incommensurabilis longitudine Rationali AB. [b] Igitur & vtraque AG, GE, eidem AB, longitudine erit incommensurabilis. Cũ ergo vtraque AG, GE, Rationali AE, commensurabilis, Rationalis sit; erunt tam AB, AG, quã AB, GE, Rationales potentia solum commensurabiles; [c] Ac propterea vtrumque rectangulum AH, GI, Medium erit. Rursus quia DE, longitudine ponitur incommensurabilis Rationali AB; erit quoque vtraque DF, FE, ipsi DE, longitudine commensurabilis existens, [d] eidem AB, longitudine incommensurabilis. Cum ergo vtraque DF, FE, Rationali DE, cõmensurabilis, sit Rationalis; erunt tam AB, DF, quam AB, FE, Rationales potentia tantum commensurabiles; [e] atque propterea vtrumque rectangulum DK, FI, Medium erit. Similiter iam demonstrabimus, vt in propos. 92. rectam TS, posse spatium AC. Dico TS, esse Mediæ Apotomen secundam.

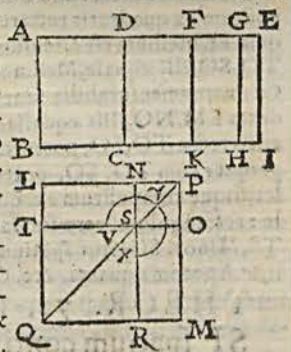


QVONIAM enim AH, GI, Media sunt ostensa; erunt & quadrata LM, NO, illis æqualia, Media; Ac propterea & rectæ TO, SO, Mediæ. Et quia AH, GI, eandem habentia rationem, quam AG, GE, quas ostendimus commensurabiles esse, [f] commensurabilia sunt; Erunt & quadrata LM, NO, commensurabilia. Igitur & rectæ TO, SO, commensurabiles, saltem potentia. At vero quia AE, DE, potentia solum sunt commensurabiles, hoc est, longitudine incommensurabiles, estque ipsi AE, longitudine ostensa commensurabilis GE, ipsi vero DE, commensurabilis est longitudine FE; erunt ex scholio propos. 14. huius lib. & GE, FE, longitudine incommensurabiles; [a] ac propterea GI, FI, eandem rationem habentia, quam GE, FE, hoc est, illis æqualia NO, LO, incommensurabilia. Quare TO, SO, eandem rationem habentes, quam LO, NO, longitudine incommensurabiles sunt. Ostensæ sunt autem Mediæ, & commensurabiles. Mediæ ergo sunt TO, SO, potentia solum commensurabiles. Et quoniam continent LO, Medium; (cum enim LO, æquale sit ipsi FI, vt eõstat ex propos. 92. quod Medium esse ostẽdimus; erit & LO, Medium.) [b] erit TS, Mediæ Apotome secunda. Si ergo spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma tertia, &c. Quod erat demonstrandum.

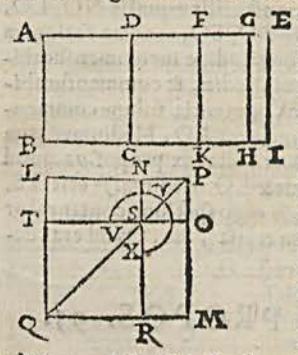
THEOR. 71. PROPOS. 95. 94. 89.

SI spatium continetur sub Rationali, & Apotoma quarta; recta linea spatium potens Minor est.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & Apotoma quarta AD. Dico rectam lineam, quę potest spatium AC, Minorem esse. Sit ipsi AD, congruens DE. Erunt ergo AE, DE, Rationales potentia solum commensurabiles, ex definitione Apotomæ quartæ; & AE, longitudine commensurabilis Rationali AB, & eadem AE, plus poterit, quã DE, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & reliqua oia fiant, vt prius.



[a] Erunt ergo AG, GE, incommensurabiles longitudine, quandoquidem AE, plus potest, quam DE, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; & ad AE, applicatum est rectangulũ sub AG, GE, æquale quartæ parti quadrati ex DE, desicienſque figura quadrata. Et quia AE, Rationalis est, & Rationali AB, longitudine commensurabilis; [b] erit rectangulum AI, Rationale. Rursus quia DE, Rationalis est, & Rationali AB, longitudine incommensurabilis; [c] erit DI, atque adeo & eius dimidium FI, Medium. Amplius cum AG, GE, sint longitudine incommensurabiles; [d] incommensurabilia erunt AH, GI, eandem cum illis proportionem habentia. Iam vero similiter demonstrabimus, vt in propos. 92. rectam TS, posse spatium AC. Dico TS, esse Minorem.



QVONIAM enim ex constructione, rectangulo AI, æquale est compositum ex quadratis LM, NO, rectarũ TO, SO: Est autem illud ostensum Rationale; erit & compositum ex quadratis rectarum TO, SO, Rationale. Itẽ quia FI, Medium est ostensum; erit & LO, cõtentum sub TO, SO, illi æquale, Medium. Denique quoniam AH, GI, incommensurabilia sunt demonstrata; erunt & quadrata LM, NO, illis æqualia, incommensurabilia; Atq; adeo rectæ TO, SO, potentia incommensurabiles. Quapropter cum TO, SO, potentia sint incommensurabiles, sitque compositum ex quadratis ipsarum, Rationale: rectangulum vero sub ipsis, Medium; [e] erit reliqua TS, Minor. Si igitur spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quarta, &c. Quod demonstrandum erat.

95. 90.

THEOR. 72. PROPOS. 96.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quinta; Recta linea spatium potens est, quę cum Rationali Medium totum efficit.

CONTINEATVR spatium AC, (repetita figura proximè antecedentis propositionis) sub Rationali *AB*, & Apotoma quinta AD. Dico rectam lineam, quæ spatium AC, potest, esse eam, quæ cum Rationali Mediũ totum efficit. Sit ipsi *AD*, congruens DE. Erunt ergo ex definitione Apotomæ quintæ, AE, DE, Rationales potentia tantum commensurabiles, & DE, Rationali AB, commensurabilis longitudine; Et denique AE, plus poterit, quam DE, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & reliqua construantur, vt prius. Erunt ergo rursus, vt in antecedenti propos. AG, GE, longitudine incommensurabiles. Et quia AE, Rationalis longitudine incommensurabilis est Rationali AB, vt in propos. 93. diximus; [a] erit rectangulum *AI*, Medium. Item quia DE, Rationalis est, & Rationali AB, longitudine commensurabilis; [b] erit DI, atque idcirco & eius dimidium FI, Rationale. Rursus erũt, vt in præcedenti propos. AH, GI, incommensurabilia; poteritq;, vt ostensum est in propos. 92. recta TS, spatiũ *AC*. Dico TS, esse eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit.

QVONIAM enim ostensum est *AI*, Medium esse; erit & compositum ex quadratis LM, NO, rectarũ TO, SO, illi æquale, Medium. Item quia demõstrauimus FI, Rationale esse; erit & LO, rectangulũ sub TO, SO, contentum, cum illi sit æquale, Rationale. Sunt autẽ & TO, SO, potentia incommensurabiles, vt in propos. antecedenti est demonstratum. Igitur cum TO, SO, potentia incommensurabiles sint, & compositum ex ipsarum quadratis, Medium; rectangulum vero sub ipsis, Rationale; [c] erit reliqua TS, ea, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Quocirca si spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quinta, &c. Quod erat demonstrandum.

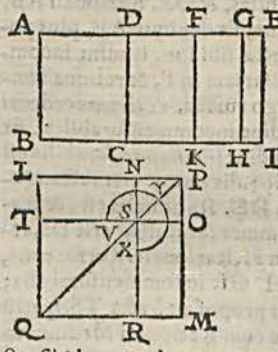
[a] 19. deci.
[b] 20. deci.
[c] 22. deci.
[d] 10. deci.
[e] 77. deci.
[a] 22. deci.
[b] 20. deci.
[c] 78. deci.

96.
91.

THEOR. 73. PROPOS. 97.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma ſexta; Recta linea ſpatium potens eſt, quæ cum Medio Medium totum efficit.

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & Apotoma ſexta AD. Dico rectam, quæ poteſt ſpatium AC, eſſe eam, quæ cum Medio Medium totũ efficit. Sit.n. ipſi AD, congruens DE. Erunt ergo ex definitione Apotomæ ſextæ, AE, DE, Rationales potentia tantum commenſurabiles, & neutra ipſarũ AE, DE, Rationali AB, cõmenſurabilis longitudine; Et denique AE, plus poterit, quam DE, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & reliqua conſtruantur, vt ſupra. Erunt ergo rurſus vt in propoſ. 95. AG, GE, longitudine incommenſurabiles. Et quia tam AE, quam DE, Rationalis eſt, & Rationali AB, longitudine incommenſurabilis; [a] erit tam AI, quam DI, atque adeo & huius dimidium FI, Medium. Eruntque vt in propoſ. 95. AH, GI, incommenſurabilia. Et quoniam AE, DE, potentia ſolum ſunt commenſurabiles; [b] Erunt AI, DI, eandem habentia cum illis proportionem, incommenſurabilia; Atque adeo cum DI, FI, commenſurabilia ſint, [c] erit FI, ipſi AI, incommenſurabile. Iam uero demõſtrabimus, vt in propoſ. 92. rectam TS, poſſe ſpatium AC. Dico TS, eſſe eam, quæ cum Medio Medium totum efficit.



[a] 22. deci.
[b] 10. deci.
[c] 14. deci.

QVO-

QVONIAM enim AI, Medium oſtendimus; erit & compoſitum ex quadratis LM, NO, rectarum TO, SO, illi æquale, Medium. Itẽ quia FI, Mediũ oſtẽſum eſt; erit & LO, illi æquale, contentumque ſub TO, SO, Medium. Rurſus quoniam FI, ipſi AI, eſt incommenſurabile, vt oſtendimus; erit quoque LO, ſub TO, SO, contentum, incommenſurabile compoſito ex quadratis rectarũ TO, SO; propterea quod LO, ipſi FI, & compoſitum ex quadratis rectarum TO, SO, ipſi AI, eſt æquale. Deniq; TO, SO, potentia incommenſurabiles ſunt, vt in propoſ. 95. eſt demonſtratum. Quamobrem cum TO, SO, ſint potentia incommenſurabiles, & compoſitum ex ipſarum quadratis, Medium; necnon & rectangulum ſub ipſis Medium, & adhuc compoſito ex quadratis ipſarum incommenſurabile; [a] erit reliqua TS, ea, quæ cum Medio Medium totum efficit. Si igitur ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma ſexta, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] 79. deci.

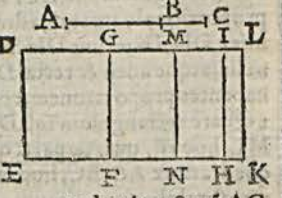
97.
92.

THEOR. 74. PROPOS. 98.

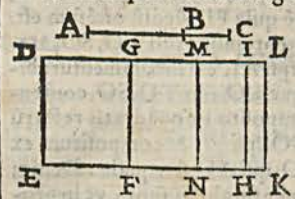
QVADRATVM Apotomæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen primam.

SIT Apotome AB, & ipſi congruens BC, ita vt AC, BC, ſint Rationales potentia ſolum commenſurabiles: [b] & ad Rationalem DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinẽ faciens DG. Dico DG, eſſe Apotomen primã. Ad eandem.n. DE, applicetur rectangulũ DH, æquale quadrato ex AC; & ad IH, aliud IK, æquale quadrato ex BC; ita vt totũ DK, æquale ſit compoſito ex quadratis rectarũ AC, BC.

[b] 45. primi



[a] 7. secun. BC. [a] Et quoniam compositum ex quadratis rectarum AC, BC, æquale est rectangulo bis sub AC, BC, vna cũ quadrato ex AB; si auferantur quadratũ ex AB, & rectangulum DF; relinquetur GK, rectãgulo bis sub AC, BC, æquale; atque adeo diuisa GL, bifariam in M, ductaq; MN, ipsi DE, parallela, erit



MK, æquale rectangulo sub AC, BC. Et quoniam AC, BC, Rationales sunt; erunt quoq; quadrata ex AC, BC, Rationalia; ideoque commensurabilia. [b] Cum ergo & compositum ex quadratis rectarum AC, BC, vtrique ipsorum sit commẽsurabile; erit & illud compositum, hoc est, illi æquale DK, Rationale. Quod cum applicetur ad Rationalem DE, [c] erit DL, Rationalis ipsi DE, longitudine commensurabilis. Rursus quia AC, BC, Rationales sunt potentia tantum commensurabiles; erit rectangulũ sub ipsis, atque adeo & eius duplum GK, Medium. Quod cum applicetur ad Rationalem GF, [d] erit GL, Rationalis ipsi GF, hoc est, ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Et quoniam DK, Rationale, & GK, Medium, hoc est, Irrationale, incommensurabilia sunt; [e] erunt rectæ DL, GL, eandem habentes proportionem, quam DK, GK, longitudine incommensurabiles. Quare cum & Rationales sint demonstratæ; erunt DL, GL, Rationales potentia tantum commensurabiles; [f] Ac propterea reliqua DG, Apotome erit. *Dico* & primam esse.

[b] 16. deci.
[c] 21. deci.
[d] 23. deci.
[e] 10. deci.
[f] 74. deci.

QVONIAM enim per lemma propos. 54. huius lib. rectangulum sub AC, BC, hoc est, MK, medium est, proportionale inter quadrata rectarũ AC, BC, hoc est, inter DH, IK; erunt DH, MK, IK, continue proportionalia; atque adeo & rectæ DI, ML, IL, eandem cum illis habentes proportionem, continue proportionales sunt. [g] Quare rectangulum sub DI, IL, æquale est quadrato ex ML, hoc est, quartæ parti quadrati ex GL. Et quoniam quadrata ex AC, BC, hoc est, illis æqualia DH, IK, commensurabilia sunt, [h] erunt rectæ DI, IL, eandem cum illis habentes proportionem, longitudine commensurabiles. Itaque cum duæ rectæ DL, GL, inæquales sint, & ad maiorem DL, applicatum rectãgulum sub DI, IL, æquale quartæ parti quadrati ex GL, minore, deficiensq; figura quadrata; atque sit ostensa DI, ipsi IL, longitudine commensurabilis; [a] poterit DL, plus quam GL, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine. Quare cum sit ostensum DG, esse Apotomen, & totam DL, plus posse, quam GL, congruentem, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, atque eandem totam commensurabilem esse longitudine Rationali DE; erit ex defin. DG, Apotome prima. Quadratum ergo Apotomæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen primam. Quod ostendendum erat.

[g] 27. deci.
[h] 10. deci.
[a] 18. deci.

THEOR. 75. PROPOS. 99. 98. 93.

QVADRATVM Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatũ latitudinem facit Apotomen secundam.

SIT Mediæ Apotome prima AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, sint Mediæ potentia solum commensurabiles, contineantque Rationale: [b] Et ad Rationalẽ DE, quadrato ex AB, æquale applicetur rectangulum DF, latitudinem faciens DG. Dico DG, Apotomen secũdam esse. Constituantur. n. eadẽ, quæ in antecedenti propos. ita vt rursus DH, IK, æqualia sint quadratis ex AC, BC; & GK, æquale ei, quod sub AC, BC, bis continetur; ac proinde MK, ei, quod sub AC, BC, continetur semel. Quoniam igitur AC, BC, Mediæ sunt potentia commensurabiles; erunt & earum quadrata, hoc est, illis æqualia, DH, IK, Media, & commensurabilia; [c] ac proinde & totum DK, vtrique illorum commensurabile erit. Igitur & Medium, per coroll. propos. 24. huius lib. Cũ ergo DK, applicetur ad Rationalẽ DE, [d] erit DL, Rationalis ipsi DE, longitudine incõmensurabilis.

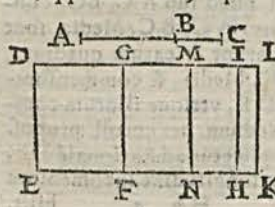
[b] 45. primi
[c] 16. deci.
[d] 23. deci.

bilis. Rursus quia rectangulum sub AC, BC, Rationale ponitur, erit quoque eius duplum GK, Rationale. Quod
a 21. deci. cum applicetur ad Rationalem DE, [a] erit GL, Rationalis longitudine cõmensurabilis ipsi DE. Quia vero DK,
b 10. deci. Medium, id est, Irrationale, & GK, Rationale, incommẽsurabilia sunt; [b] erunt rectæ DL, GL, eandem habentes cum illis rationem, longitudine incommensurabiles.
c 74. deci. Cum ergo Rationales sint ostensæ, erunt DL, GL, Rationales potentia tantum commensurabiles; [c] Ac propterea reliqua DG, Apotome est. Dico & secundam esse. Nam similiter, vt in præcedenti propos. demonstrabimus totam DL, plus posse, quam congruentem GL, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quare cum cõgruens GL, ostensa sit longitudine commensurabilis Rationali DE; erit ex defin. DG, Apotome secunda. Quadratum ergo Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen secundã. Quod ostendendum erat.

99. 94. THEOR. 76. PROPOS. 100.

QVADRATVM Mediæ Apotomæ secundæ ad Rationalem applicatũ, latitudinem facit Apotomen tertiam.

SIT Mediæ Apotome secũda AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, sint Mediæ potentia tantũ commen-
d 45. primi surabiles, contineantque Medium: [d] Et ad Rationalem DE, applicetur DF, æquale quadrato ex AB, latitudinẽ faciens DG. Dico DG, esse tertiam Apotomen. Eadem enim fiant, quæ supra. Ostẽdemus iã, vt in propos. præcedenti, DK, Medium esse,
e 23. deci. [e] atque adeo rectã DL, Rationalem ipsi DE, longitudine incommensurabilem. Et quia



quia rectangulum sub AC, BC, Medium est, atque ob id, & eius duplum GK; a erit quoque GL, Rationalis ipsi DE, lõgitudine incommẽsurabilis. Quia vero AC, BC, longitudine sunt incommensurabiles, estque vt AC, ad BC, ita per lemma 3. propos. 19. huius lib. quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, BC; b erit quadratum ex AC, incommensurabile rectangulo sub AC, BC. c Est autem quadrato ex AC, commensurabile compositum ex quadratis rectarum AC, BC; quod quadrata ex rectis AC, BC, potentia commensurabilibus descripta, commensurabilia sint; rectangulo vero sub AC, BC, commensurabile est rectangulum bis sub AC, BC. Igitur ex scholio propos. 14. huius lib. compositum ex quadratis rectarum AC, BC, hoc est, DK, incommensurabile est rectangulo bis sub AC, BC, hoc est, ipsi GK; d Atque adeo rectę DL, GL, eandem habẽtes rationem, quam DK, GK, longitudine incommensurabiles sunt. Sunt autem ostensę & Rationales. Rationales ergo sunt DL, GL, potentia solum commensurabiles; e Ac proinde reliqua DG, Apotome est. Dico esse & tertiam. Similiter enim, vt in propos. 98. demonstrabimus DL, totam plus posse, quam GL, congruentem, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Cum ergo neutra ipsarum DL, GL, Rationali DE, longitudine sit cõmensurabilis, vt demonstratũ est; erit ex defin. DG, Apotome tertia. Quadratũ igitur Mediæ Apotomæ secundę ad Rationalem applicatũ, &c. Quod erat ostendendum.

a 23. deci.
b 10. deci.
c 16. deci.
d 10. deci.
e 74. deci.

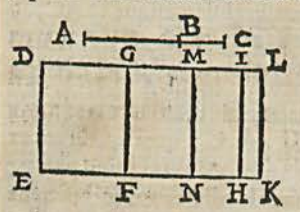
THEOR. 77. PROPOS. 101. 100. 95.

QVADRATVM Minoris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quartam.

SIT Minor AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, potentia incommensurabiles sint, facientesq; compositum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Rationale;

[a] 43. primi

nale; rectangulum vero sub AC, BC, Medium: [a] & ad Rationalem DE, applicetur spatium DF, quadrato ex AB, æquale latitudinem faciens DG. Dico DG, Apotomen esse quartam. Fiant enim omnia, vt in præcedentibus. Quoniã igitur compositũ ex quadratis rectarũ AC, BC, hoc est, illi æquale DK, Rationale est; [b] erit DL, Rationalis ipsi DE, longitudine commensurabilis. Item quia rectangulum sub AC, BC, atque adeo & eius duplum GK, Medium est; [c] erit GL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Rursus quoniam DK, Rationale, & GK, Irrationale, nempe Mediũ, incommensurabilia sunt; [d] erunt DL, GL, eandem cum ipsis habentes rationem longitudine incommensurabiles. Ostensæ sunt autem Rationales. Rationales ergo sunt DL, GL, potentia tantum commensurabiles; [e] Ac propterea reliqua DG, Apotome est. Dico & quartam esse. Quoniam enim AC, BC, potentia sunt incommensurabiles; Erunt etiam quadrata, hoc est, ipsis æqualia, DH, IK, incommensurabilia; [f] Ac propterea rectæ DI, IL, longitudine incommensurabiles. Cum ergo rectangulum sub DI, IL, æquale sit quadrato ex ML, id est, quartæ parti quadrati ex GL, vt in propos. 98. est demonstratum; [g] poterit DL, plus quam GL, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; quandoquidem ad DL, maiorem applicatum est rectangulum sub DI, IL, æquale quartæ parti quadrati ex GL, minore, deficiens figura quadrata, diuidensq; maiorem DL, in partes DI, IL, longitudine incommensurabiles. Itaque cum tota DL, plus possit quam congruens GL, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; sitq; eadẽ tota DL, Rationali DE, longitudine ostensa commensurabilis; erit ex defin. DG, Apotome quarta. Quadratũ igitur Minoris ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat demonstrandum.



[b] 21. deci.

[c] 23. deci.

[d] 10. deci.

[e] 74. deci.

[f] 19. deci.

[g] 19. deci.

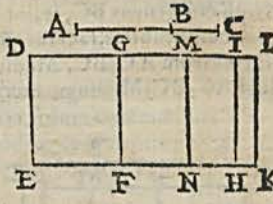
THEOR.

THEOR. 78. PROPOS. 102.

101. 96.

QVADRATVM eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quintam.

SIT recta cum Rationali Medium totum efficiens AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, potentia sint incommensurabiles, faciantq; compositum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Medium; rectangulum vero sub iisdem AC, BC, Rationale: [a] Et ad Rationalẽ DE, applicetur DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, Apotomen quintam esse. Constituantur.n.eadẽ, quæ supra. Qm̃ igitur compositum ex quadratis rectarum AC, BC, atqueadeo & illi æquale DK, Medium est; [b] erit DL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Item quia rectangulum sub AC, BC, atque adeo & eius duplum GK, Rationale est; [c] erit GL, Rationalis ipsi DE, longitudine commensurabilis. Et quia DK, Medium seu Irrationale, & GK, Rationale, incommensurabilia sunt; [d] erunt DL, GL, eandem cum ipsis habentes rationem, longitudine incommensurabiles. Sunt autem & Rationales ostensæ. Rationales ergo sunt DL, GL, potentia solum commensurabiles; [e] Atq; idcirco reliqua DG, Apotome est. Dico & quintam esse. Eodem.n.modo, vt in antecedẽti propos. demonstrabimus DL, totam plus posse quam GL, congruentem, quadrato sibi longitudine incommensurabilis. Quare cum congruens GL, demonstrata sit longitudine commensurabilis Rationali DE; erit ex defin. DG,



[a] 43. primi

[b] 23. deci.

[c] 21. deci.

[d] 10. deci.

[e] 74. deci.

DG, Apotome quinta. Quadratum ergo eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, &c. Quod demonstrandum erat.

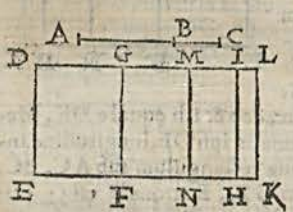
THEOR. 79. PROPOS. 103.

102. 97.

QVADRATVM eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen sextam.

SIT recta cum Medio Medium totum efficiens AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, potentia sint incommensurabiles, faciantque & compositum ex quadratis rectarum AC, BC, Medium, & rectangulum sub iisdem AC, BC, Medium, incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum:

[a] 45. primi



[a] Et ad Rationalem DE, applicetur quadrato ex AB, spatium æquale DF, latitudinem faciés DG. Dico DG, esse sextam Apotomen. Ead. n. fiant, quæ supra. Quoniá igitur tã compositũ ex quadratis rectarũ AC, BC, hoc est, illi æquale DK, quam rectangulũ sub AC, BC, atque adeo & eius duplum GK, Medium est;

[b] 23. deci.

[b] Erit tam DL, quam GK, Rationalis ipsis DE, longitudine incõmensurabilis. Et quia rectangulum sub AC, BC, incõmensurabile est composito ex quadratis rectarum AC, BC; Et sunt rectangulum sub AC, BC, & eius duplum GK, commensurabilia;

[c] 14. deci. [d] 10. deci.

[c] Erit & GK, eidem composito, hoc est, ipsi DK, incõmensurabile; [d] propterea q; rectæ DL, GL, eandem habentes rationem, quam DK, GK, longitudine incommensurabiles. Ostensæ sunt autem & Rationales. Rationales ergo sunt DL, GL, potentia solum

lum commensurabiles; [a] Atq; idcirco reliqua DG, Apotome est. Dico esse & sextam. Ostendemus. n. similiter, vt propos. 101. totam DL, plus posse, quam congruentem GL, quadrato rectæ sibi longitudine incommmensurabilis. Cum igitur neutra ipsarum DL, GL, commẽsurabilis sit lõgitudine Rationali DE; erit ex defin. DG, Apotome sexta. Quadratum ergo eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, &c. Quod erat ostendendum.

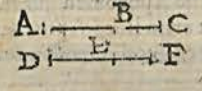
[a] 74. deci.

THEOR. 80. PROPOS. 104.

103. 98.

RECTA linea Apotomæ longitudine commensurabilis; & ipsa Apotome est, atque ordine eadem.

SIT Apotome AB, & ipsi congruẽs BC, ita vt AC, BC, sint Rationales potentia solum commensurabiles. Sit autem ipsi AB, longitudine commensurabilis DE. Dico & DE, Apotomen esse, atq; ordine eandẽ ipsi AB. [b] Fiat enim vt AB, ad DE, ita BC, ad EF. [c] Erit ergo tota AC, ad totam DF, vt AB, ad DE, vel vt BC, ad EF. Quoniam igitur AB, DE, longitudine ponuntur commensurabiles;



[b] 12. sexti [c] 12. quin.

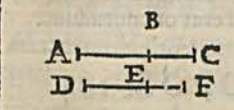
[c] Erunt quoque AC, DF, necnon & BC, EF, commensurabiles longitudine. Et quia AC, BC, sunt Rationales, erunt etiam illis commensurabiles DF, EF, Rationales. Rursus quia est vt AC, ad DF, ita BC, ad EF; & permutando, vt AC, ad BC, ita DF, ad EF: & sunt AC, BC, potentia solum commensurabiles; erunt quoq; ex iis, quæ ad propos. 10. huius libri demonstrauimus, DF, EF, potentia tantum commensurabiles. Quare cum & Rationales sint ostensæ, [c] reliqua DE, Apotome est. Dico & ipsi AB, ordine eandem esse. Posit enim primum AC, plus quam BC, quadrato rectæ sibi longitudine commẽ surabilis. Quo posito, [f] poterit & DF, plus quam EF, qua

[d] 10. deci.

[c] 74. deci.

[f] 15. deci.

quadrato rectæ sibi longitudine commẽsurabilis. Si igitur AC, longitudine sit commẽsurabilis Rationali expositæ, vt AB, sit Apotome prima; [a] erit quoque DF, longitudine commensurabilis Rationali expositę, cum tam Rationalis exposita, quam DF, eidem AC, sit longitudine commensurabilis. Igitur ex defin. erit quoque DE,



Apotome prima, nempe ordine eadem ipsi AB. Si vero BC, sit longitudine commẽ surabilis Rationali; erit eodem modo EF, Rationali longitudine commensurabilis; Atque adeo vtraque AB, DE, ex defin. erit Apotome secunda. Si denique neutra ipsarum AC, BC, commensurabilis sit longitudine expositæ Rationali; [b] erit quoque neutra ipsarum DF, EF, eidem Rationali longitudine commensurabilis. Quare vtraque AB, DE, ex defin. erit Apotome tertia.

POSSIT iam AC, plus quam BC, quadrato rectæ sibi longitudine incommẽsurabilis. Quo posito, [c] poterit & DF, plus quam EF, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quare vt prius, ostendemus DE, esse Apotomen quartam, quintam, vel sextam, &c. Recta ergo linea Apotomæ longitudine commensurabilis, &c. Quod ostendendum erat.

[a] 12. deci.

[b] 14. deci.

[c] 15. deci.

SCHOLIVM.

IDEM hic dicemus de Apotomis, quod ad propos. 67. huius lib. de lineis ex binis nominibus scripsimus. Nimirum, si recta DE, commensurabilis sit ipsi AB, potentia tantum, eodem modo demonstrari posse, (si loco vocis: longitudine commensurabilis: vtamur voce: potentia tantum commensurabilis:) & DE, Apotomen esse: At non posse inferri, illam esse ordine eãdem ipsi AB. Non enim sequitur, si tota AC, longitudine sit commensurabilis Rationali expositæ, & DF, eidem esse commensurabilem lõgitudine, propterea quod non vtraque, nempe Rationalis exposita, & DF; eidem AC, longitudine commensurabilis est; sed Rationalis quidem commensurabilis

longitudine; At vero DF, potentia tantum ex hypothesi. Immo vero, si AB, sit Apotome prima, secunda, quarta, vel quinta, fieri nullo modo potest, vt DE, illi potentia tãtum commensurabilis, sit Apotome eadem ordine.

SIT *enim AB, prima Apotome, secũda, quarta, vel quinta, eique conguens BC; & sit DE, ipsi AB, potentiæ tantum commensurabilis, quam quidem, vt in theoremate, ostendemus Apotomen esse, eique congruentem EF; & partes AB, BC, ad partes DE, EF, eandem proportionem habere cum totis AC, DF. Dico nullaratione DE, Apotomen esse ordine eandem ipsi AB. Nam si fieri potest, sit vtraque Apotome prima. Quo posito, erit tam AC, tota, quam tota DF, ex definitione Apotomæ primæ, Rationali expositæ commensurabilis longitudine; [a] atque adeo & inter se longitudine commensurabiles erunt AC, & DF. Quare cum sit vt AC, ad DF, ita AB, ad DE; [b] erunt quoque AB, DE, longitudine commensurabiles. Quod est absurdum. ponitur enim DE, ipsi AB, potentia solum commensurabilis. Non ergo vtraque AB, DE, Apotome prima est. Eodem modo neque quarta Apotome erit. Sed neque secunda, vel quinta. Esset enim vtraque congruens BC, EF, ex defin. longitudine commensurabilis Rationali expositæ, atque adeo & ipsa inter se. Quocirca & AB, DE, inter se longitudine forent commensurabiles. quod non ponitur.*

[a] 12. deci.

[b] 10. deci.

SEMPER *tamen verum est, si AB, est Apotome prima, vel secunda, vel tertia, rectã DE, quæ ipsi AB, potentia solũ est cõmensurabilis, esse quoq; vnã ex illis tribus, licet ordine non eadẽ sit. Nã hoc posito, poterit AC, plus q̃ BC, quadrato rectæ sibi lõgitudine commẽ surabilis. Cũ ergo sit vt AC, ad BC, ita DF, ad EF; [c] poterit quoq; DF, plus quam EF, quadrato rectæ lõgitudine sibi cõmensurabilis. Quare ex defin. erit DE, Apotome prima, vel secũda, vel tertia. Eodẽ modo si AB, est Apotome quarta, vel quinta, vel sexta, ita vt AC, plus possit, q̃ BC, quadrato rectæ sibi lõgitudine incõmensurabilis; erit quoq; DE, Apotome quarta, vel quinta, vel sexta, quãuis ordine nõ eadẽ ipsi AB: quia rursus, cũ sit vt AC, ad BC, ita DF, ad EF, [d] poterit quoq; DF, plus quam EF, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quare ex defin. erit AB, Apotome quarta, vel quinta, vel sexta.*

[c] 15. deci.

[d] 15 deci.

IN

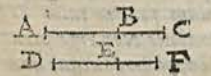
IN sequentibus autem quatuor propositionibus necessario erit DE, eadem ordine ipsi AB, licet potentia solum illi fuerit commensurabilis.

104. 99.

THEOR. 81. PROPOS. 105.

RECTA linea Mediæ Apotomæ commensurabilis; & ipsa Mediæ Apotome est, atque ordine erit.

SIT Mediæ Apotome quæcunque A B, eique congruens B C, ita vt A C, BC, sint Mediæ potentia solum commensurabiles: Sit autem ipsi AB, commensurabilis DE, siue lõgitudine & potẽtia, siue potẽtia tm. Dico & DE, Mediæ Apotomẽ esse, & ipsi A B, ordine eandem,



[a] Fiat.n. vt A B, ad D E, ita BC, ad EF. Erit ergo tota AC, ad totam DF, vt AB, ad DE, & vt BC, ad EF. Quoniam igitur AB, DE, commensurabiles ponuntur vel longitudine & potentia, vel potentia tantum; [c] erunt quoque BC, EF, & AC, DF, eodẽ modo commensurabiles. Et quia AC, BC, Mediæ sunt, [d] erunt quoque DF, EF, illis commensurabiles, Mediæ. Rursus, quia est vt AC, ad DF, ita BC, ad EF; & permutando vt AC, ad BC, ita DF, ad EF; Sunt autẽ AC, BC, potentia solum commensurabiles, erunt etiam, ex scholio propos. 10. huius lib. DF, EF, solum potentia commensurabiles. Quare cum DF, EF, Mediæ sint ostensæ; [e] erit reliqua DE, Mediæ Apotome. *Dico* & eandem esse ordine ipsi AB. Quoniã.n. est AC, ad BC, ita DF, ad EF; & vt AC, ad BC, ita est quadratum ex A C, ad rectangulum sub AC, BC, ex lemmate 3. propos. 19. huius lib. & vt DF, ad EF, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, EF; erit quoque vt quadratum ex A C, ad rectangulum sub AC, BC, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, E F; Et permutando vt quadratum ex AC,

[a] 12. sexti
[b] 12. quin.
[c] 10. deci.
[d] 24. deci.
[e] 75. vel 76. decimi.

ex AC, ad quadratum ex DF, ita rectangulum sub AC, BC, ad rectangulum sub DF, EF. Igitur cum quadratũ ex AC, commensurabile sit quadrato ex D F, quod rectæ AC, DF, ostensæ sint cõmensurabiles; [a] erit & rectangulum sub A C, B C, rectangulo sub D F, EF, commensurabile. Quare si rectangulum sub AC, BC, sit Rationale, ita vt AB, sit Medię Apotome prima; Erit etiam rectangulum sub DF, EF, Rationale, cum illi sit commensurabile; [b] atque adeo & D E, Mediæ Apotome prima erit. Si vero rectangulum sub AC, BC, sit Medium, ita vt AB, sit Mediæ Apotome secunda; erit quoq; rectangulum sub DF, E F, ei commensurabile, Medium ex coroll. propos. 24. huius lib. [c] Ac propterea & DE, Mediæ Apotome secũda erit. Recta ergo linea Mediæ Apotomæ commensurabilis, &c. Quod erat ostendendum.

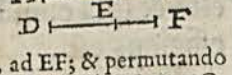
[a] 10. deci.
[b] 75. deci.
[c] 76. deci.

105. 116. 100.

THEOR. 82. PROPOS. 106.

RECTA linea Minori commensurabilis; & ipsa Minor est.

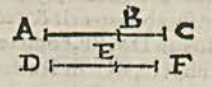
SIT Minor AB, ipsique congruens BC, ita vt AC, BC, potentia sint incommẽsurabiles, facientesque compositum quidẽ ex quadratis rectarum AC, BC, Rationales; rectangulũ vero sub iisdẽ AC, BC, Medium. Sit autẽ DE, ipsi AB, cõmensurabilis siue lõgitudine & potẽtia, siue potẽtia tantũ. Dico & DE, Minorẽ esse. Fiant.n. eadem, quæ supra, ita vt rursus AB, BC, ad DE, EF, eandẽ habeãt rationem, quam AC, ad DF. Erunt ergo rursus, vt in antecedenti propos. DF, EF, ipsis AC, BC, commensurabiles siue longitudine & potentia, siue potẽtia tantum. Et



quoniã est, vt AC, ad DF, ita BC, ad EF; & permutando vt AC, ad BC, ita DF, ad EF; [d] erit vt quadratũ ex AC, ad quadratũ ex BC, ita quadratũ ex DF, ad quadratum ex EF; & cõponendo vt cõpositum ex quadratis rectarũ AC, BC, ad quadratũ ex BC, ita compositũ ex quadra-

[d] 22. sexti

tis rectarum DF, EF, ad quadratum ex EF; & permutando vt compositum ex quadratis rectarum AC, BC, ad cõpositum ex quadratis rectarum DF, EF, ita quadratum ex BC, ad quadratum ex EF. Est autem quadratũ ex BC, commẽsurabile quadrato ex EF; quod rectas BC, EF, ostenderimus commensurabiles esse. [a] Igitur & compositum ex quadratis rectarum AC, BC, compositio ex quadratis rectarum DF, EF, commensurabile est. Est autem compositum ex quadratis rectarum AC, BC, ex hypothesi, Rationale. Igitur & cõpositum ex quadratis rectarum DF, EF, ex 9. defin. Rationale est. Rursus quoniam, vt in antecedenti propos. demonstrabimus rectangulum sub AC, BC, rectãgulo sub DF, EF, esse commensurabile: ponitur autem rectangulum sub AC, BC, Medium; Erit quoque rectãgulum sub DF, EF, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium. Et quia est vt AC, ad BC, ita DF, ad EF, suntq. AC, BC, potentia incommensurabiles; [b] erunt etiam DF, EF, potentia incommensurabiles. Quam ob rem cum DF, EF, potentia sint incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex quadratis rectarũ DF, EF, Rationale, rectangulum vero sub ijsdem DF, EF, Medium; [c] erit DE, Minor. Recta ergo linea Minori commensurabilis, &c. Quod erat demonstrandum.



[a] 10. deci.

[b] 10. deci.

[c] 77. deci.

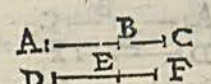
PROBL. 83. PROPOS. 107.

106.117. 101.

RECTA linea commẽsurabilis ei, quæ cum Rationali Medium totum efficit; & ipsa cum Rationali Medium totũ efficiens est.

SIT recta AB, cum Rationali Mediũ totũ efficiens, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, sint potentia incommensurabiles, facientesque compositum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Medium; at rectangulum sub

sub AC, BC, Rationale: Sit autẽ DE, ipsi AB, commensurabilis quocunque modo. Dico & DE, esse, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Constructis enim iisdem, quæ supra, ostendemus vt in antecedẽti propos. compositum ex quadratis rectarum AC, BC, commensurabile esse composito ex quadratis rectarum DF, EF. Cum ergo illud ponatur Medium, erit & hoc, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium. Rursus vt in propos. 105. demonstrabimus rectangulum sub AC, BC, commensurabile esse rectangulo sub DF, EF. Cum ergo illud Rationale ponatur, erit & hoc Rationale, ex defin. 9. Sunt denique eodẽ modo, vt in præcedenti propos. est probatum, rectæ DF, EF, potẽtia incõmensurabiles. Igitur cũ DF, EF, incommensurabiles sint potentia, faciantque compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, rectangulum vero sub ipsis, Rationale; [a] erit DE, quæ cum Rationali Medium, &c. Quod demonstrandum erat.



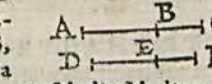
[a] 78. deci.

THEOR. 84. PROPOS. 108.

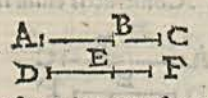
107. 102.

RECTA linea commẽsurabilis ei, quæ cum Medio Medium totum efficit; & ipsa cum Medio Medium totum efficiens est.

SIT recta AB, cum Medio Medium totũ efficiens, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, sint potentia incõmensurabiles, facientesque compositum ex quadratis ipsarum Medium, & rectãgulum sub ipsis Medium quoq; & adhuc incommensurabile composito ex ipsarum quadratis; Sit autẽ DE, ipsi AB, quomodolibet commensurabilis. Dico & DE, esse, quæ cum Medio Medium totum efficit. Constructis enim iisdem, quæ supra, probabimus similiter,



similiter, vt in propos. 106. compositum ex quadratis rectarum AC, BC, commensurabile esse composito ex quadratis rectarum DF, EF.



Cum ergo illud Medium ponatur, erit & hoc ex coroll. propos. 24. huius lib. Mediũ. Rursus vt in propos. 105. ostendemus, rectangulum sub AC, BC, commensurabile esse rectangulo sub DF, EF. Cum ergo illud sit Medium, erit & hoc Medium, ex eodem coroll. Item vt in propos. 106. erunt quoque DF, EF, potentia incommensurabiles. Postremo quia compositum ex quadratis rectarum AC, BC, commensurabile est compositum ex quadratis rectarum DF, EF, vt dictum est; & rectangulo sub AC, BC, commensurabile rectangulũ sub DF, EF: Sunt autem compositũ ex quadratis rectarum AC, BC, & rectangulum sub AC, BC, per hypothesin, incommensurabilia; erunt quoque ex scholio propos. 14. huius lib. compositum ex quadratis rectarum DF, EF, incommẽsurabilia. Quocirca cum DF, EF, potentia sint incommensurabiles, & compositum ex ipsarum quadratis, Medium; necnon & rectangulum sub ipsis, Medium; incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis; [a] erit DE, quæ cum Medio Medium totum efficit. Recta igitur linea commensurabilis ei, quæ cum Medio, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 79. deci.

108. 103.

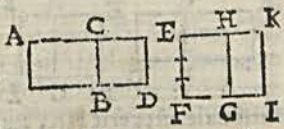
THEOR. 85. PROPOS. 109.

MEDIO à Rationali detracto; Recta linea, quæ reliquum spatium potest, vna ex duabus Irrationalibus fit, vel Apotome, vel Minor.

DETRAHATVR a Rationali AD, Medium CD. Dico rectam, quæ potest spatium reliquum AB, esse vel Apotomen, vel Minorẽ. Exponatur enim Rationalis EF, [b] ad quam applicetur rectangulum EG, æquale ipsi AB, &

[b] 45 primi

AB, & ad GH, aliud HI, æquale ipsi CD, ita vt totum EI, toti AD, sit æquale. Quoniam igitur EI, æquale Rationali AD, Rationale est; [a] erit EK, Rationalis, Rationali EF, longitudine commensurabilis. Rursus quia HI, Medio CD, æquale Medium est, [b] erit HK, Rationalis, ipsi EF, lõgitudine incõmensurabilis. Itaque cum EK, quidem sit longitudine cõmensurabilis ipsi EF; at HK, eidem EF, longitudine incõmensurabilis, [c] erunt EK, HK, longitudine incommensurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo sunt potentia tantum commensurabiles: [d] propterea quæ reliqua EH, Apotome est, & ei congruens HK. Aut igitur EK, plus potest quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, aut incommensurabilis. Si plus põt EK, quam HK quadrato rectæ lineæ commensurabilis sibi longitudine, cum tota EK, ostensa quoque sit longitudine commensurabilis Rationali EF; erit ex defin. EH, Apotome prima. Quare recta potens spatium EG, contentum sub Rationali EF, & Apotoma prima EH, hoc est, spatium AB, sibi æquale, [e] Apotome est. Si vero EK, plus potest, quam HK, quadrato rectę sibi longitudine incommensurabilis, cum tota EK, sit ostensa commensurabilis longitudine Rationali EF; erit ex definitione EH, Apotome quarta. Quapropter recta potés spatium EG, contentum sub Rationali EF, & Apotoma quarta EH, hoc est, spatium AB, illi æquale, [f] Minor est. Medio ergo a Rationali detracto, &c. Quod ostendendum erat.



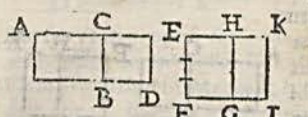
[a] 21. deci.
[b] 23. deci.
[c] 13. deci.
[d] 74. deci.
[e] 92. deci.
[f] 95. quin.

THEOR. 86. PROPOS. 110.

109. 104.

RATIONALI a Medio detracto; aliæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome prima, vel cum Rationali Medium totum efficiens.

DETRAHATVR a Medio AD, Rationale CD. Dico rectam, quæ reliquum ſpatium *AB*, poteſt, eſſe vel Mediæ Apotomen primam, vel eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Eadem.n.conſtruatur, quæ ſupra.



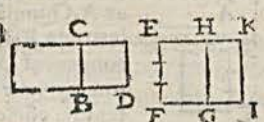
Et quia E I, *Medio* AD, æquale, Medium eſt; erit E K, Rationalis ipſi E F, longitudine incommenſurabilis. Item quia HI, æquale Rationali CD, Rationale eſt; erit HK, Rationalis ipſi EF, longitudine commenſurabilis. Itaque cum H K, quidem ipſi E F, ſit commenſurabilis longitudine, at EK, eidem EF, longitudine incommenſurabilis; erunt HK, *EK*, longitudine incommenſurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo ſunt potentia ſolum commenſurabiles; Ac proinde reliqua *EH*, Apotome eſt, & ei congruens H K. Aut igitur *EK*, plus poteſt, quam HK, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, aut incommenſurabilis. Si *EK*, plus poteſt, quam HK, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, cum congruens HK, oſtenſa ſit longitudine commenſurabilis Rationali *EF*; erit ex defin. EH, Apotome ſecunda. *Recta* igitur potens ſpatium EG, contentum ſub Rationali EF, & *Apotoma* ſecunda EH, hoc eſt, ſpatiũ AB, illi æquale, Mediæ eſt Apotome prima. Si vero EK, plus poteſt, quam HK. quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis, cum congruens H K, ſit oſtenſa commenſurabilis longitudine Rationali EF; erit EH, Apotome quinta, ex defin. Recta igitur potens ſpatium *EG*, contẽtum ſub Rationali EF, & *Apotoma* quinta E H, hoc eſt ſpatiũ illi æquale AB, eſt ea, quæ cum Rationali Mediũ totum efficit. Quam ob rem Rationali a *Medio* detracto, &c. Quod oſtendendum erat.

a 23. deci.
b 21. deci.
c 13. deci.
d 74. primi
e 93. deci.
f

110. THEOR. 87. PROPOS. 111.

105. MEDIO a Medio detracto, quod incommenſurabile toti; reliquæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome ſecunda, vel cum Medio Medium totum efficiens.

DETRAHATVR a *Medio* AD, Medium CD, quod incommenſurabile ſit toti AD. Dico rectam, quæ reliquum ſpatium *AB*, poteſt, eſſe vel Mediæ Apotomẽ ſecundam, vel eam, quæ cum Medio Medium totum efficit. Cõſtructis enim iiſdẽ, quæ ſupra; quoniã EI, HI, Mediis AD, CD, æqualia Media ſunt; erũt EK, HK, Rationales ipſi EF, longitudine incommenſurabiles. Et quia *AD*, CD, hoc eſt, EI, HI, ponuntur incommenſurabilia; erunt EK, HK, eandem cum illis habentes rationem, longitudine incommenſurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo ſunt potentia tantũ cõmenſurabiles; Ac propterea reliqua EH, Apotome eſt, & ei congruens HK. Aut igitur EK, plus poteſt, quam H K, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, aut incommenſurabilis. Si plus poteſt EK, quam HK, quadrato rectæ ſibi longitudine commẽſurabilis, cum neutra ipſarum EK, HK, Rationali *EF*, longitudine commenſurabilis ſit oſtenſa; erit ex defin. EH, Apotome tertia. Quocirca recta potens ſpatiũ EG, contentũ ſub Rationali EF, & Apotoma tertia EH, hoc eſt, ſpatium AB, illi æquale; Mediæ Apotome eſt ſecunda. Si vero EK, plus poteſt, quam HK, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis, cum neutra ipſarum EK, HK, Rationali EF, ſit longitudine commenſurabilis, vt demonſtrauimus; erit ex defin. E H, *Apotome* ſexta. Quam ob rem recta potens ſpatium EG, contentum ſub Rationali EF, & Apotoma ſexta E H, hoc eſt, ſpatium *AB*, illi æquale, eſt ea, quæ cum Medio Medium totum efficit. Medio ergo a Medio detracto, &c. Quod demonſtrandum erat.



a 23. deci.
b 10. deci.
c 74. deci.
d 94. deci.
e 97. deci.

III. 106.

THEOR. 88. PROPOS. 112.

APOTOME non est eadem, quæ ex binis nominibus.

SIT *A*potome *A*, quæcunque. *D*ico A, non esse eandem, quæ ex binis nominibus. Sit enim, si fieri potest, A, aliqua ex binis nominibus. Exposita autē Rōnali BC, [a] applicetur ad BC, rectangulum CD, æquale quadrato ex A. Quoniā igitur A, Apotome est; [b] erit latitudo BD, *A*potome prima. Sit ergo ei congruens DE. Erunt igitur ex defin. Apotomæ primæ BE, DE. Rationales potentia tantum cōmensurabiles, poteritq; BE, plus quam DE, quadrato rectę sibi longitudine [c] commensurabilis, & ipsa BE, Rationali BC, commensurabilis erit lōgitudine. Rursus quia A, ponitur esse quoque ex binis nominibus; [c] erit latitudo eadem BD, ex binis nominibus prima. Sit ergo maius ipsius nomē BF, Erunt igitur ex defin. eius, quę ex binis nominibus prima est, BF, FD, *R*ationales potentia solum commensurabiles, poteritque BF, plus quam FD, quadrato rectæ commensurabilis sibi longitudine, & ipsa BF, Rationali BC, lōgitudine commensurabilis erit. Itaque cum tam BE, quam BF, longitudine sit commensurabilis eidem BC; [d] erunt quoque *BE*, BF, inter se commensurabiles longitudine. Igitur cum tota BE, sit longitudine commēsurabilis parti BF, erit & eadem BE, reliquę parti FE, longitudine commensurabilis, ex coroll. prop. 16. huius libri; Atque adeo cum BE, Rationalis sit, & FE, Rationalis erit. Quoniam vero duarum linearum BE, FE, longitudine commensurabilium, ipsi BE, longitudine incommensurabilis est ipsi DE; (quod BE, DE, *R*ationales sint potentia solum commensurabiles), [e] erit quoque altera *FE*, eidem *D*E, incommensurabilis longitudine. Sed & vtraque FE, DE, Rationalis est ostensa. Rationales ergo sunt *FE*, *D*E, potentia solum

[a] 45. primi
[b] 98. deci.
[c] 61. deci.
[d] 12. deci.
[e] 14. deci.

solum commensurabiles. Quare reliqua FD, [a] Apotome est; *A*tque adeo Irrationalis. Ostensa est autem & Rationalis. Quod est absurdum. Non ergo *A*, Apotome existens eadem est, quæ ex binis nominibus. Quod demonstrandum erat.

[a] 74. deci.

COROLLARIVM.

EX demonstratis quoque facile colligere licebit, Apotomen, & cæteras ipsam consequentes Irrationales lineas, neque Mediæ, neque inter se esse easdem.

QVADRATVM enim Mediæ ad Rationalem lineam applicatum, [b] latitudinem efficit Rationalem, ipsi Rationali longitudine incommensurabilem. [b] 23. deci.

AT quadratum Apotomæ ad Rationalem applicatum, [c] latitudinem efficit Apotomen primam. [c] 98. deci.

ET quadratum Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum, [d] latitudinem efficit Apotomen secundam. [d] 99. deci.

QVADRATVM vero Mediæ Apotomæ secundæ ad Rationalem applicatum. [e] latitudinem efficit Apotomen tertiam. [e] 100. deci.

QVADRATVM deinde Minoris ad Rationalem applicatum, [f] latitudinem efficit Apotomen quartam. [f] 101. deci.

AT vero quadratum eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, [g] latitudinem efficit Apotomen quintam. [g] 102 deci.

QVADRATVM denique eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, [h] latitudinem efficit Apotomen sextam. [h] 103. deci.

ITAQVE cum hæ latitudines differant & a latitudine Mediæ, & inter se; a latitudine quidem Mediæ, quod hæc Rationalis sit, illæ vero Irrationales;

inter

inter se autem, quod ordine non sint eadẽ Apotomæ: Manifestum est, Apotomen, & reliquas Irrationales ipsam consequentes, & a Media, & inter se se differre.

QVONIAM vero in hoc theoremate demonstrauimus, Apotomen eandem non esse, quæ ex binis nominibus: Et quadrata Apotomæ, & cæterarum quinque Irrationalium eam consequentium, ad Rationalem applicata, latitudines efficiunt Apotomen primam, secundam, tertiam, quartam, quintam, & sextam: At uero quadrata eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarũ quinque Irrationaliũ, quæ ipsam sequuntur, ad Rationalẽ applicata, latitudines efficiũt ex binis nominibus primam, secundã, tertiam, quartam, quintã, ac sextam; liquido constat, latitudines Apotomæ, & aliarum Irrationalium, quæ post ipsam, easdem non esse latitudinibus eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarum post ipsam Irrationalium; quandoquidem nulla Apotome eadem est, quæ ex binis nominibus aliqua. Igitur & Apotome, & quæ ipsam sequuntur, differunt ab ea, quæ ex binis nominibus, & quæ post ipsam. Quam ob rem cum & tam illæ, quam hæ a Media differant; efficitur, Rationali quapiam exposita tredecim numero esse lineas Irrationales inter se se differentes, de quibus hactenus disputauimus; Hæ scilicet.

1. Media.
2. Ex binis nominibus, cuius sex sunt species inuentæ.
3. Ex binis Medijs prima.

4. Ex binis Medijs secunda.
5. Maior.
6. Rationale ac Medium potens.
7. Bina Media potens.
8. Apotome, cuius etiam species sex sunt repertæ.
9. Mediæ Apotome prima.
10. Mediæ Apotome secunda.
11. Minor.
12. Cum Rationali Medium totum efficiens.
13. Cum Medio Medium totum efficiens.

THEOR. 89. PROPOS. 113. 112. 0.

QVADRATVM Rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus, applicatum, latitudinem facit Apotomen, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus eius, quæ est ex binis nominibus,

& in eadem proportione; & adhuc Apotome, quæ fit, eundem habet ordinem, quem ea, quæ est ex binis nominibus.

SIT Rationalis *A*, & ex binis nominibus BC, cuius maius nomen BD,[a] & ad BC, applicetur rectangulum BE, æquale quadrato ex *A*, latitudinem faciens BF. Dico BF, esse *A*potomen, cuius nomina, hoc est, tota linea, & ipsi congruens, commensurabilia sunt nominibus BD, DC, ipsius BC, ex binis nominibus; & in eadem proportione; & adhuc *A*potomē BF, esse ordine eandem ipsi BC, ex binis nominibus.[b] Applicetur enim rursus ad DC, minus nomen, rectangulum CG, æquale eidem quadrato ex A; atque adeo rectangulo BE, latitudinem faciens DG; sitque ipsi DG, æqualis BH. Et quoniam æqualia sunt BE, CG;[c] erit vt BC, ad DC, ita DG, hoc est, sibi æqualis BH, ad BF. Et diuidendo vt BD, ad DC, ita HF, ad FB: Est autem BD, maior, quam DC. Igitur & HF, maior est, quam FB. Ponatur FI, ipsi FB, æqualis;[d] & fiat vt HI, ad IF, ita FB, ad BK. Erit ergo componendo vt HF, ad IF, hoc est, ad sibi æqualē BF, ita FK, ad BK. Ostensum est autem esse vt HF, ad BF, ita BD, ad DC. Igitur erit quoque vt BD, ad DC, ita FK, ad BK. At BD, DC, (cum sint nomina ipsius BC, ex binis nominibus) Rationales sunt potentia tantum commensurabiles.[e] Igitur & FK, BK, potentia solum commensurabiles sunt.

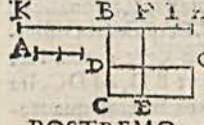
RVRSVS quia est vt HF, ad BF, ita FK, ad BK,[f] erit quoque HF, FK, antecedentes simul, nempe tota HK, ad BF, & BK, consequentes simul, hoc est, ad totam FK, vt FK, ad BK. Ac propterea FK, media proportionalis est inter HK, BK. Quare vt HK, prima ad BK, tertiam, ita erit, per coroll. propos. 20. lib. 6. quadratum ex HK, prima ad quadratum ex FK, secunda. Quia vero CG, cum Rationale sit, (est enim quadrato Rationalis A, æquale) ad Rationalem DC, applicatum,[g] facit DG, latitudinem Rationalem, ipsi DC, longitudine commensurabilem; Erit quoque HB, ipsi DG, æqualis, Rationalis & longitudine cōmensurabilis ipsi DC. Et quoniam ostensum est, esse vt BD, ad DC, ita FK, ad BK: Vt autem FK, ad BK, ita HK, ad FK; erit quoque vt BD, ad DC, ita HK, ad FK.[a] Igitur vt quadratum ex BD, ad quadratum ex DC, ita quadratum ex HK, ad quadratum ex FK. At quadratum ex BD, commensurabile est quadrato ex DC, (quod rectæ BD, DC, sint Rationales potentia commensurabiles, cum sint nomina ipsius BC, ex binis nominibus.)[b] Commensurabile igitur erit quoque quadratum ex HK, quadrato ex FK. Sed fuit vt quadratum ex HK, ad quadratū ex FK, ita recta HK, ad BK.[c] Igitur longitudine commensurabilis est HK, ipsi BK; atque adeo & reliquæ BH, ex coroll. propos. 16. huius lib. Ostensa est autem BH, Rationalis. Igitur & HK, illi commensurabilis, Rationalis est; ac propterea & BK, ipsi HK, commensurabilis, Rationalis existit. Cū ergo ostensa sit FK, ipsi BK, potentia solum commensurabilis, erit quoque FK, Rationalis. Quare cum FK, BK, Rationales sint, & potentia tantum ostensæ commensurabiles,[d] erit reliqua BF, Apotome, & ei congruens BK. Quod est primum.

QVONIAM vero ostensum est esse rectam HK, totam parti BK, longitudine commensurabilem,[e] erunt propterea & BK, BH, longitudine inter se commensurabiles. Cum ergo BH, ostensa sit longitudine commensurabilis ipsi DC; erit quoque BK, ex scholio propos. 12. huius lib. eidem DC, longitudine commensurabilis. Rursus quia demonstratum est esse vt BD, ad DC, ita FK, ad BK; & permutando vt BD, ad FK, ita DC, ad BK: Sunt autem modo DC, BK, ostensæ longitudine commensurabiles;[f] Erunt quoque BD, FK, commensurabiles longitudine. Itaque cum FK, ipsi BD, & BK, ipsi DC, longitudine sit commensurabilis, erunt ipsius Apotomæ BF, nomina FK, BK, nominibus BD, DC, ipsius BC, ex binis nominibus, longitudine commensurabilia. Quod est secundum.

ITEM

[a] 45. primi
[b] 45. primi
[c] 14. vel 16 sexti.
[d] 12. sexti.
[e] 10. deci.
[f] 12. quinti
[g] 21. deci.
[a] 22. sexti
[b] 10. deci.
[c] 10. deci.
[d] 74. deci.
[e] 16. deci.
[f] 10. deci.

ITEM quia demonstrauimus esse vt BD, ad DC, ita FK, ad BK; erũt idcirco Apotome nomina FK, BK, in eadem ratione cum B D, D C, nominibus ipsius B C, quæ est ex binis nominibus. Quod est tertium.



POSTREMO vel BD, plus potest, quam DC, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, vel incõmensurabilis. Si plus potest BD, quã DC, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; cum sit vt BD, ad DC, ita FK, ad BK; [a] poterit quoque FK, plus quam BK, quadrato rectæ sibi longitudine commẽsurabilis: Et si BD, plus potest quam DC, quadrato rectæ sibi longitudine incõmensurabilis; poterit & FK, plus quam BK, quadrato rectæ sibi longitudine incommẽsurabilis. Et si quidẽ BD, expositæ Rationali fuerit longitudine commẽsurabilis; erit & FK, quæ longitudine ostensa est commensurabilis ipsi BD, commensurabilis longitudine eidem Rationali, per ea, quæ in scholio propos. 12. huius lib. demonstrauimus. Si vero DC, sit Rationali commẽsurabilis lõgitudine; erit & eadem ratione BK, eidem Rationali longitudine commensurabilis. Si denique neutra ipsarum BD, D C, sit Rationali longitudine commensurabilis; [b] erit quoque neutra ipsarum FK, BK, commensurabilis longitudine Rationali. Igitur eadem ordine est Apotome BF, ipsi BC, ex binis nominibus, vt constat ex definitionibus secundis, atque tertijs. Quod est quartum. Quadratum ergo Rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus, &c. Quod demonstrandum erat.

[a] 15. deci

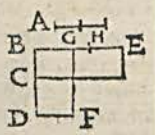
[b] 14. deci.

113. o.

THEOR. 90. PROPOS. 114.

QVADRATVM Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina cõmensurabilia sunt Apotomæ nominibus, & in eadẽ proportione; & adhuc, quæ ex binis nominibus fit, eũdem habet ordinẽ, quem ipsa Apotome.

SIT Rationalis *A*, & *Apotome* B C, cui congruat C D, [a] & ad B C, applicetur rectangulum C E, æquale quadrato ex *A*, latitudinẽ faciens BE. Dico BE, esse ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus BD, CD, Apotomæ BC. & in eadem proportione; & adhuc ipsam BE, ex binis nominibus, esse ipsi BC, Apotomæ ordine eandem. [b] Applicetur enim rursus ad BD, totam, rectangulum B F, æquale eidem quadrato ex A, hoc est, ipsi CE, latitudinem faciens BG. Et quoniam B F, C E, æqualia sunt; [c] erit vt BE, ad BG, ita BD, ad BC; & per conuersionem rationis, vt BE, ad GE, ita B D, ad C D. Secetur quoque E G, ad H, secundum proportionem B E, ad G E, ex ijs, quæ in schol. propos. 10. lib. 6. conscripsimus; vt sit EH, ad HG, quemadmodum BE, ad GE. Quia igitur est vt BE, tota ad GE, totam, ita EH, ex BE, ablata ad HG, ex GE, ablatam; erit quoque BH, reliqua ipsius BE; ad HE, reliquã ipsius GE, vt tota BE, ad totam GE: Erat autem vt BE, ad G E; ita EH, ad HG. Erit igitur quoque vt BH, ad HE, ita EH, ad GH; atque adeo HE, media proportionalis est inter BH, GH. Quare erit vt BH, prima ad GH, tertiam, ita quadratum ex BH, prima ad quadratum ex HE, secunda, per coroll. propos. 20. lib. 6. Quia vero fuit vt BD, ad CD, ita BE, ad GE, hoc est, BH, ad HE: & sunt BD, CD, cum sint nomina *Apotomæ* BC, Rationales potentia tantum commensurabiles, [d] Erunt quoque BH, HE, potentia solum commensurabiles; Ac propterea quadrata ex BH, HE, commensurabilia. Igitur rectę BH, GH, eandem habentes rationem cum quadratis ex BH, HE, vt demonstrauimus, [e] lõgitudine sunt commensurabiles; Ac propterea tota BH, longitudine commensurabilis existens parti G H, commensurabilis quoque longitudine erit parti reliquæ B G, ex coroll.



[a] 45. primi

[b] 45. primi

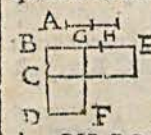
[c] 14. vel 16. sexti.

[d] 10. deci.

[e] 10. deci.

propos.

propoſ. 16. huius lib. At vero cum BD, Rationalis ſit, nempe maius nomen Apotomæ BC; & rectangulum BF, quadrato ex Rationali linea A, æquale, Rationale; erit
[a] 21. deci. latitudo BG, Rationalis commenſurabilis longitudine ipſi BD. Igitur ex ſcholio propoſ. 12. huius lib. & BH, eidem BD. Rõnali commẽſurabilis eſt longitudine, atque adeo Rationalis exiſtit; quandoquidem BH, BG, longitudine commenſurabiles ſunt oſtenſæ. Quia vero BH, HE, oſtenſę ſunt commenſurabiles potentia tantũ, & BH, Rationalis; erit quoque HE, illi commenſurabilis, Rationalis. Rationales ergo ſunt BH,
[b] 37. deci. HE, potentia ſolum commenſurabiles; [b] Ac propterea BE, ex binis nominibus eſt. Quod eſt primum.



QVONIAM vero oſtendimus eſſe BH, ad HE, vt BD, ad CD; atq; adeo permutãdo BH, ad BD, vt HE, ad CD; Oſtenſa eſt autem BH, ipſi BD, longitudine commenſurabilis; [c] erit quoque HE, ipſi CD, commenſurabi-
[c] 10. deci. lis longitudine. Quare BH, HE, nomina ipſius BE, ex binis nominibus, commenſurabilia ſunt longitudine nominibus BD, CD, Apotomæ BC. Quod eſt ſecundum.

IMMO & in eadem proportione, cum demonſtratum ſit eſſe BH, ad HE, vt BD, ad CD. Quod eſt tertiũ.

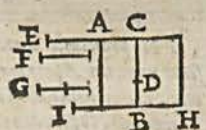
POSTREMO vel BD, plus poteſt quam CD, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis. Si plus poteſt quadrato rectæ ſibi
[d] 15. deci. longitudine commenſurabilis, [d] poterit quoque BH, plus quam HE, quadrato rectæ ſibi commenſurabilis longitudine: Et ſi BD, plus poteſt, quam CD, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; poterit etiam BH, plus quam HE, quadrato rectæ longitudine ſibi incommenſurabilis. Et ſi quidem BD, Rationali expoſitæ longitudine ſit commenſurabilis; erit quoque BH, commenſurabilis exiſtens longitudine ipſi BD, eidem Rationali longitudine commenſurabilis, ex ſcholio propoſ. 12. huius lib. Si vero CD, longitudine ſit commenſurabilis Rationali; erit & eadem ratione HE, eidem Rationali longitudine commenſurabilis. Si vero neutra ipſarum BD, CD, commenſurabilis ſit longitudine

Rationali expoſitæ; [a] erit quoq; neutra ipſarũ BH, HE, eidem Rationali longitudine commenſurabilis. Igitur ex ſecundis, atque tertijs definitionibus, ipſa BE, ex binis nominibus, ordine eadem eſt ipſi Apotomæ BC. Quod eſt quartum. Quadratum ergo Rationalis ad Apotomen applicatum latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commenſurabilia ſunt Apotomæ nominibus, & in eadem proportione, &c. Quod erat demonſtrandum.
[a] 14. deci.

THEOR. 91. PROPOS. 115. 114.

SI ſpatiũ cõtineatur ſub Apotoma, & ea, que ex binis nominibus, cuius nomina commenſurabilia ſunt nominibus Apotomæ, & in eadem proportione; Recta linea ſpatium potens, eſt Rationalis. 0.

CONTINEATVR ſpatiũ AB, ſub Apotoma AC, & ſub CB, ex binis nominibus, cuius nomina CD, DB, cõmenſurabilia ſint nominibus CE, AE, Apotomæ AC; & in eadem ratione, nempe CD, ad DB, vt CE, ad AE. Poſsit autem recta F, ſpatiũ AB. Dico F, eſſe Rationalem. Expoſita enim Rõnali G, [b] applicetur ad CB, quæ ex binis nominibus, rectangulum CH, æquale quadrato ex G. [c] Erit ergo latitudo BH, Apotome, cuius nomina HI, BI, longitudine commenſurabilia ſunt nominibus CD, DB, & in eadem ratione; nimirum HI, ad BI, vt CD, ad DB; atque adeo vt CE, ad AE, & permutando, vt tota HI, ad totam CE, ita ablata BI, ad ablatam AE. [d] Erit ergo & reliqua BH, ad reliquam AC, vt tota HI, ad totam CE: [e] Commenſurabilis autem eſt longitudine HI, ipſi CE, quod vtraque



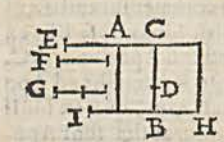
[b] 45. primi
[c] 113. decimi.
[d] 19. quin.
[e] 12. decim.

HI, CE, commensurabilis fuerit longitudine ipsi CD.

[a] 10. deci.

[b] 10. deci.

[c] 1. sexti.



[a] Igitur & BH, ipsi AC, longitudine est commensurabilis; [b] Atque idcirco & HC, ipsi BA, commensurabile erit, [c] cum sit vt HB, ad AC, ita HC, ad BA: Sed HC, quadrato Rationalis G, æquale, Rationale est. Igitur & BA, illi cõmensurabile, Rationale erit, propterea q; & recta F, ipsum BA, potens, Rationalis erit. Quapropter si spatium contineatur sub Apotoma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina cõmensurabilia sunt nominibus Apotomæ, & in eadem proportione; Recta linea spatium potens, est Rationalis. Quod erat demõstrandum.

COROLLARIVM.

EX hoc manifestum est, fieri posse, vt spatium Rationale contineatur sub duabus rectis Irrationalibus. Nam spatium AB, contentum sub AC, CB, Apotoma, & ex binis nominibus, quæ Irrationales sunt, ostensum est Rationale esse.

SCHOLIVM.

IN proximis autem tribus propositionibus intelligenda sunt nomina Apotomæ nominibus eius, quæ ex binis nominibus, commensurabilia esse longitudine. In prioribus enim duabus, lõgitudine ostensa sunt esse cõmensurabilia; In posteriori vero, nempe in hac 115. nihil colligetur, si nomina CD, DB, nominibus CE, AE, potentia tantum commensurabilia ponantur. Id quod facile ex demonstrationibus harum trium propositionum apparet.

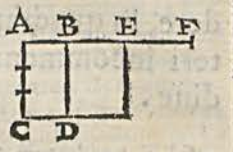
A ME-

THEOR. 92. PROPOS. 116.

115. 107.

A MEDIA infinitæ Irrationales sunt, et nulla alicui antecedentium est eadem.

SIT Media AB. Dico ex illa fieri Irrationales infinitas, quarum nulla eadem sit alicui illarum tredecim antecedentium, de quibus in coroll. propos. 112. huius lib. Exposita enim Rationali AC, cõtineatur sub AB, Media, & Rationali AC, spatium AD. Est ergo AD, spatium sub Rationali AC, & Irrationali AB, contentũ, Irrationale, ex lemmate propos. 38. huius lib. Posit ipsum recta BE, quæ ex defin. 11. Irrationalis erit. Dico BE, non esse eandem alicui tredecim illarum, quas in coroll. propos. 112. huius lib. collegimus. Nam cum quadratum Mediæ ad Rationalem AC, applicatum, [a] latitudinem faciat Rationalem ipsi AC, longitudine incommensurabilem: Et quadrata reliquarũ duodecim Irrationaliũ, ad eandem Rationalem AC, applicata, faciant latitudines vel ex binis nominibus, vel Apotomas, vt constat ex propos. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 98. 99. 100. 101. 102. & 103. huius lib. At vero quadratum huius Irrationalis BE, ad eandẽ Rationalem AC, applicatum, faciat AB, latitudinem Mediam; perspicuum est, Irrationalem BE, ab omnibus illis tredecim differre; quandoquidem eius quadratum ad Rationalem lineam applicatum, latitudinem faciat differentem a latitudinibus, quas quadrata illarũ tredecim linearum ad eandem Rationalem applicata efficiunt.



[a] 23. deci.

QVOD si cõpleatur rectãgulum DE; erit & hoc cõtentũ sub Rationali BD, & Irrationali BE, Irrationale, ex dicto lẽmate propos. 38. Posit ergo ipsum recta EF, quæ ex defin. 11. Irrationalis erit. Dico rursus EF, nõ esse

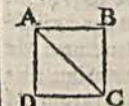
eandem alicui illarum tredecim, vel etiam ipsi BE. Hoc autem manifestum est, cum quadratum ipsius EF, ad Rationalem applicatum, latitudinem faciat BE. At quadrata illarum tredecim, & quadratum etiam ipsius BE, latitudines faciant, si ad eandem Rationalem applicentur, differentes a BE, vt demonstratum est. Eodem modo & aliæ Irrationales infinitæ inuenientur & inter se, & a dictis differentes. Quocirca a Media infinitæ Irrationales fiunt, &c. Quod demonstrandum erat.

118. 7.

THEOR. 93. PROPOS. 117.

PROPOSITVM sit nobis ostendere, in quadratis figuris diametrum lateri incommensurabilem esse longitudine.

SIT quadratum ABCD, in quo diameter AC. Dico diametrum AC, longitudine incommensurabilem esse lateri AB. Si enim non est incommensurabilis, commensurabilis erit longitudine; [a] ac propterea AC, AB, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Habeat AC, ad AB, proportionem, quam numerus EF, ad numerum G; sintque numeri EF, & G, minimi omnium eandem proportionem habentium. Quoniam ergo est vt AC, ad AB, ita numerus EF, ad numerum G; Erit quoque vt quadratum ex AC, ad quadratum ex AB, ita quadratus numerus ex EF, ad quadratum numerum ex G, ([b] Cum enim quadrata habeant suorum laterum proportionem duplicatam; latera autem æquales habeant proportiones; erunt proportiones quadratorum æquales etiam, cum sint æqualium duplicatæ.) Sed quadratum ex AC, duplum est quadrati ex AB, per ea, quæ in scholio propos. 47. lib. 1. ostendimus. Igitur & quadratus numerus ex EF, duplus erit quadrati numeri ex G; Ac propterea quadratus numerus



[a] 5. deci.

[b] 20. sexti, & 11. octaui.

merus ex EF, cum dimidium habeat, atque adeo bifariã posit diuidi, par erit, ex defin. Igitur & ipse EF, illum producens, par erit. (Si namque impar esset, cum se ipsum multiplicans producat suum quadratum, esset & quadratus ipse impar; [a] eo quod impar imparem multiplicans imparem procreat. Quod est absurdum. ostensus est enim par.) Quia vero EF, & G, in sua proportione minimi, [b] inter se primi sunt; & EF, ostensus est par, erit G, impar. (Si enim par etiam esset, metiretur vtrumque EF, & G, binarius; atque adeo non essent inter se primi. Quod est absurdum.) Diuidatur iam par numerus EF, bifariam in H. Quia igtur numerus EF, duplus est numeri EH; [c] & quadrati habẽt proportionẽ laterum duplicatam; erit quadratus ex EF, quadruplus quadrati ex EH. (Quadrupla enim proportio duplicata est proportionis duplæ, vt in his numeris apparet, 4. 2. 1.) Itaque cum quadratus ex EF, duplus sit quadrati ex G; & quadruplus quadrati ex EH; qualium partiũ 4. est quadratus ex EF, taliũ 2. erit quadratus ex G; & taliũ 1. quadratus ex EH. Quadratus igitur ex G, duplus est quadrati ex EH, cum illius ad hunc proportio sit, quæ 2. ad 1. ac proinde, vt supra de numero EF, diximus, erit quadratus ex G, dimidium habens par, & ipse quoque G, par. Sed & impar est ostensus. quod est absurdum. Non ergo longitudine commensurabilis est diameter AC, lateri AB. Igitur incommensurabilis longitudine.

[a] 29. noni

[b] 24. septi.

[c] 11. octaui

ALITER. Sit si potest fieri, diameter AC, commensurabilis longitudine lateri AB; habeantque AC, AB, proportionem, quam numeri EF, & G, qui minimi sint in sua proportione; atque adeo inter se primi. Non erit igitur G, vnitas. (Cum enim quadratum ex AC, duplum sit quadrati ex AB; sit autem vt quadratum ex AC, ad quadratum ex AB, ita quadratus numerus ex EF, ad quadratum numerum ex G, vt in priori demonstratione diximus; erit quoque quadratus ex EF, duplus quadrati ex G. Si ergo G, est vnitas, atque adeo & quadratus ex ea, vnitas; erit quadratus ex EF, binarius. Quod est absurdum.) Ergo numerus. Et quia, vt iam est demonstratum, quadratus ex EF, duplus est quadrati

[a] 14. octaui ex G; metietur quadratus ex G, quadratum ex EF; [a] ac propterea & G. latus metietur latus EF. Cũ ergo & G, se ipsum metiatur; erunt numeri EF, & G, inter se compositi, habentes mensuram communem, numerum G: Sed & inter se primi sunt. Quod est absurdum. Non ergo commensurabilis est diameter AC, longitudine lateri AB. Quare ostendimus, in quadratis figuris diametrum lateri incommẽsurabilem esse longitudine. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

SED & affirmatiue hoc idem theorema demonstrabimus, hoc modo. Quoniam ex ijs, quæ in scholio propos. 47. lib. 1 demonstrata a nobis sunt, quadratum diametri duplum est quadrati ex latere descripti; habebit quadratum ex diametro ad quadratum ex latere proportionem, 2. ad 1. vel 4. ad 2. vel 8. ad 4. &c. Et quia sumptis in proportione dupla

[b] 10. noni *quotcunque numeris ab vnitate 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. &c.* [b] *solum tertius ab vnitate quadratus est, & cæteri omnes vnum intermittentes; quod primus ab vnitate, nempe 2. quadratus non sit; erunt solum hi numeri 4. 16. 64. quadrati; reliqui vero 2. 8. 32. non quadrati. Quare cum 4. quadratus sit, & 2. non quadratus, non habebit 4. ad*

1. 2. 4. 8. 16. 32. 64.

[c] 24. octaui *2. proportionem, quam quadratus ad quadratum; (* [c] *alias & 2. quadratus esset.) ac propterea neque quadratum ex diametro ad quadratum lateris proportionem habebit, quam numerus quadratus ad numerum quadratum.* [d] *Incommensurabilis ergo est diameter longitudine ipsi lateri. Quod est*

[d] 9. deci. *propositum.*

HOC etiam theorema aliter demonstrauimus ad finem defin. 8. lib. 5. & in scholio propos. 8. lib. 8. & in scholio propos. 9. huius libri.

CAETERVM in exemplaribus Græcis reperitur hoc loco appendix quædam, cuius intelligentia ex sequentibus Stereometricæ libris pendet, vt merito omitti posset. Verum quia in ea continetur doctrina non contemnenda ad commensurabilitatem omnium magnitudinum, & incommensurabilitatem pertinent; visum est, eam paucis explicare, assignando more

nostro solito in margine loca Stereometricæ, quæ ad demonstrationem eorum, quæ hic dicuntur, necessaria sunt. Est igitur appendix hæc.

INVENTIS lineis rectis longitudine incommensurabilibus, inuenientur & aliæ quam plurimæ magnitudines, planæ scilicet, atque solidæ incommensurabiles inter se. Sint enim rectæ A, B, longitudine inter se incommensurabiles, inter quas media proportionalis sit C. Quoniam igitur ex coroll. propos. 20. lib. 6. vt A, ad B, ita est figura rectilinea quæuis super A, constituta ad figuram rectilineam sibi similem, similiterque positam super C; & sunt A, & B, longitudine incommensurabiles; [a] *erunt rectilineæ illæ figuræ super A, & C, incommensurabiles.*

[a] 10. deci.

RVRSVS [b] *quoniam circuli, quorum diametri A, C, proportionem habent, quam quadrata ex A, & C, descripta: Quadrata autem hæc, cum sint figuræ rectilineæ similes, similiterque positæ, proportionem habent, quam rectæ A, & B, ex coroll. propos. 20. lib. 6.* [c] *Habebunt quoque circuli diametrorum A, C, eandem proportionem, quam rectæ A, B: Sed rectæ A, B, incommensurabiles sunt longitudine.* [d] *Igitur & circuli diametrorum A, C, incommensurabiles sunt.*

[b] 2. duodecimi

[c] 11. quinti

[d] 10. deci.

IAM vero si constituantur solida, nempe pyramides, vel prismata eiusdem altitudinis, quorum bases sint figuræ rectilineæ similes, similiterque descriptæ super A, C, [e] *habebunt pyramides, atque prismata eandem proportionem, quam bases, hoc est, quam rectilineæ illæ figuræ. Quare cum rectilineæ illæ figuræ incommensurabiles sint, vt modo est demonstratum;* [f] *incommensurabilia etiam erunt ipsa solida, nimirum pyramides, & prismata.*

[e] 5. 6. vel 7. duo decimi.

[f] 10. deci.

QVOD si coni, vel cylindri æque alti fabricentur, quorum bases circuli sint diametrorum A, C, [g] *habebunt huiusmodi coni, & cylindri eandem proportionem cum basibus, hoc est, cum illis circulis. Cum ergo circuli ostensi sint incommensurabiles,* [h] *Erunt quoque incommensurabiles dicti coni, & cylindri. Inuentæ sunt igitur non solum lineæ, & superficies incommensurabiles, verum etiam & corpora, siue solida incommensurabilia. Quod est propositum.*

[g] 11. duodecimi.

[h] 10. deci.

[a] 10. deci.

[b] 5.6.7. & 11. duodecimi.

EADEM autem ratione, si rectæ A, & B, longitudine commensurabiles sint, [a] ostendemus earum figuras rectilineas similes, similiterque descriptas, necnon & ipsarum circulos, commensurabiles esse, [b] atque adeo & earundem pyramides, & prismata; ac denique conos, & cylindros; si modo eandem habeant altitudinem, vt perspicuum est.

FINIS ELEMENTI DECIMI.

* * *

EVCLI-

EVCLIDIS

ELEMENTVM VNDECIMVM.

Et Solidorum primum.

DEFINITIONES.

I.

SOLIDVM est, quod longitudinem, latitudinem, & crassitudinem habet.

POST QVAM Euclides in prioribus sex libris abunde de ea Geometriæ parte disseruit, quæ circa plana versatur, sibiq; nomen Geometriæ, tanquam proprium, vsurpauit; In subsequentibus vero tribus diligenter ea de passionibus numerorum docuit, quæ necessaria videbantur ad intelligendam doctrinam linearũ commensurabilium, atq; incommensurabilium, quas idcirco luculentissime in libro decimo deinde exposuit, vt constructio, atque natura quinque corporum regularium, de quibus in postremis tribus libris, nimirum in 13. 14. & 15. subtilissime disseritur, perfectius posset cognosci: Nunc tandem aggreditur in hoc libro vndecimo eam partem Geometriæ, quæ corpora, siue solida considerat, proprioque vocabulo Stereometria est appellata.

EX-

EXPLICAT autem prius, more suo, voces ad eam rem perneces-sarias, quarum prima est: Solidum, siue corpus: nempe tertium genus quantitatis. Docet igitur eam quantitatem, quæ præter longitudinem latitudinemque sortita est crassitudinem, seu profunditatem, ita vt tres dimensiones possideat, vnam quidem secundum longitudinem, aliam vero secundum latitudinem, & tertiam secundum profunditatem, seu crasitudinem, altitudinemve, appellari solidum, siue corpus; quemadmodum quantitas longitudinem tantũ habens, linea; quæ vero longitudini latitudinem adiicit, superficies vocatur, vt in primo lib. diximus.

PORRO quemadmodum Mathematici, vt recte intelligamus lineam, præcipiunt, vt imaginemur punctum aliquod e loco in locum moueri; hoc enim describit vestigium quoddam longum tantum, hæc est, lineam, propterea quod punctum omnis sit magnitudinis expers; vt autem percipiamus superficiem, monent, vt intelligamus lineam aliquam in transuersum moueri; hæc enim describet vestigiũ longum & latum duntaxat; longum quidem propter longitudinem lineæ, latum vero propter motum illum, qui in transuersum est factus; carens autem profunditate, quod & linea illius sit expers: Ita quoque, vt nobis ob oculos ponant corpus, seu solidum, hoc est, quantitatem trina dimensione præditum, consulunt, vt concipiamus superficiem aliquam æqualiter eleuari, siue in transuersum moueri; hac enim ratione describetur vestigium quoddam longum, latum, atq; profundum; longum quidem & latum, ob superficiem, quæ longa & lata existit; profundum vero seu crassum, propter eleuationem illam, seu motum superficiei. Hæc ergo quantitas, solidum siue corpus vocatur. Neque vero alia quantitas quarta distincta a linea, superficie, & corpore reperiri potest, propterea quod triplex tantum dimensio possit assignari, vt perspicue in commentariis, quos in sphæram Ioannis de Sacro Bosco conscripsimus, a nobis fuit demonstratum ex Ptolemæo in libello de Analemmate.

SOLI-

II.

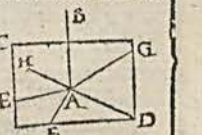
SOLIDI autem extremum, est superficies.

QVEMADMODVM linea finita in extremitatibus puncta, superficies vero lineas recipit, vt in 1. lib. docuit, ita nunc ait Solidi finiti extremũ esse superficiem. Cum enim solidum, siue corpus efficiatur ex illo motu imaginario superficiei; perspicuum est extremas partes illius esse superficies.

III.

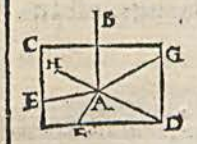
LINEA recta est ad planum recta, cum ad rectas omnes lineas, a quibus illa tangitur, quæque in proposito sunt plano, rectos angulos efficit.

VT linea recta AB, plano CD, insistens, ita vt B, punctum sit in sublimi extra planum CD, at punctum A, in ipso plano, tum demum dicetur recta seu perpẽdicularis ad planum CD, cum rectos effecerit angulos cum lineis AE, AF, AD, AG, & cum omnibus aliis, quæ in eodem existentes plano ipsam tangunt in puncto A. Hac enim ratione fiet, vt AB, æqualiter insistat plano CD, & nõ magis in vnam partem, quam in aliam inclinet. Nam producta recta DA, ad H, cum angulus BAD, ponatur rectus, erit quoque ei deinceps BAH, rectus, ideoq; illi æqualis. Eadẽq; ratione protracta qualibet linea in plano CD, faciet AB, cum illa duos angulos æquales. Ac propterea æquabiliter ipsi plano insistet. Quod si fieri posset, vt AB, cum vna linea ex A, in plano CD, educta

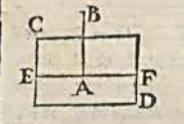


non

non efficeret angulum rectum, etiamsi cum aliis omnibus rectum angulum constitueret, non diceretur AB, recta ad planum CD. Itaque quando conceditur linea aliqua ad planũ recta, concedendum quoque erit, eam cum omnibus in eodẽ plano ductis, quæ ipsam tangunt, rectos constituere angulos. Et e contrario, vt recte cõcludatur, lineam quampiam esse ad planum datum rectam, demonstrãdum erit prius, eam cum omnibus in eodem plano ductis, quæ ipsam tangunt, rectos angulos conficere.



VT autem recta quæpiam plano cuicunque insistens rectos constituat angulos cum omnibus rectis in eodem plano ductis, ipsamque tangentibus, satis est, vt cum duabus non efficientibus lineam vnam, sed se mutuo secantibus, si producantur, rectos angulos conficiat. Nam ex hoc recte colligitur, eã cum omnibus aliis rectos quoque angulos efficere, vt perspicuum fiet ex propos. 4. huius lib. Dixi: cum duabus non efficientibus lineam vnam: quia si duæ lineæ componant vnam rectam lineam, non necessario efficitur, lineam, quæ cum ipsis rectos angulos constituit, cum omnibus aliis rectos confitere angulos. Recta enim AB, insistat plano CD, efficiatq; rectos angulos cum duabus in eodem plano ductis AE, AF, quæ rectam vnam lineã componant. Dico AB, non propterea cum omnibus aliis rectos angulos constituere; atq; idcirco non esse rectã ad planũ CD. Hoc autem perspicuum est, cum AB, circa EF, veluti axem, circumuerti queat, ita vt punctum B, modo sit plano propinquius, modo ab eodem remotius; nihilominus tamen ipsa cum EF, semper eosdem rectos angulos, & æquales conficiat. Quod si eadem AB, cum duabus angulum componentibus, quales sunt AG, AD, in priori figura, rectos constituat angulos, tum demum cũ omnibus aliis rectos angulos efficiet, vt diximus. Id quod dilucide demonstrabitur propos. 4. huius lib.

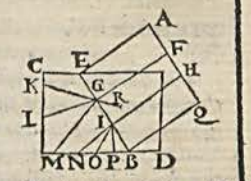


PLA-

IIII.

PLANVM ad planum rectum est, cum rectæ lineæ, quæ communi planorũ sectioni ad rectos angulos in vno planorum ducũtur, alteri plano ad rectos sunt angulos.

INSISTAT planum AB, plano CD, ita vt linea AQ, sit in sublimi, hoc est, extra planũ subiectum CD, at EB, in ipso eodẽ plano: Sit autẽ horum planorum communis sectio EB, quæ, vt demonstrabitur propos. 3. huius lib, recta erit linea. In hac autem sumptis quotcunque punctis G, I; ex ipsis in plano AB, ducãtur GF, IH, perpendiculares ad communem sectionem EB. Si igitur lineæ FG, HI, ad planum alterum CD, rectæ fuerint, hoc est, rectos angulos effecerint cum lineis GK, GL, GM; IN, IO, IP, & cum aliis omnibus in plano CD, a pũctis G, & I, ductis; dicetur planum AB, ad planum CD, rectum; quia hoc modo non magis in vnam partem inclinabit, quam in alteram, sed æquabiliter illi insistet. Si enim KG, producatur ad R, cum angulus FGK, ponatur rectus; erit & angulus ei deinceps FGR, rectus; ideoque illi æqualis. Eademque ratione, protracta qualibet alia linea in plano CD, fient vtrobique a lineis FG, HI, anguli æquales. Quare planum AB, æquabiliter plano CD, insistet. Quotiescunque igitur planum aliquod rectum esse cõceditur ad planum aliud, concedendum quoque erit, lineas perpendiculares in vno eorum ad communem sectionem deductas, rectas quoque esse ad alterum planum. Et contra, vt colligatur planum quodpiam ad aliud esse rectum, ostendendum prius erit, lineas perpendiculares in vno eorum ad communem sectionem ductas, rectas esse ad reliquum planum.

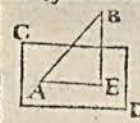


RE-

V.

RECTAE lineæ ad planum inclinatio est, cum a sublimi termino rectæ illius lineæ ad planū deducta fuerit perpendicularis, atque a pūcto, quod perpendicularis in ipso plano fecerit, ad propositæ illius lineæ extremum, quod in eodē est plano, altera recta linea fuerit adiuncta; est, inquam, angulus acutus insistente linea, & adiuncta comprehensus.

INSISTAT recta AB, plano CD, non ad angulos rectos, sed inclinata, ita vt punctum B, sit extra planum in sublimi, punctum vero A, in plano. Deinde ex B, termino sublimi rectæ AB, intelligatur ad idem planum deducta perpēdicularis BE, faciens in plano punctum E; atque ab E, ad A, adiungatur recta EA; eritque necessario



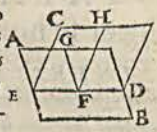
a 17. primi

angulus BAE, acutus, a *cum in triangulo ABE, duo anguli BAE, BEA, duobus sint rectis minores, & angulus BEA, rectus. Angulus igitur acutus BAE, comprehensus linea insistente AB, & adiuncta AE, dicitur inclinatio rectæ AB, ad dictum planum CD; Ita vt tanta dicatur esse inclinatio lineæ AB, ad planum CD, quantus est dictus angulus acutus BAE.*

VI.

PLANI ad planum inclinatio, est angulus acutus rectis lineis contentus, quæ in vtroque planorum ad idem communis sectionis punctum ductæ, rectos cum sectione angulos efficiunt.

PLANO nāq; AB, insistat planū CD, ita vt pars ad C, sit in sublimi extra planum AB, & pars alt D, in ipso plano AB, sitq; CD, inclinatum ad AB; & communis eorum sectio sit DE. Si igitur ad DE, communem sectionem ex eius pūcto F, duæ perpendiculares ducātur; FG, quidem in plano AB, & FH, in plano CD; dicetur angulus acutus GFH, dictis rectis comprehensus, inclinatio plani CD, ad planum AB, ita vt tanta esse dicatur inclinatio plani ad planum, quantus est dictus angulus acutus.



INTERDVM Geometræ angulum GFH, dicunt angulum inclinationis plani CD, ad planum AB, siue is acutus sit, siue rectus, obtususve: quamquam proprie solum angulus acutus inclinationem vnius plani ad alterum ostendat, vt Euclides docet hoc loco: Rectus enim indicat potius æquabilem eleuationem vnius plani supra aliud, quam inclinationem vnius ad alterum; obtusus vero recessum quodammodo vnius ab altero. Veruntamen quia quilibet horum angulorum commonstrat situm, seu eleuationem vnius plani supra alterum, generaliter dici consueuit a pleriſque angulus inclinationis omnis ille, qui comprehenditur duabus rectis lineis, quæ in vtroque plano ad aliquod vnum punctum communis illorum sectionis ducuntur perpendiculares, cuiusmodi est angulus GFH, siue is rectus sit, siue acutus, siue obtusus.

VII.

PLANVM ad planum similiter inclinatum esse dicitur, atque alterum ad alterum, cum dicti inclinationum anguli inter se fuerint æquales.

NON

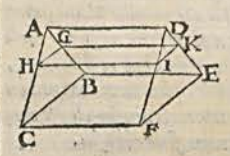
NON obscura est hæc definitio, præcedenti bene intellecta. Vnde planum ad planum magis inclinatum esse dicetur, cuius angulus inclinationis minor extiterit, atque adeo a recto magis recesserit.

VIII.

PARALLELA plana sunt, quæ inter se non conueniunt.

INTELLIGE, in quamcunque partem, etiam infinite, producantur; hoc est, siue ad dexteram, siue ad sinistrã, & siue sursum, siue deorsum, &c. Sunt enim quædam plana quæ nec ad dexteram, nec ad sinistram producta conueniunt; nec tamen ob id parallela sunt dicenda; quia nimirum vel sursum, vel deorsum protracta, tandem coeunt. Nam si fumatur tectum aliquod, cuius fastigium intelligatur abscissum; remanentia duo plana non conuenient, quamuis producantur infinite ad dexteram, & ad sinistram. Sed tamen quia sursum protensa coeunt, nimirum in ipso fastigio, idcirco non dicentur parallela.

SIT enim tectum quodpiam ABCDEF, contentum duobus planis ABED, ACFD, cuius basis BCFE; auferaturque fastigium AGHDKI. Quo facto, perspicuum est, reliqua plana GBEK, HCFI, non conuenire inter se, si ad partes GB, HC, vel ad partes KE, IF, producantur; nec tamen idcirco parallela dicentur, cũ producta ad partes GH, KI, conueniant in fastigio AD. Vt igitur plana aliqua dicantur parallela, necesse est, vt in nullam partem producta inter se conueniant. Sicut autem lineæ in eodem plano existentes, ad duas duntaxat partes produci possunt, nempe ad sinistram, & ad dexteram; ita duo plana in quatuor partes intelligi possunt protracta, nempe sinistrorsum, dextrorsum, sursum, atque deorsum. Itaque duo plana quæcunque, vel sunt parallela, vel ad aliquam partem producta coeunt; lineæ vero re-



ro rectæ, vel sunt parallelæ, vel ad alteram partem protractæ conueniunt, si nimirum in eodem existant plano, vel tandẽ nec sunt parallelæ, neq; vnquam conueniunt, si videlicet in diuersis sint planis, & in transuersum positæ. Vnde in definitione linearum parallelarum in 1. lib. additum fuit: quæcunque in eodem sint plano: Hic autem simpliciter dicitur: quæ nunquam conueniunt.

IX.

SIMILES solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis continentur multitudine æqualibus.

POTVISSET Euclides similes figuras solidas definire per angulos æquales, & proportionalitatem laterum circa æquales angulos, vti fecit in figuris planis similibus definiendis: Satius tamen esse iudicauit, vt breuitati consulens eas ex similibus planis multitudine æqualibus describeret; præsertim quod ex similitudine planorum statim cõsequatur & angulorum solidorum æqualitas, vt ex defin. 11. patebit, cum illos constituant anguli plani & multitudine, & magnitudine æquales; & proportionalitas laterum circum angulos æquales, propter planorum similitudinem.

X.

AEQVALES, & similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis, multitudine, & magnitudine æqualibus continentur.

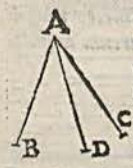
QVOD si plana similia, quibus corpora similia ex præcedenti definitione circumscribuntur, fuerint æqualia, singula singulis, dicentur eiusmodi figuræ solidæ non solum similes, verum

verum etiam æquales. Nam si animo concipiantur sese penetrare mutuo huiusmodi solida, neutrum alterũ excedet, propter æqualitatem, ac similitudinem planorum. Ex similitudine enim planorum infertur angulorum solidorum æqualitas, vt in præcedenti definitione docuimus; ex eorundem vero æqualitate, laterum proportionalium æqualitas, vt in lemmate propos. 22. lib. 6. demonstrauimus. Quare solida illa omnia ex parte sibi mutuo congruent; ac propterea inter sese existent æqualia.

XI.

SOLIDVS angulus est plurium, quam duarum linearum, quæ se mutuo contingant, nec in eadem sint superficie, ad omnes lineas inclinatio.

DVAE lineæ in eodem existentes plano, quæ non in directum iacentes ad vnum punctum conueniunt, efficiunt angulum planũ, vt lib. 1. exposuimus, qualis est angulus BAC, cõtentus duabus lineis AB, AC, in eodem plano constitutis. Si igitur accedat tertia quædã linea AD, quæ non in eodem cum illis plano existat, sed punctum D, sit in sublimi extra illarum planum, efficietur ad punctum A, angulus solidus, siue corporeus. Idem contingeret, si quarta linea, vel quinta, vel denique plures adiungerentur, licet anguli quantitas variaretur. Dixit autem Euclides, lineas angulum solidum constituentes non debere in eadem superficie existere, quoniam videlicet, si tres lineæ AB, AC, AD, in eadem consisterent superficie, non efficeretur angulus solidus ad punctum A, sed planus duntaxat ex duobus planis BAD, DAC, compositus. Quod si AD, sit in sublimi, hoc est, extra planum, in quo sunt AB, AC, iam non componetur angulus planus totus ex BAD, DAC; immo circa punctum A, tres plani consistent anguli BAD, DAC, CAB, qui, vt mox dicetur, solidum



lidum constituunt angulum. Idem dices, si plures fuerint lineæ, & idcirco plures quoque anguli plani.

ALITER.

SOLIDVS angulus est, qui pluribus, quam duobus planis angulis in eodem non consistentibus plano, sed ad vnum punctum constitutis, continetur.

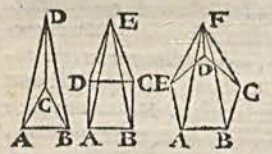
HÆC definitio secunda anguli solidi facilis est, præcedenti recte intellecta. Cum enim saltem tres lineæ in eodem non existentes plano necessariæ sint ad anguli solidi constitutionem, perspicuum est, cum minimum tres planos angulos requiri, vt angulus solidus efficiatur, vt ex superiori figura apparet. Angulus enim BAD, in plano est, in quo rectæ AB, AD; & angulus DAC, in plano, in quo rectæ AD, AC; angulus denique CAB, in plano, in quo rectæ AC, AB; atque ita ex ipsis angulus solidus ad punctum A, constituitur. Quod si tres, vel plures anguli plani ad vnum punctum consistant, in eodem tamen plano, non constituetur ex ipsis angulus, sed totus quidam angulus planus, vt supra diximus de lineis in eadem superficie existentibus. Neque vero satis sunt duo anguli plani ad constituendum angulum solidum, etiamsi in diuersis sint planis. Habit enim semper ex altera parte. Vnde necesse est, vt tertia saltem superficies accedat, in qua tertius angulus planus consistat. Anguli porro solidi exemplum clarissimum nobis præbent duo parietes cum pauimento domus, vel laqueari, ad vnum punctum conuenientes. In eo enim puncto, in quo coeunt, constituitur angulus solidus ex tribus angulis planis. Vbi manifestum est, si vna earum superficierum tollatur, destrui angulum solidum, remanere que tantum duas superficies ad inuicem inclinatas, & hiantes.

EX his vero perspicuũ cuiuis erit, illos angulos solidos inter se esse æquales, qui continentur angulis planis & multitu-

dine, & magnitudine æqualibus. Nam huiusmodi anguli sibi mutuo congruent, si se se penetrare intelligantur. Quemadmodum autem in 1. lib. Euclides ex omnibus angulis planis solum rectilineum assumpsit, ita hic ex omnibus eum duntaxat definit, quem plures lineæ rectæ quam duæ, vel plures anguli plani rectilinei comprehendunt. Non enim comprehenditur hac defin. angulus coni, qui vnica superficie curua continetur; neque is, qui continetur duabus superficiebus, vna quidem plana, altera vero curua; qualis est, qui fit, si conus per verticem secetur.

XII.

PYRAMIS est figura solida, quæ planis continetur, ab vno plano ad vnũ punctum constituta.



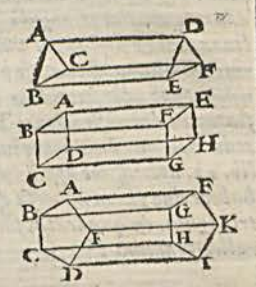
VIDELICET figuræ solidæ a planis ABC, ABCD, ABCDE, ad puncta D, E, F, constitutæ appellantur pyramides. Perspicuum autẽ est, omnia plana, quibus pyramis continetur esse triangula, cum omnia ad vnum punctum tendant; excepto plano, a quo omnia tendunt, quodque puncto illi est oppositũ. Hoc enim potest esse vel triangulum, vel quadrangulum, vel pentagonum, &c. a quo quidem tota pyramis denominationem sumit; vt videlicet dicatur pyramis triangula, quadrãgula, pentagona, hexagona, &c. Tot enim triangulis qualibet pyramis comprehenditur, quot angulos, seu latera planum dictum continet. Vnde & planum huiusmodi, basis pyramidis nuncupari solet. Vt pyramidis triangularis, præter basin, triangula sunt ABD, ACD, BCD: Quadrangula vero ABE, ADE, BCE, CDE: Pentagona denique ABF, AEF, BCF, CDF, EDF.

PRI-

XIII.

PRISMA est figura solida, quæ planis continetur, quorum aduersa duo sunt & æqualia & similia, et parallela, alia vero parallelogramma.

FIGVRÆ scilicet solidæ, quarum plana aduersa & æqualia, & similia, et parallela sunt triãgula ABC, DEF: vel quadrangula ABCD, EFGH: vel pentagona ABCDE, FGHIK, &c. Parallelogrãma vero ACFD, ABED, CBEF: vel ABFE, ADHE, CDHG, CBFG: vel ABGF, AEKF, DEKI, DCHI, BCHG; dicuntur prismata. Itaque prisma nil aliud erit, quã columna quædam laterata æqualis crassitudinis, cuius bases oppositæ sunt æquales, similes, & parallelæ, siue hæ sint triangula, siue quadrangula, siue pentagona, &c. Vnde tot parallelogrãma continebit prisma quodlibet, quot latera, siue anguli, in vno quoq; oppositorũ planorũ reperiuntur, vt figuræ indicãt.



EX his manifestum est, quantum hallucinẽtur ij, inter quos est & Campanus, qui prisma intelligunt esse eam figuram solidam duntaxat, cuius duo plana aduersa parallela, æqualia, similiaque, triangula sunt, reliqua vero tria parallelogramma. Quam quidem figuram solidam Campanus vocat Corpus serratile. Cum enim hæc figura sit solum vna species prismatis, definitio autem tradita infinita alia genera prismatis amplectatur, vt cõstat; præsertim quod plurimæ demonstrationes in hoc lib & 12. sequenti, ex æquo omnibus prismatibus conueniunt; perspicuum est eos hallucinari, qui vnum tantum prismatis genus ex hac defin. colligunt. Sumpserunt

pſerũt autem fortaſſe hi auctores occaſionẽ errãdi, quod Euclides & in propoſ. vltima huius lib. et in 3. 4. & 5. propoſ. lib. 12. ſolum de eo priſmate loquatur, quod duo aduerſa plana habet triangula. Non autem animaduerterunt, ſeptimam propoſitionem lib. 12. illis aduerſari, in qua Euclides loquens de priſmate, mentionem facit duorum triangulorum oppoſitorum, eo quod tali priſmati ſolum demonſtratio illa conuenit. Quod ſi ſola ea figura, vt ipſi voluut, priſma appellaretur ab Euclide, fruſtra dixiſſet: Omne priſma trigonam habens baſin, &c. cum nullum aliud priſma daretur. Immo in corollario dictæ propoſitionis ſeptimæ infert Theon, Pyramidem eſſe tertiam partem priſmatis eãdem cum illa baſin habentis, & altitudinem æqualem, licet duo plana priſmatis aduerſa non ſint triangula, ſed alia quæuis rectilinea, æqualia tamen & ſimilia, vt vult definitio. Ex quo loco luce clarius colligitur, infinita eſſe priſmatum genera ſecũdum Theonem, atque adeo ſecundum Euclidẽ, cum communi omnium ſententia demonſtrationes Theoni aſcriptæ, ſint Euclidis. Accedit etiã, quod a Theone in demonſtratione propoſitionis 10. lib. 12. apertiſſime appellantur priſmata omnia ſolida, quæ habent duo plana aduerſa & æqualia & ſimilia, ſiue ea ſint triangula, & quadrata, ſiue multangula, reliqua vero parallelogramma.

XIIII.

SPHAERA eſt, quando, ſemicirculi, manente diametro, circumductus ſemicirculus in ſe ipſum rurſus reuoluitur, vnde moueri cæperat, circumaſſumpta figura.

SICVT linea recta circa alterum eius extremum quieſcens reuoluta deſcribit circulum; ita & ſemicirculus circa alterum eius extremum, nempe circa diametrum, circumductus figuram deſcribit, quam Geometræ ſpharam appellant. Vnde quemadmodum in circulo punctum aſſignatur, extremum

mum videlicet illud quieſcens, a quo omnes lineæ rectæ in peripheriã cadentes ſunt æquales; propterea quod omnes æquales exiſtant illi lineæ circumuolutæ: Ita quoque in ſphæra punctum reperitur, nempe medium diametri quieſcentis, hoc eſt, centrum ſemicirculi circumducti, a quo omnes rectæ cadentes in peripheriam ſunt æquales; eo quod omnes ſunt ſemidiametro dicti ſemicirculi æquales. Quapropter ad ſimilitudinẽ definitionis circuli, ſphæra definiri poterit hoc etiã modo.

SPHAERA eſt figura ſolida, vna ſuperficie comprehenſa, ad quam ab vno puncto eorum, quæ intra figuram ſunt poſita, cadentes omnes rectæ lineæ inter ſe ſunt æquales.

CICERO in libro de vniuerſitate de mundo loquens eleganter hanc definitionem expreſsit his verbis. Ergo globoſus eſt fabricatus, quod σφαιροειδὲς Graci vocant, cuius omnis extremitas paribus a medio radiis attingitur.

XV.

AXIS autem ſphæræ, eſt quieſcens illa recta linea, circum quam ſemicirculus conuertitur.

XVI.

CENTRVM ſphæræ eſt idem, quod & ſemicirculi.

XVII.

DIAMETER autem ſphæræ, eſt recta quædam linea per centrum ducta, & vtrinque a ſphæræ ſuperficie terminata.

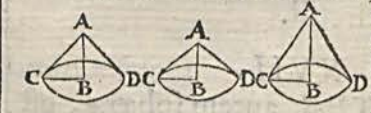
HÆ tres definitiones non egent expositione; dummodo hoc solum notetur, omnẽ diametrum sphæræ posse esse axem, si nimirum circum eam sphæra reuoluatur. Vnde quia in descriptione sphæræ circa diametrum semicirculi factus est motus ipsius sphæræ; propterea eam solam Euclides axem sphæræ nominauit.

XVIII.

CONVS est, quando rectanguli trianguli manente vno latere eorum, quæ circa rectùm angulum, circumductum triangulum in se ipsum rursus reuoluitur, vnde moueri cæperat, circumassumpta figura.

ATQVE si quiescens recta linea æqualis sit reliquæ, quæ circa rectum angulum cõuertitur, Orthogonius erit conus: Si vero minor, Amblygonius: Si vero maior, Oxygonius.

VT si triangulum rectangulum A B C, *circa latus quiescens* A B, *quod est circum rectum angulum, circumducatur, donec integram reuolutionẽ expleat, describetur solida quædam figura, quæ continetur duabus superficiebus, circulari vna, ac plana, quam* B C, *latus alterum circa angulum rectum, suo motu describit; & curua alia, eaque conuexa, quam latus* A C, *recto angulo oppositum delineat. Hæc igitur figura solida, conus nuncupatur. Campanus autem pyramidem rotundam appellat.*



QVOD

QVOD si latus quiescens A B, æquale fuerit circumducto B C, vt in prima figura, dicetur conus descriptus Orthogonius, seu rectangulus, quia videlicet angulus prope verticem A, rectus est. Cum enim latera A B, B C, ponantur æqualia; [a] erunt & anguli B A C, B C A, æquales; qui cum æquialeant vni recto, eo quod A B C, rectus est; erit angulus B A C, semirectus. Eodemque modo angulus B A D, ex parte opposita semirectus erit. Quare totus angulus C A D, rectus erit. Si vero quiescens latus A B, minus fuerit circumducto B C, vt in secunda figura, vocabitur descriptus conus Amblygonius, seu obtusangulus; quoniam scilicet angulus ad verticem A, obtusus existit. Cum enim B C, latus latere A B, sit maius; [b] erit angulus B A C, maior angulo B C A. Quare cum hi duo æquipolleant vni recto, propterea quod angulus A B C, ponitur rectus, erit B A C, semirecto maior. Similiter B A D, maior erit semirecto; atq; adeo totus C A D, recto maior erit. Si denique quiescẽs latus A B, maius fuerit circũducto B C, vt in tertia figura, appellabitur conus descriptus Oxygonius, seu acutangulus; quia nimirum angulus ad verticem A, acutus est. Cum.n. latus A B, maius sit latere B C, [c] erit & angulus B C A, angulo B A C, maior. Quapropter cum hi duo vni recto æquiualeant, quod angulus A B C, rectus ponatur, erit B C A, semirecto maior, ideoque reliquus B A C, semirecto minor. Non secus ostendetur angulus B A D, minor esse semirecto. Igitur totus C A D, recto erit minor.

[a] 5. primi

[b] 18. primi

[c] 18. primi

XIX.

AXIS autem coni, est quiescens illa linea, circa quam triangulum vertitur.

VT in quolibet cono superius descripto axis est recta quiescens A B.

BASIS

XX.

BASIS vero coni est circulus, qui a circumducta linea recta describitur.

NIMIRVM circulus, qui describitur ab altero latere circa rectum angulum, quale est B C, in superioribus conis. Itaque huius circuli semidiameter est ipsum latus circumductum.

QVONIAM vero Euclides solum definiuit conum rectum, cuius videlicet axis rectus est ad basin; Non autem inclinatum, cuius axis ab basim rectus non est; placuit ex Apollonio Pergæo adducere generalem coni descriptionẽ, quæ & rectum, & inclinatum comprehendat; propterea quod in 12. lib. eadem fere demonstrari possunt de cono inclinato, quæ Euclides de recto cono ostendit, vt ibi docebimus. Ita igitur scribit Apollonius ad initium conicorum elementorum.

SI ab aliquo puncto ad circumferentiam circuli, qui non sit in eodem plano, in quo punctum, coniuncta recta linea in vtramque partem producatur; & manente puncto, conuertatur circa circuli circumferentiam, quousque ad eum locum redeat, a quo cæpit moueri: Superficiem a recta linea descriptam, constantemque ex duabus superficiebus ad verticem inter se se aptatis, quarum vtraque in infinitum augetur, nimirum recta linea, quæ eam describit, in infinitum producta, voco conicam superficiem.

VERTICEM ipsius, manens punctum.

AXEM, rectam lineam, quæ per punctum, & centrum circuli ducitur.

CONVM autem voco figuram contentã circulo,

circulo, & conica superficie, quæ inter verticem, & circuli circumferentiam interijcitur.

VERTICEM coni, punctum, quod & superficiei conicæ vertex est.

AXEM, rectam lineam, quæ a vertice ad circuli centrum producitur.

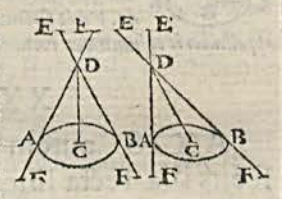
BASIM, circulum ipsum.

CONORVM, Rectos quidem voco, qui axes habent ad rectos angulos ipsis basibus.

SCALENOS vero, qui non ad rectos angulos ipsis basibus axes habent.

HÆC autem omnia ita explicat Eutocius in commentarijs, quos in Apollonium scripsit.

SIT circulus AB, cuius centrum C, & punctum aliquod sublime D; iunctaque D B, in infinitum ex vtraque parte producatur ad puncta E, F. Si igitur recta linea DB, feratur eousque in circuli AB, circumferentia, quousque punctum B, rursus in eum locum restituatur, a quo capit moueri: describet superficiem quãdam, quæ quidem constat ex duabus superficiebus ad D, punctum se se tangentibus. Eam vocat Apollonius conicam superficiem, quæ & augetur in infinitum, cum recta linea D B, ipsam describens in infinitum producitur. Verticem superficiei dicit punctum D. Axem, rectam DC. Conum vero appellat figuram contentam circulo AB, & ea superficie, quam D B. sola describit. Coni verticem, punctum D. Axem DC. Basim AB, circulum. Quod si D C, ad circulum fuerit perpendicularis, Rectum vocat conum: Sin minus, Scalenum.



XXI.

CYLINDRVS est, quando rectâ guli parallelogrâmi manente vno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum parallelogramum in se ipsum rursus reuoluitur, vnde cæperat moueri, circumassumpta figura.

VELVTI si rectangulum parallelogrammũ ABCD, circa latus quiescens AB, circumuoluatur, donec integram expleat reuolutionem, appellabitur figura descripta cylindrus, quæ quidem tribus superficiebus continetur, duabus videlicet planis circularibus, quas latera AD, BC, describunt; & altera curua, eaque conuexa, quam latus CD, describit, instar columnæ alicuius rotundæ. Vnde factum est, vt Campanus cylindrum appellauerit columnam rotundam.

XXII.

AXIS autem cylindri, est quiescens illa recta linea, circum quam parallelogrammum conuertitur.

NEMPE recta AB, in superiori figura, dicetur axis cylindri.

XXIII.

BASES vero cylindri sunt circuli a duobus aduersis lateribus, quę circumaguntur, descripti.

QVALES sunt circuli a lateribus AD, BC, oppositi descripti.

EVCLIDES porrò solum cylindrum rectum hoc loco definit, cuius videlicet axis rectus est ad vtramque basim; atque de hoc solum in lib. 12. est disputaturus. Cum igitur nos eadem fere theoremata, ex alijs Geometris simus proposituri in eodem 12. lib. de cylindro inclinato, quæ Euclides de cylindro recto demonstrauit, visum est prius ex Sereno Antinsensi definire cylindrum vniuersè, vt complectitur tam rectum, quam inclinatum. Sic igitur scribit Serenus ad initium primi libri de sectione cylindri.

SI duorum circulorum æqualium, & æquidistantium diametri semper inter sese æquidistantes & ipsæ in circulorum planis circa manens centrum circumferantur, & simul circumferatur recta linea diametrorũ terminos ex eadem parte coniungens, quousque rursus in eum locum restituatur, a quo moueri cæpit: Superficies, quæ a circumlata recta linea describitur, cylindrica superficies vocetur; quæ quidem & in infinitum augeri potest, linea ipsa describente in infinitum producta.

CYLINDRVS est figura, quæ circulis æquidistantibus, & cylindrica superficie, inter ipsos interiecta continetur.

CYLINDRI bases sunt circuli ipsi.

AXIS, recta linea, quæ per circulorum centra ducitur.

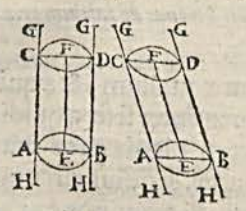
LATVS autem cylindri, linea, quæ cum recta sit, & in superficie ipsius cylindri, bases vtrasque contingit; quam & circumlatam, cylyndri superficiem describere antea diximus.

CYLINDRORVM, Recti quidem dicantur,

cantur, qui axem habent ad rectos angulos exi
stentem ipsis basibus.

SCALENI autem, qui non ad rectos angulos existentem ipsis basibus axem habent.

SINT duo circuli æquales, & æquidistantes AB, CD, quorum centra E, F, & diametri æquidistantes quoque AB, CD: Iunctaque recta AC, in infinitũ ex vtraque parte producatur ad puncta G, H. Si igitur diametri AB, CD, circa cẽtra E, F, in planis circulorũ semper æquidistãtes, vna cum recta AC, circumducantur, donec ad eum locum restituantur, vnde moueri cæperunt; describetur a linea AC, superficies quædam rotunda, quam Serenus cylindricam vocat; quæ & augetur in infinitum, cum recta AC, ipsam describens in infinitum producitur. Cylindrum vero appellat figuram ABDC, circulis AB, CD, & cylindrica superficie inter ipsos interiecta, quam videlicet sola AC, describit, comprehensam. Bases cylindri dicit esse circulos AB, CD. Axem, rectã EF, quæ circulorum centra coniungit. Latus cylindri, rectam AC. Quod si axis EF, perpendicularis fuerit ad bases, rectum vocat cylindrum: Sin minus, Scalenum.

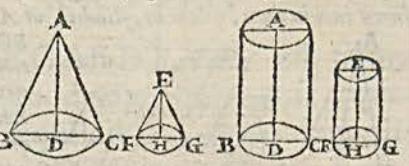


XXIIII.

SIMILES coni & cylindri sunt, quorum & axes, & basium diametri proportionales sunt.

RECTE Euclides similitudinem conorum, atque cylindrorũ ab eorum axibus, & basium diametris sumit. Diametri enim basium indicant conos & cylindros secundũ duas dimen-

dimensiones esse similes, longitudinem scilicet ac latitudinẽ. Axes vero eosdem secundum profunditatem, seu altitudinẽ similes esse demonstrãt. Sint enim duo coni ABC, EFG; item duo cylindri; in conis aũt axes AD, EH, & basium diametri BC, FG; similiter & in cylindris. Itaque si fuerit, vt axis AD, ad axem EH, ita BC, diameter basis ad FG, diametrum basis, dicentur tam coni, quam cylindri similes inter se; quia videlicet hac ratione tam secundum longitudinem & latitudinem similes sunt, quam secundum profunditatem, vt diximus, nempe omnes eorum tres dimensiones proportionales sunt: Vel etiam, quia triangula ADB, EHF, ex quorum reuolutione descripti sunt coni, nec non rectangula AB, EF, quorum conuersiones cylindros effecerunt, hac ratione similia inter se erunt. Cum enim sit vt AD, ad EH, ita BC, ad FG; Sit autem vt BC, ad FG, [a] *ita dimidia BD, ad dimidiã FH; erit quoque vt AD, ad EH, ita DB, ad HF: & permutando vt AD, ad DB, ita EH, ad HF. Quare tam in triangulis, quam in rectangulis latera, circũ æquales angulos, nempe rectos, proportionalia sunt; ac propterea & triangula, & rectãgula similia inter se erunt: Triangula quidem,* [b] *propterea quod triangula vnum angulum vni angulo habentia æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia, æquiangula sunt,* [c] *ideoque latera omnia circa angulos æquales habent proportionalia, atque adeo inter se similia existunt: Rectangula vero,* [d] *eo quod reliqua duo latera duobus lateribus AD, DB, sunt æqualia, opposita oppositis, ac propterea eandem cum his proportionem habent.*



[a] 15. quinti

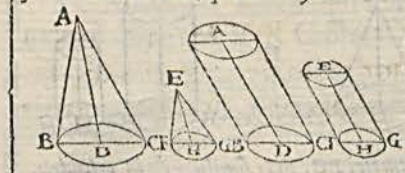
[b] 6. sexti

[c] 5. sexti.

[d] 34. primi

QVOD si coni, vel cylindri fuerint inclinati, (de rectis enim duntaxat Euclides verba fecit) dicentur ij tum demum similes, quando eorum axes, & diametri basium erunt proportionales, angulique inclinationum, quos axes efficiunt, æquales: qui quidem anguli accipiendi sunt, vt in definitione quinta dictum est. Sint enim coni inclinati, similiter & cylindri

cylindri ABC, EFG: In conis autem axes sint AD, EH, & basium diametri BC, FG; similiter & in cylindris. Itaque si fuerit tam in conis, quam in cylindris, vt AD, ad EH, ita BC, ad FG, exterintq; anguli inclinationũ ADB, EHF, tã in conis, quam in cylindris, æquales inter se: dicẽtur & coni inter se, & cylindri quoque inter se similes; quoniam nimirum hac ratione & tres eorum dimensiones sunt proportionales, vt supra diximus, & rursus tam triangula ADB, EHF, quam rectangula AB, EF, quorum conuersiones conos, & cylindros effecerunt, inter se similia sunt, veluti in rectis conis, cylindrisque demonstrauimus. Est enim prorsus eadem demonstratio, cum anguli ADB, EHF, ponantur æquales, licet non sint recti.



XXV.

CVBVS est figura solida sub sex quadratis æqualibus contenta.

XXVI.

TETRAEDVM est figura solida sub quatuor triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

XXVII.

OCTAEDRVM est figura solida sub octo triangulis æqualibus, et æquilateris contenta.

DO-

XXVIII.

DODECAEDRVM est figura solida sub duodecim pentagonis æqualibus, & æquilateris, & æquiangulis contenta.

XIX.

ICOSAEDRVM est figura solida sub viginti triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

HÆC sunt quinque corpora, quæ regularia vocantur, quod omnia plana, quibus continentur, æqualia sint, æquilatera, & æquiangula, vt ex eorum definitionibus constat. A nonnullis corpora Platonica dicuntur, propterea quod Plato in Tymæo quinque mundi corpora, quæ simplicia a philosophis nuncupantur, nempe Cœlum, Ignem, Aerem, Aquam, atque Terram, quinque hisce corporibus assimilat, vt in sphæra Ioãnis a sacro bosco latius explicauimus. Horum omniũ constructio tradetur lib. 13. Cubi quidem propos. 15. Tetraedri vero propos. 13. Octaedri deinde propos. 14. Dodecaedri autẽ propos. 17. Icosaedri denique propos. 16. Vbi planius perfectiusq; definitiones horum corporum intelligentur. In plano enim difficillimum est, ea ita depingere, vt veram eorum effigiem, atq; formã quis intueatur. Trademus tamen propriis in locis praxes admodũ faciles, quibus ea quilibet secundũ eorũ soliditatẽ possit conficere. Neque vero aliud corpus regulare praeter quinq; illa dari potest, vt demõstrabimus ad finẽ lib. 13.

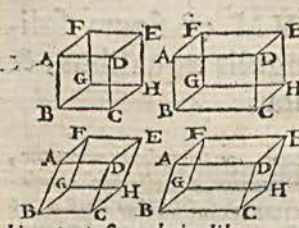
QVONIAM vero frequens hoc lib. 11. fit mentio Parallelepipedi, & lib. 15. agitur de mutua inscriptione, circumscriptioneque corporum regularium; necessarium esse duximus, tribus definitionibus explicare, quidnam sit Parallelepipedum,

lepipedum, quidque sit figuram solidam in figura solida inscribi, vel circa eandem describi.

XXX.

PARALLELEPIPEDVM est figura solida sex figuris quadrilateris, quarum, quæ ex aduerso, parallelę sunt, contenta.

VELVTI solida figura comprehensa sex quadrilateris ABCD, DEFA, ABGF, FGHE, EDCH, HCBG, quarum oppositæ AC, FH; Itẽ EDF, CG; Item AG, DH, sunt parallelæ, nominantur parallelepipeda, quæ parallelis planis comprehẽsa. quæ quidem plana parallela oppositæ, sunt & æqualia, & similia, & parallelogramma, vt demonstrabitur propos. 24. huius lib.



SVNT autem tot parallelepipedorum genera, quot parallelogrammorum. Si enim sex parallelogramma fuerint æquilatera, & rectangula, hoc est, quadrata, dicetur parallelepipedum illud, cubus, respondebitque quadrato in planis figuris: Si autem sex parallelogramma fuerint quidem rectangula, at non omnia æquilatera, sed altera parte lõgiora, quãuis duo sint æquilatera, appellabitur parallelepipedum altera parte longius. Quod si sex parallelogramma extiterint, æquilatera quidem, sed non omnia rectangula, quamuis duo sint rectangula, vocabitur parallelepipedum illud, Rhombus. Si denique sex parallelogramma neque rectãgula fuerint omnia, neque omnia æquilatera, quamuis duo sint rectangula, & æquilatera, vel rectangula tantum, vel æquilatera tantum, fuerint tamen parallelogramma, quæ ex aduerso, æqualia; parallelepipedum tale Rhomboides nuncupabitur. Cæterum quodcunque parallelepipedum vocari etiam poterit Prisma, vt ex definitione prismatis constat.

SOLI-

XXXI.

SOLIDA figura in solida figura dicitur inscribi, quando omnes anguli figuræ inscriptæ constituuntur vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis figuræ, cui inscribitur.

XXXII.

SOLIDA figura solidę figurę vicissim circumscribi dicitur, quando vel anguli, vel latera, vel denique plana figuræ circumscriptę tangunt omnes angulos figurę, circum quam describitur.

NON est necesse, vt anguli interioris figuræ constituantur in omnibus vel angulis, vel lateribus, vel planis exterioris figuræ, cum interdum figura exterior plures, interdũ pauciores angulos contineat, vel latera, vel plana, quam interior: sed satis est, vt omnes anguli figuræ interioris tangant vel aliquot angulos, uel aliquot latera, vel denique aliquot plana exterioris figuræ; ita ut nullus angulus figuræ interioris intactus relinquatur uel ab angulis, uel a lateribus, uel denique a planis figuræ exterioris.

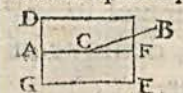
VERVM duæ hæ postremæ definitiones planius percipientur ex lib. 15. in quo de inscriptionibus, circumscriptionibusque mutuis corporum regularium copiose agetur.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

RECTAE lineæ pars quædã non est

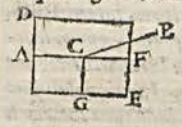
in ſubiecto plano, quædam vero in ſublimi.

SIT enim, ſi fieri poteſt, rectæ lineæ AB, pars quidē AC, in ſubiecto plano DE, pars vero CB, in ſublimi, ita vt omnia puncta partis AC, in plano DE, iaceant, puncta vero omnia partis CB, ſupra planum DE, exiſtant, vel infra. Erit igitur in plano DE, ipſi AC, rectæ lineæ continua quædam recta linea in directum poſita, nempe CF. Quamobrem duæ rectæ AB, AF, commune habent ſegmentum AC. quod eſt abſurdum, vt in pronunciato 10. lib. 1. demonſtrauimus. Rectæ igitur lineæ pars quædam non eſt in ſubiecto plano, quædam uero in ſublimi. Quod erat demonſtrandum.



SCHOLIVM.

HÆC eſt communis demonſtratio interpretum. Sed fortaſſe dicet aliquis, in ea aliquid deſiderari, nēpe vt oſtendatur, rectā AC, eſſe aliquam rectam in plano DE, in directū, & continuum poſitam. Qui enim concedit, rectā AB, partem quidem AC, eſſe in plano DE, partem vero CB, in ſublimi, vtique negabit, rectā AC, in plano DE, dari poſſe aliam rectam in continuum, & directum, quādoquidem rectam CB, in rectum & continuum poſitam eſſe fatetur ipſi AC. Verumtamen ei, qui ſic dubitat, reſpondendum eſt, rectam quamlibet finitam in quouis plano datam poſſe in eodem vlterius produci in rectum & continuum, cum plana ſuperficies ſit illa, quæ ex æquali ſuas interiacet lineas, hoc eſt, quæ recte, & æqualiter ſemper extenditur, vt & linea recta. Quamobrem ſi AC, in plano DE, producatur vſque ad F, erit CF, recta rectæ AC, in continuum & directum poſita. Verum demonſtremus iam id ipſum Geometrice, in plano videlicet DE, ipſi AC, dari poſſe aliam rectam, quæ cum ipſa unam rectam lineam cōſtituat, quamuis quis dicat, AB, eſſe quoque rectam, eiuſque partem AC, in plano DE, partem vero CB, in ſublimi eſſe poſitam.



Ducatur enim in plano DE, ipſi AC, perpēdicularis CG; & in eodē plano ipſi CG, perpendicularis CF. Dico CF, eſſe ipſi AC, poſitam in continuū & rectū. Cū enim AC, & FC, in eodem plano DE, cum recta CG, duos rectos angulos conſtituant ACG, FCG, ex conſtructione; erunt AC, & FC, in directum & continuum poſitæ. Quamobrem etiamſi quis contendat, AB, eſſe rectam, cuius quidem pars AC, in plano DE, ſubiecto, pars autem CB, in ſublimi ſit conſtituta; tamen in eodem plano DE, erit alia recta, nempe CF, quæ cum AC, vnam rectam conſtituat lineam; atque adeo duæ rectæ AB, AF, ſegmentum commune habebunt AC. Quod eſt abſurdum.

[a] 11. primi

[b] 14. primi

HINC ſit omnes partes cuiuſuis rectæ lineæ, hoc eſt, totam rectam lineam, in vno exiſtere plano.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

2.

SI duæ rectę lineæ ſe mutuo ſecent, in vno ſunt plano. Atque triangulum omne in vno eſt plano.

RECTAE lineæ AB, CD, ſe mutuo ſecent in E, & in EB, ED, ſumptis punctis F, & G, vtcumque, ducatur recta FG, vt fiat triangulum EFG. Dico triangulum EFG, in vno eſſe plano; Item rectas AB, CD, in vno quoq; plano exiſtere. Si enim trianguli EFG, pars quædam, nimirū EHIG, in plano vno exiſtat, & pars quædam, nempe reliqua FHI, in ſublimi, vel contra; Exiſtent quoque rectarum EF, GF, partes quidem EH, GI, in vno plano, partes vero HF, IF, in ſublimi, vel contra. quod fieri nō poſſe, iam ſupra [c] demonſtratum eſt. Quod ſi eiuſdem trianguli pars quidem EFIK, in vno plano credatur eſſe, pars autem GIK, in ſublimi, vel contra; erunt eadem ratione rectarum EG, FG, partes quidem EK, FI, in vno plano, partes vero KG, IG, in ſublimi, vel contra. Si denique eiuſdem trianguli pars quidem FHKG, in vno concedatur

[c] 1. vndec.

tur esse plano, pars vero EHK, in sublimi, vel contrà; erunt quoq; rectarum FE, GE, partes quidē FH, GK, in vno plano, partes autem HE, KE, in sublimi, vel cōtra. Quæ omnia absurda sunt,[a] vt est demonstratum. Quare triangulum EFG, in vno plano existit; eademque est ratio in omni alio triangulo.

[a] 1. vndec.

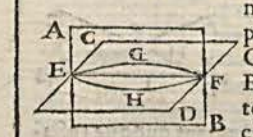
QVIA vero, in quo plano est triangulum EFG, in eodem existunt eius latera EF, EG: In quo autem sunt rectæ EF, EG,[b] in eodem sunt rectæ totæ CD, AB, ne partes quædā in plano, partes vero aliæ in sublimi dicantur esse; Erunt propterea rectæ AB, CD, in vno plano, in quo nimirum triangulū EFG, consistere demōstrauimus. Quocirca si duæ rectæ lineæ se mutuo secent, in vno sunt plano. Atque triangulum omne in vno est plano. Quod erat demonstrandum.

[b] 1. vndec.

3. THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI duo plana se mutuo secent, communis eorum sectio est linea recta.

SECENT se mutuo plana AB, CD, sitq; communis eorum sectio EF. Dico EF, esse lineam rectā. Si enim non credatur esse recta, ducatur in plano AB, recta EGF, & in plano CD, recta EHF. Rectæ igitur EGF, EHF, cum eosdem habeant terminos E, & F, superficiem includent. Quod fieri non potest, vt in 14. pronunciato 1. lib. ostendimus. Communis ergo sectio EF, recta erit linea; Ac proinde si duo plana se mutuo secent, communis eorum sectio est linea recta. Quod erat ostendendum.



ALITER. Secent se rursus plana AB, CD, sintq; termini sectionis communis E, & F, puncta, quæ connectātur recta EF. Si igitur recta EF, in vtroque plano existit, cōstat propositum: Ipsa enim erit communis sectio. Si

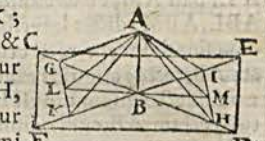
Si vero EF, recta in neutro eorum dicatur esse, tunc si in alterutro eorum recta ducatur EGF, concludent rursus duæ rectæ EF, EGF, superficiem, cū eosdem habeant terminos E, & F. Si denique recta EF, in altero tantū plano esse credatur, tunc si in altero ducatur recta EGF; includent iterum duæ rectæ EF, EGF, superficiem. Quod est absurdum. Est ergo recta EF, in vtroque plano AB, CD; atque adeo communis eorum sectio est.

4. THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI recta linea rectis duabus lineis se mutuo secātibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat: Illa ducto etiā per ipsas plano ad angulos rectos erit.

RECTA linea AB, insistat duabus rectis CD, EF, ad rectos angulos in communi earum sectione B. Dico rectam AB, ad angulos quoque rectos esse plano, quod per ipsas ducitur, seu in quo existunt. Cū enim se mutuo secent in B;[a] erunt ipsæ in vno plano, quod sit CEDF. Sumātur inter se æquales rectæ BG, BH; Item rectæ BI, BK; ducanturq; rectæ GK, IH; & in eodem plano per B, ducatur recta LM, secās rectas GK, IH, in punctis L, & M. Demittantur quoque ex A, puncto in sublimi ad idem planum rectæ AG, AL, AK, AH, AM, AI. Quoniam igitur latera BG, BK, triāguli BGK, lateribus BH, BI, trianguli BHI, ex constructione sunt æqualia;[b] & anguli quoque ipsis contenti GBK, HBI, cum sint ad verticem B, oppositi, æquales:[c] Erunt bases GK, HI, inter se, & anguli BKG, BIH, inter se quoque æquales.

[a] 2. vndec.



[b] 15. primi

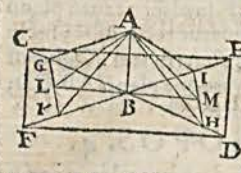
[c] 4. primi.

RVRSVS[d] cum anguli KBL, IBM, ad verticem B, oppositi sint æquales; erūt duo anguli KBL, BKL, trianguli BKL, duobus angulis IBM, BIM, trianguli BIM, æquales; Sunt autem & latera BK, BI, quibus adiacent,

[d] 15. primi

æqualia, ex constructione. [a] Igitur & reliqua latera KL, LB, reliquis lateribus IM, MB, æqualia erunt.

PRAETEREA cum latera AB, BG, trianguli ABG, æqualia sint lateribus AB, BH, trianguli ABH, ex constructione; & anguli ipsis contenti ABG, ABH, æquales, nempe recti ex hypothesi, [b] erunt & bases AG, AH, æquales. Simili argumento æquales erunt rectæ lineæ AI, AK.



AMPLIVS quia latera AI, IH, trianguli AIH, lateribus AK, KG, trianguli, AKG, æqualia sunt; & basis AH, basi AG, ex hactenus demonstratis; [c] erunt etiam anguli AIH, AKG, dictis lateribus comprehensi, æquales.

ITAQVE cum latera AK, KL, trianguli AKL, æqualia sint lateribus AI, IM, trianguli AIM; & anguli ipsis contenti AKL, AIM, æquales etiam, vt hactenus demonstrauimus; [d] erunt quoque bases AL, AM, æquales.

QVONIAM deniq; latera AB, BL, trianguli ABL, æqualia sunt lateribus AB, BM, trianguli ABM; & basis AL, basi AM, ex demonstratis; [e] erunt quoque anguli ABL, ABM, dictis lateribus comprehensi, æquales; qui cum sint deinceps, recti erunt, ex defin. 10. lib. 1. Quare recta AB, rectos angulos efficit cum recta LM, quæ in plano subiecto ipsam tangit in B: Eademq; ratione ostendetur, rectam AB, cum omnibus rectis, quæ in eodem plano ipsam tangent in B, angulos rectos constituere, etiamsi inter pũcta G, I, & K, H, ductæ sint, dummodo rectæ GI, KH, iungantur: vel certe literę disponantur, vt prius, quemadmodum in hac figura apparet, vbi eædem sunt literæ, & tamen LM, non ducitur à sinistra in dextrã, vt in priori figura, sed a superiori parte versus inferiorem. [f] Quocirca recta AB, plano CEDF, quod per rectas CD, EF, ducitur, ad rectos angulos erit, ex defin. 3. huius lib. Si recta igitur linea rectis duabus lineis se mutuo secantibus, &c. Quod demonstrandum erat.

THEO-

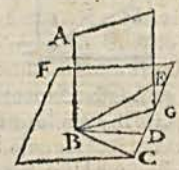
[a] 26. primi
[b] 4. primi.
[c] 8. primi.
[d] 4. primi.
[e] 8. primi.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

5.

SI recta linea rectis tribus lineis se mutuo tangentibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat: Illæ tres rectæ in vno sunt plano.

INSISTAT recta linea AB, tribus rectis lineis BC, BD, BE, se tangentibus in B, ad rectos angulos in communi earum sectione, seu tactu B. Dico tres rectas BC, BD, BE, in vno plano esse. [a] Cũ enim quælibet duæ in vno sint plano, propterea quod productæ ad partes B, se mutuo secent in B; sint BC, BD, in plano FC; Et si fieri potest, recta BE, non ponatur in eodem plano, sed in sublimi. [b] Quoniam vero duæ rectæ AB, BE, in vno sunt plano, cum se mutuo secent in B; sint ambæ in plano AE. Et quia plana FC, AE, sibi mutuo occurrunt in B; necessario producta se mutuo secabunt. [c] Sit ergo eorum communis sectio recta BG. Quia vero recta AB, ad angulos rectos ponitur rectis BC, BD; [d] erit propterea & plano FC, p ipsas ducto ad rectos angulos; ac proinde ad rectos angulos erit rectæ BG, quæ ipsã in B, tangit, ex defin. 3. huius lib. Quare recti anguli ABE, ABG, existentes in plano AG, per rectas AB, BE, ducto æquales inter se erunt, pars & totum. Quod est absurdũ. Duabus igitur rectis BC, BD, in vno plano FC, existentibus, nõ erit BE, in sublimi, sed in eodem cum ipsis plano. Quocirca si recta linea rectis tribus lineis se mutuo tangentibus, &c. Quod erat ostendendum.



THEOR.

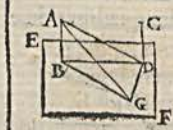
[a] 2. undec.
[b] 2. undec.
[c] 3. undec.
[d] 4. undec.

6.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos sint angulos; Parallelæ erunt illæ rectæ lineæ.

SINT duæ rectæ lineæ AB, CD, eidem plano EF, ad angulos rectos in punctis B, & D. Dico illas esse parallelas. Ducta enim recta BD, in plano EF, erunt anguli ABD, CDB, recti, ex defin. 3. huius lib. Iam in eodem plano EF, ducatur DG, ad BD, perpendicularis, ponanturque æquales AB, DG. Connectãtur deinde rectæ BG, GA, AD. Quoniam igitur latera AB, BD, trianguli BAD, æqualia sunt lateribus GD, DB, trianguli GDB, ex constructione; & anguli quoque ipsis contenti ABD, GDB, æquales, nempe recti; [a] erunt bases æquales AD, GB. Rursus quia latera AB, BG, trianguli ABG, æqualia sunt lateribus GD, DA, trianguli GDA; Est autem & basis communis AG; [b] Erunt anguli ABG, GDA, æquales: Est autem ABG, rectus, ex defin. 3. huius lib. Igitur & GDA, rectus erit. Quoniam vero ex eadem defin. angulus quoque GDC, rectus est; erit recta GD, tribus rectis DB, DA, DC, ad angulos rectos. [c] Quare rectæ DB, DA, DC, in vno erunt plano: [d] Est autem AB, in eodem plano, in quo DB, DA. Recta igitur CD, in eodem erit cum AB, plano. Quocirca cum anguli interni ABD, CDB, sint recti, [e] erũt rectæ AB, CD, parallelæ. Si duæ itaque rectæ lineę eidem plano ad rectos sint angulos, &c. Quod erat demonstrandum.



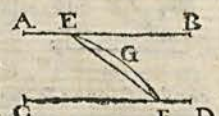
a 4. primi.
b 8. primi.
c 5. undec.
d 2. undec.
e 28. primi

7.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI duæ sint parallelæ rectæ lineę, in quarum vtraque sumpta sint quęlibet puncta: Illa linea, quæ ad hęc puncta adiungitur, in eodem est cum parallelis plano.

IN parallelis AB, CD, sumantur vtcunque duo puncta E, & F, quæ recta connectantur EF. Dico rectam EF, in eodem esse plano, in quo, per definitionem parallelarum, sunt parallelæ AB, CD. Si enim recta EF, non concedatur esse in eodem plano parallelarum, sed extra: secet iam aliud planum superficiem parallelarum per puncta E, & F, sitque communis sectio horum planorum EGF, [a] quę recta linea erit. Duæ igitur rectæ EF, EGF, cum habeant eosdem terminos E, & F, superficiem claudent. Quod est absurdum. Non ergo extra planum parallelarum AB, CD, erit recta EF. Quare si duæ sint parallelæ rectæ lineæ, in quarum vtraque sumpta sint quælibet puncta: Illa linea, quæ ad hæc puncta adiungitur, in eodem est cum parallelis plano. Quod erat demonstrandum.



a 3. undec.

SCHOLIVM.

HÆC eadem propositio vera est, etiãsi duæ rectæ AB, CD, parallelæ non sint, dummodo in eodem plano existant, vt manifestum est ex demonstratione.

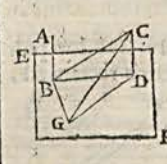
8.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

SI duæ sint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano sit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.

SINT

SINT parallelæ rectæ *AB*, CD; sitque CD, plano EF, ad angulos rectos. Dico & AB, eidem plano EF, esse ad rectos angulos. Ducta enim recta BD, in plano EF; erit per defin. 3. huius lib. angulus CDB, rectus: [a] Sunt autem duo CDB, ABD, duobus rectis æquales. Igitur & ABD, rectus erit. Iam in plano EF, ducatur BG, perpẽdicularis ad BD; ponanturque æquales BG, CD. Conjungantur deinde rectæ D G, GC, CB. Quoniã igitur latera CD, DB, trianguli CDB, æqualia sunt lateribus GB, BD, trianguli G B D, ex constructione; & anguli quoque ipsis contenti, C D B, GBD, æquales, nimirum recti; [b] Erunt bases CB, GD, æquales. Rursus quia latera CD, DG, trianguli CDG, æqualia sunt lateribus GB, B C, trianguli GBC; & basis est communis CG; [c] Erunt anguli CDG, GBC, dictis lateribus comprehensi æquales. Est autem C D G, rectus ex defin. 3. huius lib. Igitur & GBC, rectus erit. Quare recta GB, duabus rectis BD, BC, se mutuo secantibus in B, (Si namque producerẽtur DB, CB, secarent sese in B, ob angulum CBD.) ad rectos angulos existit; [d] ac proinde ad rectos angulos erit plano per BD, BC, ducto: Est autem in hoc eodem plano recta *A* B; [e] propterea quod rectæ *BD*, *BC*, in eodẽ sunt plano, in quo parallelæ *AB*, CD; cum puncta *B*, C, D, existant in parallelis *AB*, CD. Igitur & *GB*, recta rectæ *B* A, ad rectos erit angulos ex defin. 3. huius lib. Quare cũ *AB*, recta sit ad rectas BG, BD; [f] erit quoque AB, recta ad planum per *BG*, *BD*, ductum, hoc est, ad planum EF. Si duæ igitur sint parallelæ rectę lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano sit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit. Quod erat ostendendum.



[a] 29. primi

[b] 4. primi.

[c] 8. primi.

[d] 4. undec.

[e] 7. undec.

[f] 4. undec.

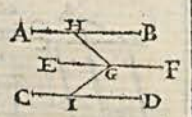
THEOR. 9. PROPOS. 9.

9.

QVAE eidem rectæ lineæ sunt parallelæ,

rallelæ, sed non in eodem cum illa plano: Hæ quoque sunt inter se parallelæ.

SINT rectæ AB, CD, ipsi EF, parallelæ; non sint autem in eodem cum *EF*, plano. Dico AB, CD, parallelas quoq; esse. Nam à quolibet puncto G, rectæ EF, ad ipsam EF, ducantur duæ perpendiculares; GH, quidem in plano parallelarũ AB, EF; at GI, in plano parallelarũ CD, EF. Quoniam igitur E G, recta est ad duas rectas GH, GI, se tangẽtes mutuo in G; [a] erit recta quoque ad planum per ipsas GH, GI, ductum. Quamobrem cum sint parallelæ AB, *EF*; & EF, sit recta ad planũ per GH, GI, ductum; [b] erit quoque AB, ad idem planum recta. Similiter cum sint parallelæ CD, EF; sit autem EF, recta ad planum per GH, HI, ductum; [c] erit etiam CD, recta ad idem planum; [d] Atque proinde rectæ AB, CD, cum rectæ sint ad idem planum per GH, GI, ductum, parallelæ erunt. Quæ igitur eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, sed non in eodem cum illa plano: hæ quoque sunt inter se parallelæ. Quod erat demonstrandum.



[a] 4. undec.

[b] 8. undec.

[c] 8. undec.

[d] 6. undec.

SCHOLIVM.

DATA opera Euclides voluit, duas rectas AB, CD, non esse in eodem plano cum recta EF, cui sunt parallelæ. Nã si forent in eodem plano cum ipsa EF; essent AB, CD, inter se parallelæ, ex 30. propos. 1. lib. Superuacaneum ergo esset, hic idem demonstrare.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

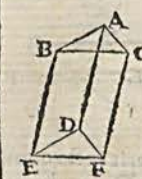
10.

SI duæ rectę lineę se mutuo tangentes, ad duas rectas se mutuo tangentes

sint

sint parallelę, non autẽ in eodem plano: Illę angulos æquales comprehendent.

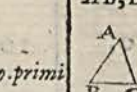
SINT rectæ AB, AC, se tangentes in A, parallelæ rectis DE, DF, se tangentibus in D; non sint autem AB, AC, in eodem plano, in quo DE, DF. Dico angulos BAC, EDF, ab ipsis comprehensos esse æquales. Ponãtur enim AB, DE, inter se æquales, & AC, DF, inter se; ducanturque rectæ BC, EF, BE, AD, CF. Quoniam igitur AB, DE, parallelæ sunt & æquales; [a] erũt quoque BE, AD, parallelæ & æquales. Simili argumento parallelæ erũt & æquales CF, AD. Quare cum BE, CF, parallelæ & æquales sint eidem AD; [b] erunt etiam BE, CF, inter se parallelæ, & æquales: Ac propterea parallelæ & æquales erũt rectæ BC, EF. Quia ergo latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia sunt lateribus DE, DF, trianguli DEF, ex constructione; & basis BC, basi EF, æqualis, vt modo demonstrauimus; [d] Erunt & anguli BAC, EDF, dictis lateribus comprehẽsi, æquales. Si igitur duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, &c. Quod erat ostendendum.



[a] 33. primi
[b] 9. vndec.
[c] 33. primi
[d] 8. primi.

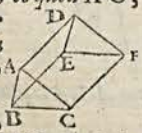
SCHOLIVM.

CONCLVSIO huius theorematis vera etiam est, quãdo priores duæ lineæ in eodẽ sunt plano cũ duabus posteroribus. Sint enim quatuor lineæ AB, AC, DE, DF, in eodẽ plano, sitq; AB, ipsi DE, & AC, ipsi DF, parallela. Dico angulos BAC, EDF, esse æquales. Nam ponantur æquales AB, DE, & AC, DF; ducanturq; rectæ BC, EF, quæ aut in vna recta linea erunt constitutæ, aut non. Sint prius in vna recta BF. Quoniã igitur parallelæ sunt AB, DE; [e] æquales erũt anguli ABC, DEF, internus & externus. Similiter æquales erũt anguli ACB, DFE; Sũt enim & AC, DF, parallelæ. Quare duo anguli ABC, ACB, trianguli ABC, æquales sunt duobus angulis DEF, DFE, trianguli DEF. Igitur anguli quoque reliqui BAC, EDF, æquales erunt. Quod est propositum.



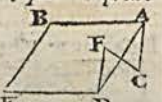
[e] 29. primi

NON sint iam BC, EF, in vna recta linea constitutæ. Ductis rectis AD, BE, CF, cum AB, DE, sint parallelæ & æquales; [b] erunt & AD, BE, parallelæ & æquales. Eadem ratione AD, CF, parallelæ erunt & æquales, eo quod AC, DF, parallelæ ponuntur, & æquales. Quare & BE, CF, eidẽ AD, parallelæ existẽtes & æquæ inter se parallelæ erũt & æquales: [c] Ac propterea parallelæ & æquales quoq; erũt BC, EF. Si igitur cũ duo latera AB, AC, triãguli ABC, æqualia sint duobus lateribus DE, DF, triãguli DEF; & basis BC, basi EF, [c] erunt anguli BAC, EDF, contenti dictis lateribus, æquales. Quod est propositum.



[a] 32. primi
[b] 33. primi
[c] 30. primi
[d] 33. primi
[e] 8. primi.

CAETERVM vt conclusio huius theorematis recte ex data hypothesi colligatur, necesse est, rectas lineas parallelas ita esse positas, (siue omnes sint in eodẽ plano, siue non,) vt tres rectæ AD, BE, CF, nullã rõne se mutuo secent; vt ex prima et vltima figura apparet. Nã alias cõclusio vera nõ erit. SVNT enim rectæ AB, AC, rectis DE, DF, parallelæ in hac figura; & tamen anguli BAC, EDF, quos comprehẽdunt, non sunt æquales, cum ille sit acutus, hic vero obtusus. Hoc autem ideo euenit, quod AD, CF, se mutuo secant. Vnde quamuis AC, DF, sint parallelæ & æquales, non tamen propterea AD, CF, quæ eas coniungunt, parallelæ sunt & æquales, propterea quod eæ non coniungũt ad easdem partes, vt vult propos. 33. lib. 1. Quare demonstratio huius theorematis locum non habet, deficiente hac conditione; quæ tamen in superioribus figuris seruatur.

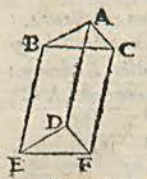


PORRO conuersum quoque huius propos. nimirum: Si in planis parallelis duo anguli sint æquales, & linea vna vnius lineæ vni alterius parallela; erit quoque altera linea alteri lineæ parallela, si modo ductæ sint ex eadem parte planí per priores parallelas ducti: demonstrabimus hoc modo. In planis parallelis sint anguli æquales BAC, EDF, quæque AB, ipsi DE, parallela, & AC, DF, sint ad eas-

dem

dem partes plani AE, per AB, DE, ducti. Dico AC, DF, parallelas quoque esse. hoc est, planum per AC, AD, ductum trā sire etiam per rectam DF. Si enim non sint

a 31. primi



parallelæ; a si ducatur in plano CD, per AC, AD, ducto recta alia per D, ipsi AC, parallela, b continebit hæc cum DE, angulum angulo EAC, æqualē, ac propterea & angulo EDF: atque ita pars & totū erunt æqualia. quod est absurdū. Recta ergo

b 10. vnde.

DF, ipsi AC, parallela est: atq; adeo planū per AC, AD, ductū trāsibit per rectā DF. quod est propositū.

11. PROBL. 1. PRPOS. 11.

A dato puncto in sublimi, ad subiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

SIT a puncto A, in sublimi ad subiectum planū BC, ducenda perpendicularis. Ducatur in plano BC, recta vtcunq; DE; c ad quam ex A, deducatur perpendicularis AF: Et in plano BC, per F, ad DE, perpendicularis ducatur GH; e ad quam ex A, perpendicularis demittatur AI. Dico AI, esse perpendicularem ad planum subiectum BC. f Ducta enim in plano BC, per I, ipsi DE, parallela KL; cum DF, ad rectos angulos sit duabus FA, FH, ex constructione, g ac proinde recta ad planum per FA, FH, ductum; h erit quoque KL, ad idem planum per FA, FH, ductum recta. i Quoniam vero AI, in eodem est cum rectis FA, FH, plano, tangitq; rectam KI, in I; erit per definitionem 3. huius lib. angulus KIA, rectus; atque adeo AI, ad rectos angulos erit duabus KI, IF. k Igitur AI, ad planum BC, recta erit. A dato ergo pūcto in sublimi, ad subiectū planū perpendicularem rectam lineam duximus. Quod faciendū erat.

c 12. primi
d 11. primi
e 12. primi
f 31. primi.
g 4. vnde.
h 8. vndec.
i 2. vndec.
k 4. vndec.

SCHO-

SCHOLIVM.

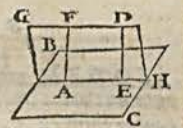
QVOD si quando AI, ad GH, ducta perpendicularis cadat in punctum F, ita vt eadem sit, quæ AF, ad DE, ducta perpendicularis; a erit ipsa AF, ab initio ad DE, ducta perpendicularis ad subiectum planum BC, perpēdicularis, cum perpendicularis sit ad vtramque DE, GH.

a 4. vnde.

12. PROBL. 2. PRPOS. 12.

DATO plano a puncto, quod in illo datum est, ad rectos angulos rectam lineam excitare.

SIT a dato puncto A, in plano BC, ducenda perpendicularis ad datum planum BC. b Ex quouis puncto D, in sublimi demittatur ad planum BC, perpendicularis DE, quæ si ceciderit in A, punctum, factum erit, quod proponitur: Si vero ceciderit in aliud punctum E; extensa recta per E, & A, c ducatur per A, ipsi DE, parallela AF, in plano GH, per DE, EA, ducto. Dico AF, rectam esse ad planum datū BC. Cum enim DE, AF, parallelæ sint; & DE, recta ad planū BC, ex constructione; d erit quoq; AF, ad idem planum BC, recta. Itaque dato plano, a puncto, quod in illo datum est, &c. Quod faciendum erat.



b 11. vnde.
c 31. primi
d 8. vndec.

13. THEOR. 11. PROPOS. 13.

DATO plano, a puncto, quod in illo datum est, duæ rectæ lineæ ad re-

 ctos

ctos angulos non excitabuntur, ad eas-
dem partes.

SIT datum planum AB. Dico a dato eius puncto C, ad easdem partes non posse educi duas perpendiculares ad planum AB. Ducantur enim, si potest fieri, duæ perpendiculares CD, CE, ad planum AB; & per CD, CE, [a] quæ in vno, eodemque plano sunt, ducatur planum FG, secãs planum AB, per rectam lineam GH. Cum igitur EC, DC, rectæ sint ad planum AB; erunt per defin. 3. huius lib. anguli ECG, DCG, recti, ac proinde æquales; pars & totum. Quod est absurdum. Dato igitur plano, a puncto, quod in illo datum est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabũtur, ad easdẽ partes. Quod erat demonstrandum.

[a] 2. vndec.

ALITER. Ducantur, si fieri potest, ex C, ad planum AB, duæ perpẽdiculares CD, CE. Cum igitur duæ DC, EC, rectæ sint ad idem planum AB; [b] erunt ipsæ inter se parallelæ, cum tamen conueniant in puncto C. Quod est absurdum.

[b] 6. vndec.

SCHOLIVM.

EODEM modo a puncto in sublimi ad subiectum planum duæ rectæ lineæ ad angulos rectos non demittentur. Ducantur enim ex A, puncto in sublimi ad subiectum planum BC, si fieri potest, duæ perpendiculares AD, AE. Ducatur per AD, AE, [a] quæ in vno plano sunt, planum FG, secans planum BC, per rectam GH. Cum igitur AD, AE, rectæ sint ad planum BC, erunt per defin. 3. huius lib. duo anguli ADE, AED, recti interni in triangulo ADE. Quod est absurdum; [b] cum sint duobus rectis minores quilibet duo anguli in triangulo quouis assumpti.

[a] 2. vndec.

[b] 17. primi

ALITER. Si AD, AE, rectæ sunt ad planum BC; [c] ipsæ erunt inter se parallelæ, cum tamen conueniant in puncto A. Quod est absurdum.

[c] 6. vndec.

THEOR.

THEOR. 12. PROPOS. 14.

14.

AD quæ plana, eadem recta linea recta est; illa sunt parallela.

SIT recta AB, ad plana CD, EF, recta. Dico parallela esse plana CD, EF. Si enim non credantur esse parallela, producta inter se conuenient. Conueniant ad partes C, E; [a] & faciant communem sectionem rectam lineã GH: In qua sumpto puncto vtcunque I, ducantur rectæ IA, IB, in planis GCD, GEF. Quia igitur AB, recta ponitur ad plana GCD, GEF; erunt per defin. 3. huius lib. duo anguli IAB, IBA, recti, in triangulo ABI. [b] Sed & minores duobus rectis sunt. Quod est absurdum Igitur plana CD, EF, producta nunquam inter se conueniunt. Parellela ergo sunt. Ad quæ igitur plana, eadem recta linea recta est, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 3. vndec.

[b] 17. primi

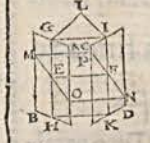
SCHOLIVM.

FACILE etiam demonstrari poterit conuersum huius, videlicet.

SI fuerint duo plana parallela, recta linea, quæ ad vnum eorum recta fuerit, ad reliquum quoque recta erit.

SINT duo plana parallela AB, CD, ad quorum alterum AB, recta sit linea recta EF. Dico EF, rectam quoq; esse ad planum reliquum CD. Secet enim planum aliquod, nempe GK, plana AB, CD, per lineam rectam EF, incedens, facia; communes sectiones cum dictis planis rectas GH, IK:

eruntque anguli GEF, HEF, recti per defin. 3. huius lib. Ac proinde recti etiam erunt anguli IFE, KFE.



(Si enim alter eorum, nempe IFE, dicatur acutus; erunt duo anguli GEF, IFE, duobus rectis minores. Quare rectæ EG, FI, ad partes G, I, conuenient, nimirum in puncto L; atque adeo & plana AB, CD, in quibus existunt, ad easdem partes conuenient ad punctum L; [a] *cum tota recta HGL, sit in vno plano, nempe in AB, producto; Item tota recta KIL, in vno quoque plano, nimirum in CD, protracto. Quod est absurdū, cum ponantur parallela. Recti ergo sunt anguli IFE, KFE.) Eodē modo si aliud planum videlicet MN, eadem plana secet per EF, faciens alias rectas, communes cum ipsis sectiones MO, PN; erunt anguli PFE, NFE, recti. Itaque cum EF, sit recta ad duas rectas IK, PN,* [b] *recta quoque erit EF, ad planū CD, per ipsas ductum. Quod est propositum.*

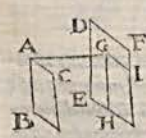
[a] 1. vndec.

[b] 4. vndec.

15. THEOR. 13. PROPOS. 15.

SI duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, ad duas rectas se mutuo tangentes sint parallelæ, non in eodem consistentes plano: Parallela sunt, quę per illa ducuntur, plana.

SINT duæ rectæ lineæ AB, AC, se tangentes in A, parallelæ duabus rectis lineis DE, DF, se tangentibus in D, existentibusq; in alio cum illis plano. Dico & plana BC, EF, per ipsas ducta, esse parallela. Ex A, enim deducatur ad planum EF, perpēdicularis AG, occurrēs plano EF, in puncto G [d] Deinde in plano EF, per G, ducantur GH, GI, ipsis DE, DF, parallelæ. Quoniam igitur rectæ AB, GH, parallelæ sunt ipsi DE; [e] erunt & AB, GH,



[e] 11. vnde.

[d] 31. primi

[f] 9. vndec.

GH, inter se parallelæ; [a] Ac proinde anguli BAG, AGH, duobus rectis æquales: Est autem AGH, rectus ex defin. 3. huius lib. Rectus ergo erit & angulus BAG. Simili argumento concludes, angulum CAG, rectum esse. Itaque cum recta GA, sit recta duabus AB, AC; [b] recta quoque erit GA, ad planum BC, per ipsas ductum. Est autem & recta ad planum EF, ex constructione. [c] Igitur parallela sunt plana BC, EF. Si ergo duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, &c. Quod erat demonstrandū.

[a] 29. primi

[b] 4. vndec.

[c] 14. vnde.

SCHOLIVM.

QVOD si perpendicularis ex A, ad planum EF, ducta cadat in ipsum et punctum D, concludetur idem, hoc excepto, quod in plano EF, non sunt ducendæ aliæ parallelæ. Vt si lineæ GH, GI, ponantur parallelæ rectis AB, AC, ita vt AG, ad planum HI, per GH, GI, ductum perpēdicularis, cadat in G; ostendemus, vt prius, GA, esse rectam ad planum BC, per rectas AB, AC, ductū, &c.

EX hoc theoremate non difficile erit problema subsequens. Videlicet.

DATO plano, per datum punctum, quod in eo non est, parallelum planum ducere.

DATVM planum sit AB, punctumque extra ipsum sit C, per quod ducendum sit planum plano AB, parallelum. In plano AB, ducantur vtcunq; duæ rectæ DB, DA, se tangentes in D, puncto, a quo ad C, recta ducatur DC. Deinde in plano BC, per rectas DB, DC, ducto, [d] agatur CE, ipsi DB, parallela; Et in plano AC, per rectas DA, DC, ducto fiat quoque CF, ipsi DA, parallela. Dico planum EF, per rectas CE, CF, ductum, parallelum esse plano dato AB. Cum enim duæ rectæ DB, DA, se tangentes in D, duabus rectis CE, CF, se tangentibus in C, existentibusq; in alio cū illis plano parallelæ sint; [e] parallelæ erunt plana AB, EF, per ipsas ducta. Quod est propositum.

[d] 31. primi

[e] 15. vnde.

16.

THEOR. 14. PROPOS. 16.

SI duo plana parallela plano quopiam secentur : communes illorum sectiones sunt parallelæ.

SECENTVR plana AB, CD, parallela plano EF, per rectas EH, GF. Dico communes sectiones eorum EH, GF, esse lineas parallelas. Si enim non sunt parallelæ, productæ inter se conuenient, cum sint in plano EF, secante. Conueniant igitur in puncto I. Quia ergo tota recta HEI, in vno est plano, nimirum in AB, producto ; Item tota recta FGI, in vno quoque est plano, videlicet in CD, producto; conuenient etiam plana AB, CD, producta ad I. Quod est absurdum, cum ponantur parallela. Sunt igitur rectæ EH, GF, parallelæ. Quare si duo plana parallela plano quopiam secentur, &c. Quod erat demonstrandum.

a 1. undec.

SCHOLIVM.

HOC theorema nulla ratione potest conuerti. Quamuis enim communes sectiones planorum parallelorum facta ab alio plano secante sint parallelæ, vt hic demonstratum est; Non tamen omnia illa plana, quorum communes sectiones facta ab alio plano secante sunt parallelæ, parallela sunt, cum per duas lineas rectas parallelas infinita plana possint duci, quorum duo tantum sunt parallela, alia vero omnia in aliquam partem producta conueniunt.

PORRO ex hoc theoremate colligimus aliud simile theoremati 30. lib. 1.

QVAE eidem plano parallela, & inter se sunt parallela.

SINT

SINT *duo plana AB, CD, plano EF, parallela. Dico & AB, CD, parallela esse. Secentur enim omnia tria plana plano GH, sintque communes eorum sectiones rectæ GI, KL, MH. Secentur rursus alio plano NH, sintque communes eorum sectiones rectæ NI, OL, PH, hac tamen lege, vt duo plana secantia GH, NH, se quoque mutuo secent, quorum sectio communis sit linea recta HI. Quia igitur parallela plana AB, EF, secantur plano GH, a erunt communes sectiones GI, KL, parallelæ. Eodem modo parallelæ erunt MH, KL; b atque adeo parallelæ erunt inter se GI, MH. Non aliter ostendemus, parallelas esse NI, PH. Itaque cum IG, IN, se mutuo tangentes in I, parallelæ sint rectis HM, HP, se tangentibus in H, existentibusque in alio plano, c erunt plana AB, CD, per ipsas ducta, parallela. Quod est propositum.*

a 16. unde.

b 9. undec.

c 15. unde.

ALITER. Sumatur in tertio plano EF, punctum quodlibet G, a quo in vtramque partem educatur ad planum EF, linea recta perpendicularis, occurrens plano AB, in puncto H, & plano CD, in puncto I. Quoniam igitur linea HG, recta est ad planum EF, recta quoque erit ad planum AB, sibi parallelum, per ea, quæ in scholio propositionis 14. huius lib. demonstrauimus. Eadem ratione GI, recta erit ad planum CD. Quamobrem cum recta HI, sit recta ad plana AB, CD; d parallela inter se erunt plana AB, CD. Quod est propositum.

d 14. unde.

QVOD si duo plana fuerint alteri plano parallela, non tamen inter se, sed conueniant, tunc idem efficient planum; quemadmodum duæ rectæ, quæ alteri rectæ sunt parallelæ, si conueniant, vnam rectam constituunt lineam, veluti ad propos. 30. lib. 1. demonstrauimus. Sint enim plana AB, CD, plano EF, parallela, conueniantque producta secundum rectam CG. Dico plana AB, CD, vnum planum constituere. Secet enim planum quodpiam HI, omnia

tria plana per lineas rectas HK, LM, MI. Quoniam igitur parallela sunt plana AB, EF; [a] erunt & communes sectiones LM, HK, parallelæ. Eadem ratione parallelæ erunt IM, HK. Quam ob rem cum rectæ LM, IM, parallelæ sint ipsi HK, existantque in eodem plano secante HI, & conueniant in M; ipsæ erunt in rectum & continuum positæ, per ea, quæ ad 30. propos. lib. 1. ostendimus. Ac proinde plana AB, CD, vnum planum efficient; [b] propterea quod recta LI, in vno iacent plano. Quod est propositum.

[a] 16. vnde.

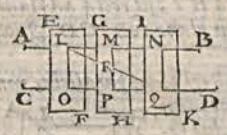
[b] 1. vndec.

ITAQVE duo plana, quæ parallela sint alteri plano, vel inter se parallela erunt, vel certe, si producta conueniant, vnum planum conficient.

17. THEOR. 15. PROPOS. 17.

SI duæ rectæ lineæ parallelis planis secentur; In easdem rationes secabuntur.

RECTAE lineæ AB, CD, (siue eæ parallelæ sint, vt in figura, siue nō, existētes tū in eodē plano; siue in trāsuersum positæ, in diuersis existentes planis) secentur planis parallelis EF, GH, IK, in punctis L, M, N, O, P, Q. Dico eas secari proportionaliter, hoc est, segmenta earū inter dicta plana intercepta esse proportionalia, vt quidem LM, ad MN, ita esse OP, ad PQ. Ducantur enim rectæ LO, NQ, in planis EF, IK, & coniungatur recta LQ, occurrens plano GH, in R, puncto, a quo ad puncta M, P, rectæ ducantur RM, RP, in eodem plano GH,



[c] Eritque triangulum LNQ, in vno plano: similiter triangulum LOQ, in vno plano. Quoniam vero plana parallela GH, IK, secantur plano trianguli LNQ, [a] erunt communes sectiones eorum MR, NQ, parallelæ. Pari ratione parallelæ erunt RP, LO. [b] Quam ob rem erit vt LR, ad RQ, ita LM, ad MN; Item vt LR, ad RQ, ita OP, ad PQ; Ac proinde vt LM, ad MN, ita OP, ad PQ. Si igitur duæ rectæ lineæ parallelis planis secentur, &c. Quod erat demonstrandum.

[c] 2. vndec.

[a] 16 vnde.

[b] 2. sexti

SCHOLIVM.

QVOD si datæ duæ rectæ AB, CD, sint in vno eodēque plano, efficient duæ rectæ RM, RP, vnam lineam rectam, vt in superiori figura apparet. Nam tunc planū per rectas AB, CD, ductum secabit tria plana parallela in pūctis L, O, M, P, N, Q, & per rectas LO, MP, NQ, [c] quæ inter se parallelæ erunt, punctumq; R, in recta MP, existet, cum sit & in plano per rectas AB, CD, ducto (propter puncta L, Q, in eodem illo plano existentia, vt in scholio propos. 7. huius lib. diximus) & in plano GH, atque adeo in MP, communi eorum planorum sectione. Quare RM, RP, vnam rectam lineam MP, constituent, nimirum communem sectionē planorum LOQN, GH.

[c] 16. vnde.

SI vero duæ rectæ AB, CD, non sint in eodem plano, non efficient RM, RP, vnam rectam lineam, vt in hisce duabus figuris apparet: quia [d] cum triangulum LOQ, sit in vno plano, & triangulum LNQ, in vno etiam plano, quod ab illo diuersum est, (Si namque duo illa triangula in vno eodemque plano existerent, essent duæ rectæ AB, CD, in eodē illo plano, quod ex ipsis constituitur, quod est cōtra hypothesim.) erunt rectæ RM, RP, in diuersis illis planis triangulorū; ac proinde vnam rectam non constituent: [e] alias in vno essent plano, quod est absurdum.

[d] 2. vndec.

EADEM hæc propositio locum habet, si duæ rectæ AB, CD, in eodem plano existentes, nō sint parallelæ, vt in eisdem hisce duabus figuris apparet: sed tunc MRP, semper erit vna linea recta, vt ad initium huius scholij demonstratū est, quando AB, CD, in vno plano ponebantur. Eadem enim demonstratio hic adhiberi potest.

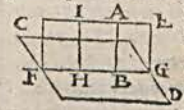
NON

NON secus, si plura plana parallela, quam tria, rectas AB, CD, secent, erunt earum partes proportionales, & communes sectiones mediorum planorum & triangulorũ LOQ LNQ, rectas lineas constituent, si recta AB, CD, in vno sint plano, non rectas autem, si non sint in vno plano: quemadmodum de rectis MR, RP, dictum est.

18. ## THEOR. 16. PROPOS. 18.

SI recta linea plano cuipiã ad rectos sit angulos: Et omnia, quæ per ipsam, plana eidem plano ad rectos angulos erũt.

SIT recta AB, ad planum CD, recta. Dico omnia plana per rectam AB, ducta, esse recta ad idem planum CD. Ductum enim sit per AB, planũ EF, secans planum CD, per rectam lineam FG. Sumpto deinde puncto H, vtcunque in recta FG, [a] ducatur in plano EF, ipsi AB, parallela HI. Quoniam igitur AB, IH, parallelæ sunt, & AB, ponitur recta ad planum CD; [b] erit quoque IH, ad idem planum CD, recta: ac proinde per defin. 3. huius lib. ad communem sectionem FG, perpendicularis. Eadem ratione omnes lineæ, quæ in plano EF, ipsi AB, ducentur parallelę, erunt ad planum CD, rectæ; ac proinde per defin. 3. huius lib. ad communem sectionem FG, perpendiculares. Quare rectum erit planum EF, ad planum CD, per defin. 4. huius libri. Similique argumento ostendentur omnia alia plana per rectam AB, ducta, ad planum CD, esse recta. Si igitur recta linea plano cuipiã ad rectos sit angulos, &c. Quod erat demonstrandum.



[a] 31. primi

[b] 18. vnde.

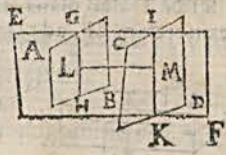
SCHOLIVM.

EX his aliud hoc theorema licebit demonstrare. Videlicet.

DVO

DVO plana ad idem planum recta, in quo faciant communes sectiones parallelas, paralle la sunt: Et duorum planorum parallelorum, si vnũ cuipiam plano ad rectos sit angulos, erit & alterum ad idem rectum.

SINT plana AB, CD, ad planum EF, recta, faciẽtia sectiones GH, IK, parallelas. Dico ea parallela esse. In plano n. EF, ducatur ad GH, perpendicularis LM, quæ ex defin. 4. huius lib. ad planum AB, recta erit: [a] eademque perpendicularis erit ad IK; ac propterea ex defin. 4. huius lib. ad planum quoque CD, recta erit. Quia igitur LM, ad vtrumque planum AB, CD, recta est, [b] ipsa parallela erunt.



[a] 29. primi

[b] 14. vnde.

SED iam parallela sint plana AB, CD; sitque AB, rectum ad planum EF. Dico & CD, rectum esse ad idem planum EF. Sint enim communes sectiones plani EF, & planorum AB, CD, rectæ GH, IK; [c] quæ parallelæ erunt. Ducta quoque in plano EF, ad rectam GH, linea perpendiculari LM; erit hæc, ex defin. 4. huius lib. ad AB, planum recta. Igitur ex scholio propos. 14. huius lib. eadem LM, ad planum CD, recta quoque erit. [d] Quare planum EF, per rectam LM, ductum ad planum CD, erit rectum; ideoque vicissim planum CD, ad planum EF, erit quoque rectum. Quod est propositum.

[c] 16. vnde.

[d] 18. primi

HINC etiam problema hoc absoluetur.

PER rectam in plano quouis datam planum ducere, quod ad ipsum planum sit rectũ.

SIT data recta FG, in plano CD, vt in figura huius propos. oporteatque per FG, planum ducere, quod ad planũ CD, rectum sit. Ex quouis puncto B, recta FG, [e] erigatur ad planum CD, perpendicularis BA, & per rectas AB, FG, planũ ducatur EF, [f] quod ad planum CD, rectum erit. Quod est propositum.

[e] 12. vnde.

[f] 18. vnde.

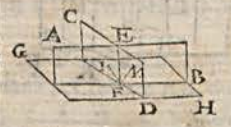
THEOR.

19.

THEOR. 17. PROPOS. 19.

SI duo plana se mutuo secantia, plano cuidam ad rectos sint angulos, communis etiam illorum sectio ad rectos eidem plano angulos erit.

SINT duo plana AB, CD, se mutuo secantia per lineam rectam EF, ad planum GH, recta. Dico communem illorum sectionem EF, rectam quoq; esse ad idem planum GH. Aut enim EF, ad BF, DF, communes sectiones planorum AB, CD, cum plano GH, recta est, aut non. Si recta est EF, ad BF, DF, [a] recta quoque erit ad planum GH, quod per ipsas ducitur. Si vero EF, concedatur recta ad alterā rectarum BF, DF, tantum; sit ea recta ad BF. Quoniam igitur planum AB, ad planum GH, ponitur rectum; erit EF, quæ in plano AB, ad BF, communem eius sectionem cum plano GH, ducitur perpendicularis, ad planum GH, recta, ex 4. defi. huius lib. Idem concludes, si EF, concedatur recta ad DF. Erit enim & tunc EF, ad planum GH, recta ex defin. 4. huius lib. cū perpendicularis ponatur ad DF, communem sectionem plani CD, cum plano GH, ducaturque in plano CD, ad planum GH, recto. Si denique EF, ad neutram BF, DF, esse credatur recta; [b] ducatur ex F, in plano AB, ad BF, communem eius sectionem cum plano GH, perpendicularis FI; Item in plano CD, ad DF, communem eius sectionem cum plano GH, perpendicularis FK. Quoniā igitur planum AB, rectum ponitur ad planum GH, erit quoque perpendicularis IF, quæ in plano AB, ad BF, cō munem eius sectionem cum plano GH, ducitur, recta ad planum GH, ex 4. defin. huius lib. Eadē ratione erit KF, ad idem planum GH, recta; Ac proinde a puncto F, ad planum



[a] 4. vndec.

[b] 11. primi

planum GH, duæ perpendiculares sunt excitatæ. Quod fieri non posse supra [a] demonstratum est. Quare EF, recta erit ad planum GH. Si duo igitur plana se mutuo secantia plano cuidam ad rectos sint angulos, &c. Quod erat demonstrandum.

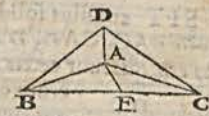
[a] 13. vnde.

THEOR. 18. PROPOS. 20.

20.

SI solidus angulus tribus angulis planis cōtineatur: Ex his duo quilibet vtut assumpti tertio sunt maiores.

CONTINEATVR angulus solidus ad A, tribus angulis planis BAC, CAD, DAB. Dico quoslibet duos reliquo esse maiores. Si enim omnes tres sint æquales, perspicuū est, quosuis duos maiores esse reliquo: Si vero duo tantū sint æquales, & tertius vtrouis minor, constat quoque quoslibet duos reliquo maiores esse. Quod si vnus, uidelicet BAC, sit maximus, reliqui autem siue æquales, siue inæquales, manifestum etiam est, quemlibet horum cum maximo illo BAC, reliquo esse maiorem. Dico iā hoc angulo maximo BAC, maiores quoque esse angulos duos BAD, DAC. In plano enim per AB, AC, ducto [b] fiat angulus BAE, angulo BAD, æqualis; & recta AE, æqualis rectę AD. Deinde in eodem plano per E, extendatur recta BC, secans rectas AB, AC, in B, & C; coniunganturque rectæ BD, DC. Quoniam igitur latera AD, AB, trianguli BAD, æqualia sunt lateribus AE, AB, trianguli BAE; & anguli quoque ipsis contenti, per constructionem, æquales; [c] erunt bases BD, BE, æquales. [d] Quia vero latera DB, DC, maiora sunt latere BC; si demantur æquales rectæ BD, BE, relinquetur recta CD, maior quam CE. Cum igitur latera AD, AC, triāguli DAC, æqualia sint lateribus AE, AC, trianguli EAC; & basis CD, maior basi CE;



[b] 23. primi

[c] 4. primi.
[d] 20. primi

se CE; [a] erit angulus CAD, angulo CAE, maior. Additis ergo æqualibus angulis BAD, BAE, erunt duo anguli CAD, BAD, maiores duobus angulis CAE, BAE, hoc est, toto angulo BAC, qui maximus omnium ponebatur. Ac proinde duo quilibet multo maiores erunt reliquo non maximo. Quocirca si solidus angulus tribus angulis planis contineatur, &c. Quod erat ostendendum.

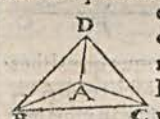
[a] 25. primi

THEOR. 19. PROPOS. 21.

21.

OMNIS solidus angulus sub minoribus, quam quatuor rectis angulis planis continetur.

SIT angulus solidus A, contentus tribus planis angulis BAC, CAD, DAB. Dico hos tres angulos minores esse quatuor rectis. Ductis enim rectis BC, CD, DB, erunt cõstituti tres anguli solidi B, C, D, quorum quilibet sub tribus angulis planis cõtinetur, nempe B, sub CBA, ABD, DBC. At C, sub BCA, ACD, DCB: D, vero sub CDA, ADB, BDC. [b] Quoniam vero duo anguli CBA, ABD, maiores sunt angulo CBD; similiterque duo anguli BCA, ACD, maiores angulo BCD; & duo anguli CDA ADB, maiores angulo CDB: erunt sex anguli CBA, ABD, BCA, ACD, CDA, ADB, tribus angulis CBD, BCD, CDB, maiores. [c] Hi autem tres æquales sunt duobus rectis. Illi ergo sex duobus rectis erunt maiores. Cum igitur sex illi, vna cum tribus ad A, æquales sint sex rectis propter triangula BAC, CAD, DAB, ([d] sunt enim anguli cuiuslibet trianguli duobus rectis æquales.) si auferantur sex illi duobus rectis maiores, relinquentur tres ad A, solidum angulum constituentes, quatuor rectis minores. Omnis ergo solidus angulus, &c. Quod erat demonstrandum.



[b] 20. unde
[c] 32. primi
[d] 32. primi

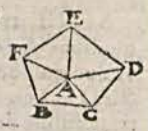
SCHO-

SCHOLIVM.

QVONIAM hæc demonstratio ab interpretibus accommodatur soli illi angulo solido, quem tres plani anguli cõstituunt; idcirco nos eam ad omnes angulos solidos extendemus hoc modo.

SIT angulus solidus quicunque contentus quotcunque angulis planis. Dico omnes illos esse quatuor rectis quoq; minores. Nam si omnibus angulis planis rectæ subtendantur ordine in eodẽ plano existentes; cõstituetur pyramis, cuius vertex datus angulus solidus, tot laterum, angulorumve, sub quot angulis planis solidus angulus comprehenditur; ac proinde totidem triangula pyramidem ambient. Vnde omnes anguli horum triangulorũ, ([a] cum anguli cuiuslibet trianguli duobus sint rectis æquales) bis tot rectis erunt æquales, quot angulos continet basis. Sed omnes anguli basis æquales sunt quoque bis tot rectis, demptis quatuor, per ea, quæ ad 32. propos. 1. lib. demonstrauimus ex Proclo. Igitur omnes anguli dictorum triangulorum superabunt omnes angulos basis, quatuor rectis. Quare cum omnes anguli horum triangulorum prope basin maiores sint angulis basis; (propterea, quod prope basin constituantur anguli solidi, quorum quilibet tribus planis angulis cõtinetur, [b] & horũ quilibet duo reliquo, nempe eo, qui in basi, sint maiores) superabunt omnes anguli horum triangulorum, angulos eorũdem prope basin, minoribus quam quatuor rectis. Cum ergo omnes anguli omnium triangulorum superent illos eorundem, qui prope basin, angulis solidum angulum constituentibus; erunt anguli, qui angulum solidum componunt, quatuor rectis minores. Quod est propositum.

VERVM vt res melius percipiatur, sit gratia exempli angulus solidus A, contentus quinque angulis planis BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, quibus subtendantur ordine rectæ BC, CD, DE, EF, FB,



[a] 32. primi
[b] 20. unde.

itaut

ita vt constituatur pyramis pentagona, habens videlicet basin pentagonam, & in ambitu quinque triangula, tot videlicet, quot anguli plani componunt angulũ solidum A. [a] *Quia vero omnes anguli quinque triangulorum BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, æquales sunt decem rectis: Anguli autem quinque basis BCDEF, æquales sunt sex rectis, nempe minus quatuor, quam decem; superabunt anguli triangulorum angulos basis, quatuor rectis. Cum igitur decem anguli triangulorum prope basin maiores sint angulis basis; (Cum enim angulus solidus B, tribus planis angulis ABC, ABF, CBF, contineatur;* [b] *erunt duo CBA, ABF, qui sunt in triangulis, maiores angulo CBF, qui est in basi: Eademque ratione maiores erunt reliqui anguli triangulorum prope basin, reliquis angulis in basi.) Maiores erunt anguli triangulorum iuxta basin, sex rectis. Reliqui igitur quinque angulum solidum A, constituentes, minores erunt quatuor rectis; quandoquidem hi cum illis æquales sunt decem rectis, vt dictum est. Eadem demonstratio adhibenda est in aliis omnibus angulis solidis.*

[a] 32. primi

[b] 20. vnde.

THEOR. 20. PROPOS. 22.

SI fuerint tres anguli plani, quorum duo ut libet assumpti reliquo sint maiores; comprehendant autem ipsos rectæ lineæ æquales: fieri potest, vt ex lineis æquales illas rectas cõnectentibus triangulum constituatur.

SINT tres anguli plani A, B, C, contenti rectis æqualibus AD, AE, BF, BG, CH, CI, hac tamen lege, vt duo quilibet reliquo sint maiores. Dico ex tribus rectis DE, FG, HI, quæ rectas illas æquales connectunt, triangulum posse constitui; hoc est, trium rectarũ DE, FG, HI, quaslibet duas reliqua esse maiores. Nam hoc posito, [a] ex ipsis triangulum facile conficietur. Quod.n. duę DE, FG, maiores sint, quam HI, ita ostendetur. [b] Fiat angulus DAK, angulo B, æqualis, cadatque primũ AK, ad partes AD, ita vt fiat totus quidam angulus EAK, ex duobus EAD, DAK, compositus; quod quidem continget, quãdo duo anguli DAE, & B, duobus rectis sunt minores. Ponatur AK, ipsi AD, æqualis, connectanturque rectæ KD, KE. Quoniam igitur latera AK, AD, trianguli AKD, æqualia sunt lateribus BF, BG, trianguli BFG; & anguli ipsis contenti DAK, & B, æquales; [c] erunt & bases KD, FG, æquales. Rursus quia latera AK, AE, trianguli AKE, æqualia sunt lateribus CH, CI; & angulus EAK, maior angulo C; propterea qđ duo anguli DAE, & B, maiores ponuntur angulo C; [d] erit & basis EK, maior basi HI: [e] Sunt autem rectæ ED, DK, maiores recta EK. Igitur multo maiores erunt ED, DK, quam HI. Cum ergo DK, ostensa sit æqualis rectæ FG; erunt quoque DE, FG, maiores quam HI. Quod est propositum.

[a] 22. primi

[b] 23. primi

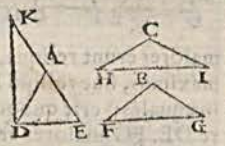
[c] 4. primi.

[d] 24. primi

[e] 20. primi

CADAT deinde AK, in rectum & continuum ipsi AE; quod quidem accidet, quando duo anguli DAE, & B, duobus rectis sunt æquales. Ponaturque AK, ipsi AD, æqualis rursum, & connectatur recta KD. [f] Erit igitur, vt prius, KD, ipsi FG, æqualis. [g] Quoniam vero rectæ ED, DK, maiores sunt recta KE; & KE, æqualis est rectis CH, CI, ex hypothesi, & constructione; erunt quoque ED, DK, maiores duabus CH, CI: [h] Hæ autem maiores sunt, quam HI. Igitur multo maiores erunt ED, DK, quam HI. Cum ergo DK, ostensa sit æqualis ipsi FG; erunt quoque DE, FG, maiores quam HI. Quod est propositum.

[f] 4. primi.

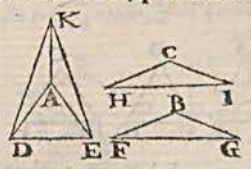


[g] 20. primi

[h] 20. primi

CADAT postremo AK, [i] ad partes AE, ita vt nec

angulus totus componatur ex angulis EAD, DAK, nec recta sit EAK; quod demum eueniet, quando duo anguli DAE, & B, duobus rectis sunt maiores. Ponaturq; rursum AK, ipsi AD, æqualis, & ducantur rectæ K D, K E. [a] Erit igitur, vt prius, KD, ipsi FG, æqualis. [b] Quoniam vero duæ DE, DK, maiores sunt duabus AE, AK; & AE, AK, æquales duabus CH, CI, ex hypothesi & cõstructione; erunt quoque DE, DK, maiores quam CH, CI: [c] Hæ autem maiores sunt, quam HI. Igitur multo erunt maiores DE, DK, quam HI. Cum ergo DK, ostensa sit æqualis ipsi FG; erunt quoque DE, FG, maiores quam HI. quod est propositum. Eodem modo concludemus DE, HI, maiores esse, quam FG, si angulus DAK, angulo C, fiat æqualis; Item FG, HI, maiores, quam DE, si angulo C, ad FG, constituatur angulus æqualis, &c. [d] Quare ex tribus rectis DE, FG, HI, triangulum constitui potest. Si igitur fuerint tres anguli plani, &c. Quod erat demonstrandum.



[a] 4. primi.
[b] 21. primi
[c] 20. primi
[d] 22. primi

ALITER. Si tres anguli A, B, C, sunt æquales; [e] erunt quoque bases DE, FG, HI, æquales; Ac proinde quælibet duæ reliqua maiores. Si vero duo tantum anguli sunt æquales, & tertius minor; [f] erunt quoque duæ illorũ bases æquales, [g] & basis tertij vtraque minor: Quare rursus quælibet duæ maiores erunt reliqua. Quod si vnus eorum, nempe A, sit maximus, siue reliqui B, & C, sint inter se æquales, siue inæquales; [h] erit quoque basis DE, omniũ maxima. Quare DE, FG, maiores erunt quam HI: Item DE, HI, maiores, quã FG. Dico iam & rectas FG, HI, maiores esse recta DE, [i] Fiat enim angulus DAK, æqualis angulo B, ponaturque AK, ipsi AD, æqualis. Cadet ergo punctum K, infra DE; propterea quod per puncta D, K, E, transeat circumferentia circuli ex A, ad interuallum AD, descripta, ob æqualitatẽ rectarum AD, AK, AE. Connectantur

[e] 4. primi.
[f] 4. primi.
[g] 24. primi
[h] 24. primi
[i] 23. primi

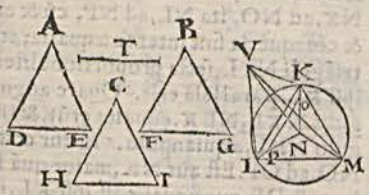
nectantur deinde rectæ D K, K E. Quoniam igitur duo anguli B, & C, maiores ponuntur angulo DAE; & B, æqualis est angulo DAK, per constructionẽ; erit angulus C, maior reliquo angulo K A E. Et quia latera AD, AK, trianguli A D K, æqualia sunt lateribus BF, BG, trianguli BFG; & anguli ipsis contenti DAK, & B, æquales; [a] erit basis DK, basi FG, æqualis. Rursus quia latera CH, CI, trianguli CHI, æqualia sunt lateribus AK, AE, trianguli AKE; & angulus C, ostensus maior angulo KAE; [b] erit & basis HI, maior base KE. Quare cum DK, ostensa sit æqualis ipsi FG: erunt FG, HI, maiores quam DK, KE: [c] Sed DK, KE maiores sunt, quam DE. Igitur multo maiores erunt FG, HI, quam DE, Quod est propositum.

[a] 4. primi.
[b] 24. primi
[c] 20. primi

PROBL. 3. PROPOS. 23. 23.

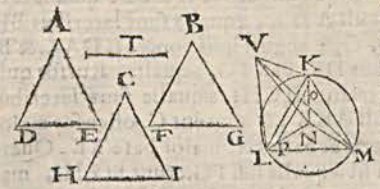
EX tribus angulis planis, quorũ duo quomodocunque assumpti reliquo sunt maiores, solidum angulum constituere. Oportet autem illos tres angulos quatuor rectis minores esse.

SINT tres anguli A, B, C, quatuor rectis minores, hac cõditione, vt qlibet duo sint maiores reliquo. Oportet ex tribus angulis A, B, C, angulũ solidũ cõficere, qui nimirũ contineat tribus angulis planis, quibus tribus angulis sint æquales. Ponãtur sex lineæ angulos dictos cõprehendẽtes, nempe AD, AE, BF, BG, CH, CI, æquales; subtendãturq; bases DE, FG, HI. [d] Fieri ergo pot, vt ex DE, FG, HI, triangulũ cõ



[d] 22. vnde.

ſtituatur. Conſtituatur ex ipſis igitur triãgulum KLM, ſitque latus KL, rectæ DE; latus LM, rectę FG; & latus KM, rectæ HI, æquale. [a] Deſcribatur circa triangulum KLM, circulus, cuius centrũ N, a quo ducantur rectæ NK, NL, NM. Eritq; quælibet rectarũ angulos planos cõprehendẽtium, nẽpe AD, AE, &c. maior qualibet ductarũ ex centro N. Quod ita oſtenditur. Cadat primo centrũ N, intra triangulum KLM; quod quidem fiet, quãdo triangulũ eſt oxygonium, vt ex coroll. propoſ. 5. lib. 4. cõſtat. Si igitur AD, AE, maiores nõ credãtur, quã NK, NL, erũt vel ęquales, vel minores. Sint ergo æquales. Qm igitur latera AD, AE, trianguli ADE, æqualia ſunt lateribus NK, NL, triãguli NKL, & baſis DE, baſi KL, ęqualis: [b] erit angulus A, angulo KNL, æqualis. Eodẽ argumẽto erit angulus B, angulo LNM; & angulus C, angulo MNK, æqualis. Cũ igitur tres anguli circa N, æquales ſint quatuor rectis ex coroll. propoſ. 15. lib. 1. erunt quoq; tres anguli A, B, C, quatuor rectis æquales. Quod eſt abſurdum. ponuntur. n. quatuor rectis minores. Non igitur æquales ſunt AD, AE, ipſis NK, NL. Dico quod neque minores. Si. n. minores ſint AD, AE, quã NK, NL, abſcindãtur NO, NP, ipſis AD, AE, æquales, ducaturq; recta OP. Quoniã igitur eſt vt NK, ad NO, ita NL, ad NP, cũ & antecedẽtia inter ſe, & cõſequẽtia ſint inter ſe æqualia; erũt latera NK, NL, triãguli NKL, ſecta proportionaliter; [c] ac proinde OP, ipſi KL, parallela erit. [d] Quare anguli NOP, NPO, angulis NKL, NLK, ęquales erũt, & triangulũ NOP, triangulo NKL, æquiangulũ. [e] Igitur erit vt NK, ad KL, ita NO, ad OP. Eſt aũt NK, maior quã NO. [f] Igitur & KL, hoc eſt, DE, quę ęqualis eſt ipſi KL, maior erit, quã OP. Quocirca cũ latera AD, AE, triãguli ADE, ſint ęqualia lateribus NO, NP, triãguli NOP, & baſis DE, maior baſi OP;



a 5. quarti.

b 8. primi.

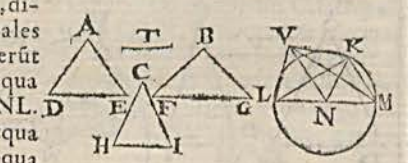
c 2. ſexti.
d 29. primi

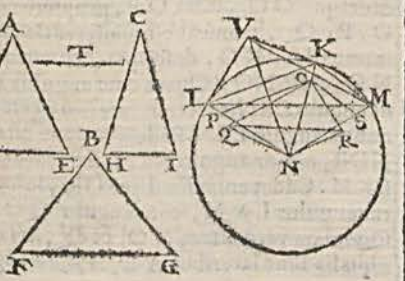
e 4. ſexti.
f 14. quinti

ſe OP; [a] erit & angulus A, maior angulo ONP. Eadẽ ratione angulus B, angulo LNM; & angulus C, angulo MNK, maior eſſe oſtẽdetur. Cũ igitur tres anguli ad N, quatuor ſint rectis ęquales, ex coroll. propoſ. 15. lib. 1. erũt tres anguli A, B, C, maiores quatuor rectis. Qd eſt abſurdũ. ponũtur. n. quatuor rectis minores. Nõ igit minores ſũt AD, AE, q̃ NK, NL; ſed neq; ęquales. Igit maiores.

CADAT deinde centrũ N, in latus LM; quod tũ cõtinget, quãdo triangulũ KLM, angulũ LKM, habuerit rectũ, vt ex eodẽ coroll. propoſ. 5. lib. 4. manifeſtũ eſt. Si igitur AD, AE, dicãtur eſſe æquales ipſis NK, NL; erũt quoq; BF, BG, æquales eiſdẽ NK, NL. Cũ ergo NK, æqualis ſit ipſi NM; ęquales erũt BF, BG, rectæ LM: Poſita autẽ fuit LM, æqualis ipſi FG. Igitur BF, BG, æquales quoque ſunt rectæ FG. [b] Sunt autẽ & maiores BF, BG, quã FG. Quod eſt abſurdum. Non igitur æquales ſunt AD, AE, ipſis NK, NL. Quod ſi AD, AE, minores credãtur, quam NK, NL; erũt quoque BF, BG, minores quam NK, NL. Cũ ergo NK, æqualis ſit ipſi NM; minores erunt BF, BG, quam recta LM: poſita autem fuit LM, ipſi FG, æqualis. Igitur BF, BG, minores quoque ſunt recta FG. Quod eſt abſurdũ, [c] cum ſint maiores. Non ergo minores ſunt AD, AE, quam NK, NL; ſed neque æquales: Igitur maiores.

CADAT poſtremo centrũ N, extra triãgulũ KLM, infra latus LM, qd demũ accidet, quãdo angulus LKM, fuerit





a 25. primi

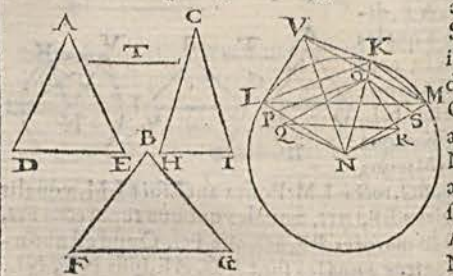
b 20. primi

c 20. primi

obtusus, vt ex coroll. dicto propos. 5. lib. 4. liquet. Si igitur dicãtur AD, AE, esse æquales ipsis NK, NL; cum & basis DE, basi KL, ponatur æqualis; [a] erit angulus A, angulo KNL, æqualis. Eadem ratione angulus C, angulo KNM, æqualis erit. Quare totus angulus LMN, angulis A, & C, æqualis erit. Sed hi duo maiores sunt ex hypothesi, angulo B. Igitur & angulus LNM, angulo B, erit maior. Rursus quia latera N L, N M, trianguli NLM, æqualia sunt lateribus BF, B G, trianguli BFG, & basis LM, basi FG, æqualis; [b] erit angulus LNM, angulo B, æqualis: Sed & maiorẽ ostẽdimus esse. Quod est absurdũ. Nõ igitur æquales sunt AD, AE, ipsis NK, NL.

[a] 8. primi.

[b] 8. primi.



Quod si AD, AE, credant ur esse minores, quã NK, NL; si abscindantur NO, NP, ipsis AD, AE, æquales, & ducatur recta OP; demonstrabitur, vt in primo casu, angulus A, maior angulo ONP; & eadem ratione angulus C, maior angulo KNM. [c] Fiat angulus ONQ, angulo A; & angulus ONR, angulo C, æqualis, ponanturq; NQ, NR, æquales ipsis AD, AE, & connectantur OQ, OR; cadetque OQ, infra OP, propterea quod per puncta O, P, Q, transeat circumferentia circuli ex N, ad interuallum NO, descripta, cum æquales sint rectæ NO, NP, NQ. [d] Quare cum angulus PON, æqualis sit angulo LKN, externus interno; erit angulus QON, minor angulo LKN. Eadem ratione ostendetur angulus NOR, minor angulo NKM, si ducatur OS, parallela ipsi KM. Cadet enim similiter OR, infra OS. Igitur totus angulus LKM, toto angulo QOR, maior erit. Quoniam vero latera NO, NQ, trianguli NOQ, æqualia sunt lateribus AD, AE, trianguli ADE; Est autem

[c] 23. primi

[d] 29. primi

autem & angulus ONQ, angulo A, æqualis, per constructionem; [a] erit OQ, ipsi DE, hoc est, ipsi KL, æqualis. Eodem modo erit OR, ipsi KM, æqualis. Connexa iam recta QR, cum latera KL, KM, trianguli LKM, æqualia sint lateribus OQ, OR, trianguli OQR; & angulus LKM, maior angulo QOR, vt ostendimus; [b] erit basis LM, hoc est, FG, maior basi QR. Quoniam igitur latera BF, BG, trianguli BFG, æqualia sũt lateribus NQ, NR, trianguli NQR; & basis FG, maior basi QR; [c] erit angulus B, maior angulo QNR. Rursus quia angulus ONQ, angulo A; & angulus ONR, angulo C, factus est æqualis, erit angulus totus QNR, duobus A, & C, æqualis; Sed A, & C, maiores ponuntur angulo B. Igitur & angulus QNR, maior erit angulo B. Quod est absurdum, cum B, ostensus sit maior angulo QNR. Non ergo minores sunt AD, AE, quam NK, NL; sed neque æquales: Igitur maiores.

[a] 4. primi.

[b] 24. primi

[c] 25. primi

IAM vero, cum rectæ AD, AE, maiores sint rectis NK, NL, vbicunque centrum N, existat; posit recta AD, plus quam recta NK, quadrato lineæ T, per lemma propos. 14. lib. 10. ita vt quadratum rectæ AD, æquale sit quadratis rectarum NK, & T. [d] Ex centro N, excitetur ad planum circuli KLM, perpendicularis NV, rectę T, æqualis; connectanturq; rectę KV, LV, MV. Quoniam igitur NV, recta est ad planum circuli KLM, recta quoque eadem erit, ex defin. 3. huius lib. ad rectas NK, NL, NM; [e] ac proinde quadratum rectę VK, quadratis rectarum KN, NV, æquale erit. Cum ergo & quadratum rectę AD, æquale sit ex constructione, eisdem quadratis rectarum KN, NV; æqualia erunt inter se quadrata rectarum VK, & AD. Ac propterea æquales erunt rectæ VK, AD. Rursus quia latera VN, NK, trianguli VNK, æqualia sunt lateribus VN, NL, trianguli VNL; & anguli ipsis contenti VNK, VNL, recti; [f] erit basis VK, æqualis basi VL; Atque eadem ratione rectę VM. Quare tres rectę VK, VL, VM, æquales sunt inter se: Ostensa est autem recta VK, æqualis rectę AD. Tres ergo rectę VK, VL, VM, æquales sunt rectæ AD, & ob id, rectis AE, BF, BG, CH, CI. Quamobrem,

[d] 12. unde.

[e] 47. primi

[f] 4. primi.

rem, cum latera VK, VL, triāguli VKL, æqualia sint lateribus BD, AE, trianguli ADE; & basis KL, basi DE; [a] erit angulus KVL, angulo A, æqualis. Non secus demōstrabimus, angulum LVM, angulo B; & angulū KVM, angulo C, esse æqualem. Quare angulus solidus V, continetur tribus angulis planis KVL, LVM, MVK, qui æquales sunt datis tribus angulis planis A, B, C. Ex tribus itaq; angulis planis, &c. Quod erat faciendum.

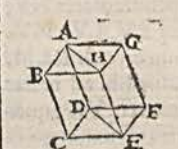
[a] 8. primi.

THEOR. 21. PROPOS. 24.

24.

SI solidum parallelis planis contineatur; aduersa illius plana, parallelogramma sunt, similia, & æqualia.

SIT parallelepipedum ABEF, (de hoc enim intelligenda est propositio) contentum, iuxta defin. 30. huius lib. sex figuris quadrilateris AC, CF, FH, HA, AF, BE, quarum aduersæ quælibet sint parallelæ. Dico quæuis opposita plana esse parallelogramma, similia, & æqualia. Cū enim parallela plana BG, CF, [b] secentur plano AC; [b] Erunt communes sectiones AB, CD, parallelæ. Similiter cum plana parallela AF, BE, secentur plano AC; erunt communes sectiones AD, BC, parallelæ; Ac proinde parallelogrammum est figura quadrilatera ABCD. Non aliter ostendemus, reliquas figuras quadrilateras esse parallelogramma. Dico iam opposita parallelogramma esse similia, & æqualia. Cum enim rectæ AB, BH, parallelæ sint rectis DC, CE, & nō in eodem plano, sed in oppositis; [c] erunt anguli ABH, DCE, æquales; eodemque argumento reliqui anguli parallelogrammi BG, æquales erunt reliquis angulis parallelogrammi CF. [d] Quoniam vero AB, ipsi ipsi DC, in parallelogrammo AC; & BH, ipsi CE, in parallelogramo BE, æqualis est; erit vt AB, ad BH, ita DC, ad CE; Ac proterea



[b] 16. vnde.

[c] 10. vnde.

[d] 34. primi

proterea vt BH, ad HG; ita CE, ad EF, &c. eadem de causa: Erunt latera parallelogrammorum BG, CF, circa angulos æquales, proportionalia; ac proinde parallelogramma ipsa similia. Ductis iam diametris AH, DE, [a] cum latera AB, BH, trianguli ABH, æqualia sint lateribus DC, CE, trianguli DCE; [b] & angulus ABH, angulo DCE, æqualis, vt ostensum est; [c] erunt triangula ABH, DCE, æqualia inter se. [d] Quare cum triangula ABH, DCE, dimidia sint parallelogrammorū BG, CF; erūt parallelogrāma BG, CF, inter se æqualia. Similiter demonstrabimus similia & æqualia esse parallelogrāma opposita AC, GE; & AF, BE. Si solidum ergo parallelis planis contineatur, aduersa illius plana, parallelogrāma sunt, similia, & æqualia. Quod erat demonstrandum.

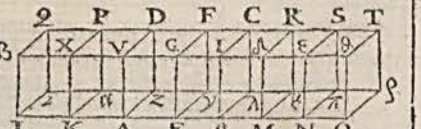
[a] 34. primi
[b] 10. vnde.
[c] 4. primi.
[d] 34. primi

THEOR. 22. PROPOS. 25.

25.

SI solidum parallelepi pedum plano secetur aduersis planis parallelo: Erit quemad modum basis ad basim, ita solidum ad solidum.

SECETVR parallelepipedum ABCD, plano EF, parallelo oppositis planis AD, BC. Dico vt est basis AG, ad basin BG, ita esse solidum AEFD, ad solidum BEFC. Intelligatur enim parallelepipedum AB-CD, productū in vtram que partem quantumlibet, sumanturque in AB, protracta quotcunque rectæ AK, KL, ipsi AE; & quotcunque rectæ BM, MN, NO, ipsi EB, æquales. Deinde per puncta K, L, M, N, O, ducantur plana KP, LQ, MR, NS, OT, parallela



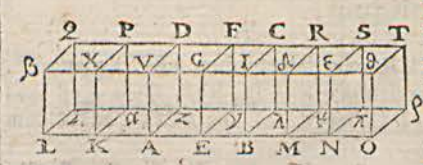
lela planis AD, EF, BC, per ſcholiũ ppoſ. 15. huius lib. Quoniã igitur ſolidum AEFD, cõtinetur planis parallelis ex hypotheſi; ipſum parallelepipedũ erit, ex definitione,[a] habebitq; plana oppoſita, parallelogrãma ſimilia, & æqualia. Eodẽ mõ erũt parallelepipeda AKPD, KLQP; EBCF, BMRC, MNSR, NOTS; ELQF, EOTF; habebuntq; plana oppoſita, parallelogrãma ſimilia, & æqualia.[b] Quoniam vero parallelogrãma AG, KV, LX, cũ ſint ſuper æquales baſes AE, AK, KL, æqualia ſunt; & ſimilia quoq;,[c] cũ anguli vnius ſint æquales angulis aliorum, & latera circa angulos vnius æqualia lateribus circa angulos aliorum, ideoq; proportionalia. Eademque ratione æqualia, & ſimilia ſunt parallelogrãma AY, KZ, La. Cũ igitur æqualia quoq; ſint, & ſimilia parallelogrãma AD, KP, LQ: Erunt tria plana AG, AY, AD, ſolidi AEFD, æqualia, & ſimilia tribus planis KV, KZ, KP, ſolidi AKPD; & tribus planis LX, La, LQ, ſolidi KLQP:[d] Sũt autẽ tria in vnoquoq; ſolido æqualia, & ſimilia tribus reliquis oppoſitis in eodẽ, nẽpe AG, ipſi VF; & AY, ipſi VS; & AD, ipſi EF, &c. Igitur per defin. 10. huius lib. æqualia ſunt ſolida AEFD, AKPD, KLQP. Eodem argumento æqualia oſtendentur ſolida EBCF, BMRC, MNSR, NOTS.

a 24. vnde.

b 36. primi

c 29. primi

d 24. vnde.



Quare quam multiplex eſt baſis LG, baſis AG, tam multiplex erit ſolidum LEFQ, ſolidi AEFD; Et quam multiplex eſt baſis OG, baſis BG, tam multiplex erit ſolidum OEFT, ſolidi BEFC. Quoniam vero ſi baſis LG, (multiplex baſis AG, primæ magnitudinis,) æqualis eſt baſi OG, (multiplici baſis BC, ſecundæ magnitudinis,) æquale quoque eſt ſolidum LEFQ, (multiplex ſolidi AEFD, tertiæ magnitudinis) ſolido OEFT, (multiplici ſolidi BEFC, quartæ magnitudinis,) propterea quod baſibus LG, OG, æqualibus exiſtẽtibus, æqualia quoque ſunt & ſimilia ſex parallelogrãma ſolidi LEFQ, ſex parallelogrammis ſolidi OEFT: Si

Si autem baſis maior eſt baſe, ſolidũ quoq; ſolido maius eſt; & ſi minor, minus; in quacũq; hoc fiat multiplicatione: Erit per defin. 6. lib. 5. vt baſis AG, prima magnitudo, ad baſin BG, ſecundam magnitudinẽ, ita ſolidũ AEFD, tertia magnitudo, ad ſolidũ BEFC, quartam magnitudinem. Eadẽ ratione demonſtrabitur eſſe ſolidũ ad ſolidũ, vt eſt baſis DY, ad baſin CY; & vt baſis AY, ad baſin BY; & vt baſis DG, ad baſin CG. Si ſolidũ igitur parallelepipedum plano ſecetur, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

HAEC propoſitio accommodari etiã poteſt omni priſmati. Nam ſi priſma quodcunq;ae plano ſecetur aduerſis planis parallelos erit quemadmodum baſis ad baſim, ita ſolidum ad ſolidum. Sit enim primo priſma ABCDEF, cuius plana aduerſa ſint triangula ABC, DEF; ſecteturq; plano GHI, aduerſis planis parallelo. Dico vt eſt baſis AI, ad baſin FI, ita eſſe ſolidum ABCIHG, ad ſolidum FEDIHG. Intelligatur.n. priſma ABCDEF, in vtramq; partem quantumlibet productũ,

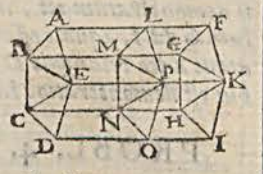
& ex AF, protracta vtrinque capiãtur quotcũque rectæ AK, KL, ipſi AG; & quotcũq; rectæ FM, MN, NO, ipſi FG, æquales. Deinde per punctã K, L, M, N, O, ducantur plana KPQ, LRS; MTV, NXY, OZα, parallela planis ABC, GHI, FED, per ſcholium propoſ. 15. huius lib. Quoniam igitur plana parallela ABC, GHI, ſecantur plano AI; [a] *erunt communes ſectiones AC, GI, parallelæ: Sunt autem & AG, CI, parallelæ ex hypotheſi, ob parallelogrammum AD. Igitur parallelogrammum eſt AI. Rurſus quia plana parallela ABC, GHI, ſecantur plano AH;* [b] *erunt communes ſectiones AB, GH, parallelæ: Sunt autem & AG, BH, parallelæ, ob parallelogrammum AE. Igitur parallelogrammum eſt AH. Eodem modo parallelogrammũ oſtẽdetur CH. Quoniam vero latera AC, AB, trianguli ABC, æqualia ſunt lateribus*

a 16. vnde.

b 16. vnde.

teribus GI, GH, trianguli GHI; [a] cum AC, ipsi GI, & AB, ipsi GH, sit æquale; [b] & anguli CAB, IGH, sunt quoque æquales, eo quod rectæ CA, AB, parallelæ sũt rectis IG, GH, & non in eodẽ plano: [c] Erunt triãgula ABC, GHI, æqualia inter se, & æquiangula. [d] Quare latera circum æquales angulos proportionalia habebunt; Atque idcirco similia erunt. Igitur solidum ABCIHG, contentum duobus planis oppositis ABC, GHI, æqualibus & similibus, atque parallelogrammis AI, IB, BG, prisma est. Eadẽ arte prismata erunt ABCQPK, KPQSRL; FEDIHG, FEDVTM, MTVYXN, NXYæZO, LRSIHG, OZæIHG. Quoniã vero parallelogramma AI, KC, LQ, æqualia sunt & similia; necnon AH, KB, LP; & CH, QB, SP; erunt omnia plana prismatis ABCIHG, æqualia & similia omnibus planis prismatum ABCQPK, KPQSRL. Quare, per defin. 10. huius lib. æqualia erunt prismata ABCIHG, ABCQPK, KPQSRL. Eadem ratione æqualia erunt prismata FEDIHG, FEDVTM, MTVYXN, NXYæZO. Quare quam multiplex est basis LI, basis AI, tam multiplex erit prisma LRSIHG, prismatis ABCIHG; & quam multiplex est basis OI, basis FI, tam multiplex erit prisma PZæIHG, prismatis FEDIHG. Quia vero si basis LI, (multiplex basis AI, primæ magnitudinis) æqualis est basi OI, (multiplici basis FI, secundæ magnitudinis;) æquale quoque est prisma LRSIHG, (multiplex prismatis ABCIHG, tertiæ magnitudinis,) prismati OZæIHG, (multiplici prismatis FEDIHG, quartæ magnitudinis;) propterea quod basibus LI, OI, existentibus æqualibus, æqualia quoque sunt & similia omnia plana prismatis LRSIHG, omnibus planis prismatis OZæIHG: Si autem basis LI, maior est base OI, prisma quoque prismate maius est; & si minor, minus, in quacunque multiplicatione hoc fiat: Erit, per defin. 6. lib. 5. vt basis AI, prima magnitudo ad basin FI, secundam magnitudinẽ, ita prisma ABCIHG, tertia magnitudo ad prisma FEDIHG, quartam magnitudinem. Eodem modo ostendetur esse prisma ad prisma, vt est basis AH, ad basin FH: & vt basis CH, ad basin DH. Quod est propositum.

SIT deinde prisma ABCDEFGHIK, cuius opposita plana sint polygona, nempe pentagona, seceturque plano LMNOP. Dico rursus vt est basis CM, ad basin NG, ita esse solidum ABCDELMNOP, ad solidum LMNOPFGHIK. Si enim plana opposita parallela resoluantur in triangula, erit quoq; prisma in totidem prismata, quorum plana opposita sunt triãgula, resolutum. Quare erit vt basis BP, ad basin MK, ita prisma ABEPML, ad prisma LMPKGF, per ea, quæ demonstrata sunt. Eodem modo erit vt basis CP, ad basin NK, ita prisma BCEPMN, ad prisma MNPKGH; & prisma CDEPNO, ad prisma NOPKHI. [a] Vt autem BP, ad MK, & CP, ad NK, ita est recta EP, ad rectam PK, hoc est, vt CN, ad NH; & vt CN, ad NH, ita est CM, ad NG. Igitur prismata ABEPML, BCEPMN, CDEPNO, ad prismata LMPKGF, MNPKGH, NOPKHI, eandem habent proportionem ei, quam habet CM, ad NG; ac proinde eandẽ inter se. [b] Vt autem vnũ ad vnũ, ita se habent omnia ad omnia. Igitur erit vt prisma BCEPMN, ad prisma MNPKGH, hoc est, vt basis CM, ad basin NG; ita prisma ABCDELMNOP, ex tribus compositum ad prisma LMNOPFGHIK, ex tribus constatum. Quod est propositum. Eadem prorsus erit demonstratio in quocunque alto prismate.



POTEST tamen hoc idem in omni prismate ostẽdi demonstratione, qua vsi sumus in prismate habente plana opposita, triangula similia. Si enim eadem fiat constructio, productio prismate in vtramque partem, erunt omnia plana parallela secantia, inter se æqualia, & similia; [c] propterea quod latera eorum sunt parallela, nempe communes sectiones parallelorum planorũ; [d] ac proinde angulos æquales cõprehendũt, &c. Vnde, vt prius, ostendentur prismata ex vna parte inter se æqualia, necnon & prismata ex altera parte, &c.

COROL-

[a] 1. sexti.
[b] 12. quin.
[c] 16. unde.
[d] 10. unde.

[a] 34. primi
[b] 10. unde.
[c] 4. primi.
[d] 4. sexti

COROLLARIVM.

EX his infertur, si prisma quodeunque secetur plano oppositis planis æquidistante, sectionem esse figuram æqualem & similem plani: oppositis: Veluti demonstratum est, in priori prismate, triangulum G H I, æquale esse & simile triangulo A B C, atque adeo triangulo D E F. Eadem enim in omnibus est demonstratio. Idem dices de parallelepipedo.

26. PROBL. 4. PROPOS. 26.

AD datam rectam lineam, eiusque punctum angulum solidum constituere solido angulo dato æqualem.

SIT ad punctum A, in data recta AB, constituendus angulus solidus æqualis angulo solido C, contento tribus angulis planis DCE, DCF, FCE, non in eodem plano existentibus. [a] Ducatur ex F, ad planũ per CD, CE, ductum perpedicularis F G; connectanturq; rectæ D F, DG, EF, EG, CG. Deinde abscindatur AH, æqualis ipsi C D, [b] fiatque angulus HAI, angulo DCE, æqualis; & recta AI, rectæ CE, æqualis. Rursus in plano per AH, AI, ductũ cõstituatur angulus HAL, æqualis angulo DCG, qui in plano p CD, CE, ducto existit; & recta AL, rectæ CG, æqualis. [c] Ex L, vero ad planũ, in quo sũt tres AH, AL, AI, erigatur perpendicularis L A, quæ ipsi F G, æqualis ponatur, & coniungatur recta K A. Dico angulũ solidũ A, contentum tribus planis angulis HAI, HAK, KAI, æqualem esse dato angulo solido C. Connexis. n. rectis HK, HL, IK, IL; cũ latera AH, AL, triãguli AHL, AHL, æqualia sint lateribus CD, CG, triãguli CDG, & anguli HAL, DCG, æquales, per constructionem; [a] Erũt bases HL, DG, æquales. Rursus quia ablatis angulis æqualibus HAL, DCG, ab æqualibus HAI, DCE, reliqui æquales sunt LAI, GCE: Cum igitur & latera AL, AI, trianguli ALI, æqualia sint lateribus CG, CE, trianguli CGE, per constructionem; [b] æquales quoque erunt LI, GE. Quia igitur latera LH, LK, æqualia sunt lateribus GD, GF; & anguli HLK, DGF, recti, ex defin. 3. huius lib. [c] erũt & bases HK, DF, æquales. Quare cũ & latera AH, AK, triãguli AHK, sint æqualia lateribus CD, CF, triãguli CDF, ex cõstructione. (cũ n. AL, LK, latera lateribus CG, GF, æqualia sint ex constructione, comprehendantque angulos æquales, nimirum rectos ex defin. 3. huius lib. [d] erunt bases AK, CF, æquales.) [e] Erunt quoque anguli HAK, DCF, æquales. Denique quia latera LI, LK, sunt æqualia lateribus GE, GF; & anguli ILK, EGF, recti, ex defin. 3. huius lib. [f] Erunt bases IK, EF, æquales: Cũ igitur & latera AI, AK, triãguli AIK, lateribus CE, CF, trianguli CEF, sint æqualia ex constructione; [g] Erunt quoque anguli IAK, ECF, æquales. Sunt ergo tres anguli plani HAI, HAK, KAI, solidũ angulum A, componẽtes, æquales tribus angulis planis DCE, DCF, FCE, angulum solidum C, componentibus; Atq; proinde solidus angulus A, solido angulo C, æqualis. Ad datam itaque rectam lineam, eiusque punctum, angulum solidum constituimus solido angulo dato æqualem. Quod erat faciendum.

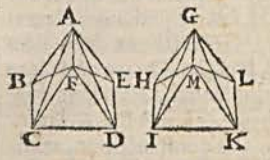
[a] 11. unde.
[b] 23. primi
[c] 12. unde.
[a] 4. primi.
[b] 4. primi.
[c] 4. primi.
[d] 4. primi.
[e] 8. primi.
[f] 4. primi.
[g] 4. primi.

SCHOLIVM.

QVOD si angulus solidus datus contineatur pluribus angulis planis, quam tribus, subtendendæ erunt omnibus angulis planis rectæ in vno eodemq; existentes plano (in eo scilicet, quod omnes rectas lineas planorum angulorum secet) ita vt figuram planam polygonam constituant, pyramisq; quædam multilatera efficiatur. Si enim figura polygona in triangula resoluatur, habebuntur tot pyramides trilateræ, quot triangula

triangula in figura polygona continentur. Si igitur angulis solidis omnium pyramidum triangularium æquales solidi anguli constituantur quorum quilibet tribus angulis planis cõtinetur; constitutus erit totus angulus solidus toti angulo solido æqualis.

VT si angulo solido A, contento quinque angulis planis BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, constituendus sit solidus angulus æqualis, subtendendæ sint angulis planis rectæ BC, CD, DE, EF, FB, vt fiat pẽtagonum BCDEF, quod in tria triãgula resoluatur BCF, FCD DEF. Deinde solido angulo A, contento tribus planis angulis BAC, CAF, FAB, constituendus solidus angulus æqualis G, cõtentus tribus angulis planis HGI, IGM, MGH Et solido angulo A, contento tribus planis angulis CAF, FAD, DAC, æqualis solidus angulus G, cõtentus tribus angulis planis IGM, MGK, KGI. Et denique angulo solido A, contento tribus angulis planis DAE, EAF, FAD, æqualis solidus angulus G, cõtẽtus tribus planis angulis KGL, LGM, MGK. Ita enim fiet totus angulus solidus G, toti angulo solido A, æqualis. Atque in hunc modum cuilibet angulo solido æqualis angulus solidus constituetur.



27. PROBL. 5. PROPOS. 27.

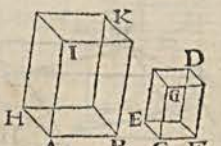
A DATA recta linea, dato solido parallelepipedo simile & similiter positum solidum parallelepipedum describere.

SIT a data recta AB, describendum parallelepipedum simile, similiterque positum parallelepipedo CD. [a] Fiat ad rectam AB, eiusque punctum A, angulus solidus æqualis angulo solido C, ita vt tres anguli plani HAI, IAB, BAH, æquales sint tribus angulis planis ECG, GCF, FCE. Deinde vt est CF, ad CG, [a] sic fiat AB, ad AI, & vt CG, ad CE, ita AI, ad AH; eritque ex æquo, vt CF, ad CE, ita AB, ad AH.

[a] 26. vnde.

[a] 12. sexti.

Post hæc, perficiatur parallelepipedum AK, completis nimirum parallelogrammis BH, HI, IB, & per I, B, H, ductis planis IK, BK, HK, quæ parallela sint parallelogrãmis BH, HI, IB. Dico parallelepipedum AK, parallelepipedo CD, simile esse similiterq; positum. Cum enim anguli BAH, FCE, sint æquales, & latera circa ipsos proportionalia, nempe vt BA, ad AH, ita FC, ad CE, ex constructione; erunt parallelogramma HB, EF, similia, similiterq; posita. Eadem ratione similia erunt, similiterq; posita parallelogramma HI, EG; & IB, GF. Tria igitur plana BH, HI, IB, solidi AK, similia sunt, similiterq; posita tribus planis FE, EG, GF, solidi CD. [b] Sunt autem tria cuiuslibet æqualia & similia tribus reliquis oppositis. Quare sex plana solidi AK, similia sunt, similiterq; posita sex planis solidi CD; Ac proinde ex defin. 9. huius lib. similia sunt, similiterq; posita, solida AK, CD. A data ergo recta linea, dato solido parallelepipedo simile, & similiter positum solidum parallelepipedum descripsimus. Quod erat faciendum.



[b] 24. vnde.

THEOR. 23. PROPOS. 28.

28.

SI solidum parallelepipedum plano secetur per diagonios aduersorum planorum: Bifariam secabitur solidum ab ipso plano.

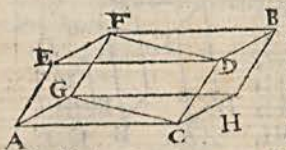
SIT parallelepipedum AB, in quo plana opposita sint AH, EB, quorum diagonij, seu diametri, sint rectæ lineæ CG, DF. Quoniam igitur vtraque CD, GF, parallela est, [c] & æqualis ipsi AE, cum sint parallelogramma

[c] 34. primi

[a] 9. vndec. [b] 33. primi

CE, GE; [a] erunt & inter se parallelæ, & æquales CD, GF. [b] Ac proinde, quæ ipsas coniungunt CG, DF, parallelæ erũt, & æquales, ideoque in vno plano. Dico planum, quod per CG, DF, ducitur, secare bifariam parallelepipedum AB. [c] Cum enim plana AH, EB, sint parallelogramma æqualia, & similia; erunt & eorum dimidia, nimirum triangula AGC, GCH; EFD, FDB, æqualia inter se: Sunt autem & latera circa angulos æquales GAC, CHG; FED, DBF, proportionalia. [d] Igitur similia quoque erunt dicta triangula. [e] Cum igitur & parallelogrammum AF, æquale sit & simile parallelogrammo CB; & AD, ipsi GB; & CF, commune: Erunt duo triangula AGC, EFD, & parallelogramma AF, AD, CF, prismatis ACGFED, æqualia & similia duobus triangulis HCG, BDF, & parallelogrammis CB, BG, CF, prismatis HGCDBF; proptereaque prismata æqualia erunt, ex defin. 10. huius lib. Quæ cum componant parallelepipedum AB, sectum erit parallelepipedum AB, bifariam. Itaque si solidum parallelepipedum plano secetur, &c. Quod erat demonstrandum.

[c] 24. vnde.

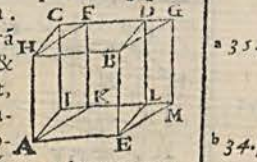


[d] 6. sexti. [e] 24. vnde.

29. THEOR. 24. PROPOS. 29.

SOLIDA parallelepipeda super eãdem basin constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ in ijsdem collocantur rectis lineis: sunt inter se æqualia.

SVPER basin AB, in eadem altitudine, hoc est, inter eadem plana parallela, sint constituta duo parallelepipeda ACDE, AFGE, quorum insistentes lineæ ex quatuor angulis basis exeuntes in ijsdem collocentur lineis, nempe AI, AK, EL, EM, in recta IM; & HC, HF, BD, BG, in recta CG. Dico parallelepipeda ACDE, AFGE, esse inter se æqualia.



[a] 35. primi

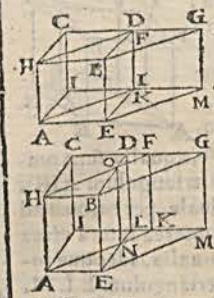
[a] Cum enim æqualia sint parallelogrãma AL, AM, super eadem basi AE, & in eisdem parallelis constituta; erunt, ablato cõmuni trapezio AELK, æqualia quoq; triangula AIK, ELM. [b] Quoniam vero omnia latera triãguli AIK, æqualia sunt omnibus lateribus trianguli HCF; erit triangulum AIK, triangulo HCF, æquiangulum, & æquale, per ea, quæ ad 8. propos. lib. 1. ostendimus; [c] Ac propterea latera circa æquales angulos habebunt proportionalia, ideoque inter se erunt similia. Eadem ratione triangulum ELM, triangulo BDG, æquale erit & simile. [d] Rursus parallelogrammum AC, æquale est, & simile parallelogrammo ED; & eadem ratione parallelogrammum AF, parallelogrammo EG; [e] Sed & IF, ipsi LG, cum bases IK, LM, sint æquales. (f Nam cum rectæ IL, KM, æquales sint ipsi AE, erunt quoq; inter se æquales; quare cõmuni dempta KL, æquales erunt IK, LM.) Erũt ergo omnia plana prismatis AIKFCH, æqualia & similia omnibus planis prismatis ELMGDB. Igitur ex defin. 10. huius lib. æqualia erũt dicta prismata; Ac propterea addito communi solido AHFKLDBE, æqualia fient parallelepipeda super eandem basin, &c. Quod erat demonstrandum.

[b] 34. primi [c] 4. sexti. [d] 24. vnde. [e] 36. primi

SCHOLIVM.

HAEC propositio persimilis est propositioni 35. lib. 1. Quod enim ibi de parallelogrammis, hoc de parallelepipedis demonstratur hoc loco, eisdem fere medijs, dummodo loco triangulorum assumantur prismata, vt ex demonstratione liquet. Vnde reliqui duo casus, quando nimirum punctum K, in punctum L, cadit, vel vltra L, eodem modo demonstrabuntur, vt in his figuris apparet. Nam in secundo casu, si ex parallelogrammis æqualibus AL, AM, auferatur triangulum commune ALE, erunt reliqua triangula AIK,

ELM, æqualia. Vnde, vt prius, æqualia erunt prismata AIKFCH, ELMGDB. Addito ergo prismate communi AKEBHD, æqualia fient parallelepipeda ACDE, AFGE.



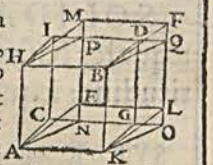
IN tertio vero casu, si ex parallelogrammis æqualibus AL, AM, demantur triangulum commune ANE, erunt reliqua trapezia AILN, NKME, æqualia; quibus si addatur triangulum commune KLN, tota triangula AIK, ELM, æqualia fient. Vnde, vt prius, æqualia erunt prismata AIKFCH, ELMGDB; a quibus si auferatur prisma commune KLNODF; (Nam communis sectio planorum AF, DE, est recta NO.) remanebit solidum cõprehensum planis AILN, NOHA, AICH, HGDO, CDLI, DLNO, æquale solido contento planis ENKM, MKFG, GFOB, FKNO, EGME, EBON. Si igitur addatur vtrique prisma commune AENOBH; fient parallelepipeda ACDE, AFGE, inter se æqualia.

30. THEOR. 25. PROPOS. 30.

SOLIDA parallelepipeda super eandem basin constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ non in ijsdem collocantur rectis lineis: inter se sunt æqualia.

SVPER basin AB, in eadem altitudine, hoc est, inter eadem plana parallela, sint constituta parallelepipeda AIDK, AMFK, quorum insistentes lineæ ex quatuor angulis basis exeuntes AC, AE, KG, KL; HI, HM, BD, BF, non sint in eisdem rectis, hoc est, neq; CI, GD, productæ transeant per puncta M, E, F, L, neque CG, ID, productæ, &c. Dico parallelepipeda AIDK, AMFK, esse æqualia.

æqualia. Cum enim plana CD, EF, opposita basi AB, sint in eodem plano, ob eandem altitudinem parallelepipedorum; producantur in eo plano rectæ CG, ID, quarum CG, secet EM, LF, protractas in punctis N, O; Et ID, easdem in punctis P, Q; adiungantur q; rectæ AN, KO, HP, BQ. [a] Quia igitur rectæ PQ, MF, sunt æquales,



cum opponantur in parallelogrammo FP; & MF, ipsi HB, est æqualis; erunt & PQ, HB, æquales: Sunt autem & parallelæ, propter parallelogrammum HIDB. [b] Igitur & HP, BQ, parallelæ sunt & æquales, ideoque parallelogrammum est HPQB. Eadem ratione parallelogramma erunt HPNA, ANOK, KOQB: Est autem & pallelogrammum NOQP. Igitur parallelepipedum est APQK. [c] Quamobrem parallelepipedum AIDK, æquale est parallelepipedo APQK, cum vtriusque eadem sit basis AB, & insistentes lineæ sint in rectis eisdem CO, IQ. Eodem modo eidem parallelepipedo APQK, æquale erit parallelepipedum AMFK, cum vtriusque eadem sit basis AB, & insistentes lineæ sint in rectis eisdem NM, OF. Quare parallelepipeda AIDK, AMFK, inter se sunt æqualia. Solida igitur parallelepipeda super eandem basin, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 34. primi

[b] 33. primi

[c] 29. unde.

SCHOLIVM.

CONVERTETVR hæc propositio, atque præcedens, in hunc modum.

SOLIDA parallelepipeda æqualia super eandem basin, siue insistentes lineæ in eisdem collocentur rectis, siue non; in eadem sunt altitudine.

NAM si vnũ dicatur altius; si ab eo abscindatur parallelepipedum in eadem cum reliquo altitudine; erunt æqualia

[a] 29. vel 30. vndec.

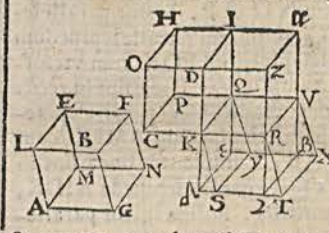
abscissum, & reliquum. [a] *Cum igitur & totũ huic reliquo ponatur æquale; æquale erit abscissum toti, quod est absurdum.*

31. 32.

THEOR. 26. PROPOS. 31.

SOLIDA parallelepipeda super æquales bases constituta, & in eadem altitudine: æqualia sunt inter se.

SVPER æquales bases AB, CD, in eadẽ altitudine sint constituta parallelepipeda AEFG, CHIK. Dico hęc parallelepipeda esse ęqualia inter se. Sint enim primum insistentes lineæ AM, GN, LE, BF, ad basin AB; & insistentes CP, KQ, OH, DI, ad basin CD, perpendiculares. Quo posito, erunt omnes dictę perpendiculares inter se ęquales, propter eandem parallelepipedorum altitudinẽ. Producatur CK, in rectum, sitque KR, ęqualis ipsi LB, & fiat angulus RKS, in plano OK, extenso ęqualis angulo BLA, ponaturq; KS, ęqualis ipsi LA; & perficiatur parallelogrammum KT, super quod, ad altitudinem perpendicularis KQ, constituatur parallelepipedum QSTV. Quoniam igitur latera KR, KS, ęqualia sunt lateribus LB, LA, & anguli RKS, BLA, æquales; erunt parallelogramma KT, LG, ęqualia & similia. Rursus quia latera KQ, KS, ęqualia sunt lateribus LE, LA, & anguli QKS, ELA, recti, per defin. 3. huius lib. eo quod KQ, LE, rectę ponantur ad plana KT, LG; erunt & parallelogrãma QS, EA, ęqualia & similia. Eodem modo cũ latera KR, KQ, ęqualia sint lateribus LB, LE, & anguli QKR, ELB, recti, ex eadem defin. 3. huius lib. erunt quoque parallelogramma KV, LF, ęqualia & similia. [b] Quare cum tria plana KT, QS, KV, parallelepipedi QSTV, ęqualia sint & similia tribus planis LG, EA,



[b] 24. vnde.

EA, LF, parallelepipedi AEFG; [a] tam autem illa, quam hæc ęqualia sint & similia tribus reliquis oppositis: Erunt, per defin. 10. huius lib. parallelepipeda QSTV, EAGF, inter se ęqualia.

[a] 24. vnde.

CONVENIANT rectę DK, TS, productę in δ; & IQ, XY, in ε, compleaturque parallelepipedum Qδγ V. Item HI, βV, protractæ conueniant in α; & OD, γR, in Z, perficiaturque parallelepipedum IKRα. Quoniam igitur parallelepipeda QSTV, Qδγ V, eandem habent basin KV, suntque in eadem altitudine, nempe inter eadem plana parallela KV, δX, & insistentes ipsorum lineæ KS, Kδ, RT, Rγ; QY, Qε, VX, Vβ, collocantur in eisdem rectis δT, εX; [b] ipsa inter se ęqualia erunt. Est autem parallelepipedum QSTV, parallelepipedo EAGF, æquale: Igitur eidem parallelepipedo EAGF, æquale erit parallelepipedum Qδγ V.

[b] 29. vnde.

[c] QVONIAM vero parallelogrãma KT, Kγ, ęqualia sunt inter se; & KT, ęquale est ipsi LG, erit & Kγ, ipsi LG, hoc est, ipsi CD, ęquale; cum bases LG, CD, ponantur ęquales. [d] Quare erit, vt CD, ad DR, ita Kγ, ad DR: [e] Vt autem CD, basis ad basin DR, ita est solidum CHIK, ad solidum KIαR; cũ parallelepipedũ CHαR, secetur plano IK, planis oppositis CH, αR, parallelo: Et eadem ratione vt Kγ, ad DR, ita est solidũ Qδγ V, ad solidum IKRα; cum & parallelepipedum Iδγα, secetur plano KV, oppositis planis Dα, δβ, parallelo. [f] Igitur æqualia erunt parallelepipeda CHIK, Qδγ V; cum eandem habeant proportionem ad idem solidum IKRα. Quare cum parallelepipedũ Qδγ V, sit ostensum æquale parallelepipedo AEFG: æqualia quoque erunt parallelepipeda AEFG, CHIK. Quod est propositum.

[c] 35. primi

[d] 7 quin.

[e] 25. vnde.

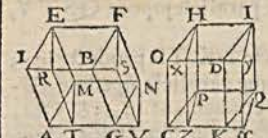
[f] 9. quinti.

SINT iam neque insistẽtes lineæ AM, GN, LE, BF, ad basin AB; neque CP, KQ, OH, DI, ad basin CD, perpendiculares: [g] Et a punctis E, F, M, N, demittantur ER, FS, MT, NV, ad planum, in quo basis AB, perpendiculares; Item a punctis, H, I, P, Q, ad planum, in quo basis CD, perpendiculares HX, IY, PZ, Qα. Erunt autem omnes hæ perpẽdiculares inter se æquales, cũ sint altitudines dictorum parallelepipedorũ æquales. Ducantur re-

[g] 11. vnde.

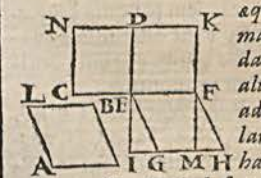
ctæ RS, SV, VT, TR: Item rectæ XY, Yα, αZ, ZX, vt fiant parallelepipeda ETVF, HZαI, quæ cum sint eiusdem altitudinis, habeantque insistentes lineas perpendiculares, erunt inter se æqualia, vt ostensum est. [a] Sed parallelepipedum ETVF, æquale est parallelepipedo AEFG, cum hoc eandem cum illo habeat basin EN, eandemque altitudinem; Et parallelepipedum HZαI, æquale est eadem ratione parallelepipedo CHIK, cum hoc eandem cum illo basin HQ, eandemque altitudinem possideat. Igitur & inter se æqualia sunt parallelepipeda AEFG, CHIK. Idemque ostendetur, si vnius parallelepipedi insistentes lineæ sint perpendiculares ad basin, alterius vero non. Quocirca solida parallelepipeda super æquales bases constituta, &c. Quod demonstrandum erat.

[a] 29.vel 30 vndec.



SCHOLIVM.

POTEST cum Campano expeditius fortasse demonstrari, duo parallelepipeda super æquales bases constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ ad bases sunt perpendiculares, inter se esse æqualia; Nimirum ex solis basibus, sine constructione tot parallelepipedorum, quamuis eadem sit demonstratio illius, quæ nostra. Sint enim duæ bases æquales, nempe duo parallelogramma AB, CD. Dico parallelepipeda super ipsas constituta, in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ ad bases AB, CD, sunt perpendiculares, inter se esse æqualia. Protrahantur enim duo latera DE, CE, ad partes E. Deinde fiat angulus FEG, æqualis angulo L; & recta EF, rectæ LB; & recta EG, rectæ LA, ponatur æqualis; perficiaturque parallelogrammum EH, quod æquale erit, & simile parallelogrammo AB. Conueniat autem HG, producta cum DE, producta in I, & compleatur parallelogrammum IK. Iam vero intelligantur super bases EH, IF, EK, constituta parallelepipeda eiusdem altitudinis cum parallelepipedis super AB, CD, constructis; sintque insistentes lineæ perpendiculares ad dictas bases. Perspicuum est igitur, solidum super EH, æquale esse ac simile solido super AB, ex defin. 10. huius lib. cum plana illius æqualia sint & similia planis huius, per constructionem: [a] Sunt autem & æqualia parallelepipeda super EH, IF, cum habeant basin eandem, cuius infimum latus EF, erectam super planũ IK; Item plana basi opposita, quorum latera infima GH, IM, in eodem plano, cuius infimum latus IH; atque insistentes lineas EG, FH, EI, FM, &c. in eisdem rectis lineis IH, &c. Igitur æquale erit parallelepipedum super IF, parallelepipedo super AB. [b] Quoniam vero parallelogramma EH, IF, æqualia sunt; & EH, æquale est ipsi CD: æqualia erunt IF, CD. [c] Erit igitur, vt IF, ad EK, ita CD, ad EK: [d] Est autem vt IF, ad EK, ita solidum super IF, ad solidum super EK, quod solidum super IK, secetur plano super EF, erecto parallelo planis super DK, IM, erectis. Et eadem ratione, vt CD, ad EK, ita solidum super CD, ad solidum super EK, cum solidum super CK, secetur plano super DE, erecto parallelo planis super CN, FK, erectis. Quare erit vt solidum super IF, ad solidum super EK, ita solidum super CD, ad solidum super EK; [e] Ac proinde æqualia erunt parallelepipeda super IF, & CD. Ostensum est autem parallelepipedum super IF, æquale parallelepipedo super AB. Æqualia ergo erunt & parallelepipeda super AB, CD. Quod est propositum.



CONVERTETVR quoque hæc propos. 31. in hunc modum.

SOLIDA parallelepipeda æqualia super æquales bases, in eadem sunt altitudine. Et parallelepipeda æqualia in eadem altitudine, super æquales sunt bases, si non habuerint eandem basin:

[a] 29.vnde.
[b] 35.primi
[c] 7. quinti.
[d] 25.vnde.
[e] 9.quinti.

SI enim vnum altero credatur altius, si ab eo abscindatur parallelepipedum in eadem cum altero altitudine, [a] *fient æqualia abscissum, & alterum. Cum ergo & totum ponatur æquale alteri; æquale erit abscissum toti. Quod est absurdum.*

[a] 31. unde.

QVOD si in eadem sint altitudine, & basis vnius credatur maior base alterius, si ab ea abscindatur basis æqualis alteri, & super abscissam intelligatur parallelepipedum eiusdem altitudinis, demonstrabimus eodem modo, partem toti esse æqualem. Quod est absurdum.

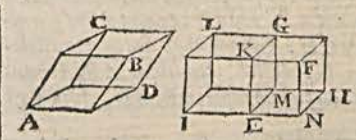
33.

THEOR. 27. PROPOS. 32.

SOLIDA parallelepipeda sub eadem altitudine; inter se sunt, vt bases.

SINT duo parallelepipeda ABCD, EFGH, eiusdem altitudines super bases AB, EF. Dico esse solidum ad solidum, vt est basis ad basin. [b] Super rectam enim EK, constituatur parallelogrammum IK, æquale parallelogrammo AB, in angulo IEK, qui sit æqualis angulo ENF. Constituent autem parallelogramma EF, IK, totum parallelogrammum vnum FI, vt in 45. propos. lib. 1. demonstratum est. Si igitur alia plana parallelepipedi EFGH, producantur ad partes EG, perficiaturq; totũ vnũ parallelepipedũ IFLH; [c] erunt parallelepipeda ABCD, IKLM, æqualia, cũ habeãt æquales bases, per constructionẽ AB, IK; & eandẽ altitudinẽ, ex hypothesi. [d] Quare erit vt solidum IKLM, ad solidũ EFGH, ita solidum ABCD, ad solidum EFGH: [e] Est autem solidum IKLM, ad solidum EFGH, vt basis IK, hoc est, illi æqualis basis AB, ad basin EF. Igitur & solidũ ABCD, erit ad solidũ EFGH, vt basis AB, ad basin EF. Solida ergo parallelepipeda sub eadem altitudine inter se sunt, vt bases. Quod erat demonstrandum.

[b] 45. primi



[c] 31. unde.

[d] 7. quinti

[e] 25. unde.

SCHOLIVM.

CONVERSO modo, si solida parallelepipeda inter se sint, vt bases; ipsa erunt sub eadem altitudine. Si enim non eadẽ credatur altitudo; ex maiori abscindatur minori æqualis, & ducatur planum basi parallelum; [a] *eritq; vt basis ad basin, ita parallelepipedum ad parallelepipedum abscissum: sed sic quoque erat ad totum.* [b] *Abscissum ergo æquale est toti. Quod est absurdum.*

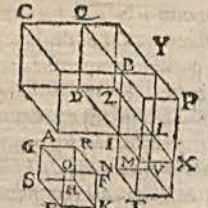
[a] 32. unde.

[b] 9. quin.

THEOR. 28. PROPOS. 33. 36.

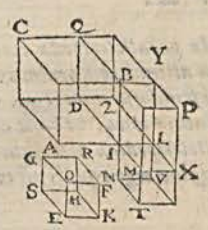
SIMILIA solida parallelepipeda, inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum.

SINT similia parallelepipeda ABCD, EFGH, super bases similes AB, EF, in quibus latera homologa sint AI, EK. Dico proportionẽ parallelepipedi ABCD, ad parallelepipedum EFGH, esse triplicatam proportionis laterum homologorum AI, EK. Producatur enim AI, ad L, & sit IL, æqualis ipsi EK, vel GR; Item DI, ad M, & sit IM, æqualis ipsi HK, vel GO; Item BI, ad N, & sit IN, æqualis ipsi KF, vel GS. Deinde cõpletis parallelogrammis LM, LN, IT, perficiatur parallelepipedum TXIV. Quoniam vero latera IL, IM, æqualia sunt lateribus GR, GO; [c] & anguli cõtenti æquales, cũ angulus LIM, sit æqualis angulo AID, qui ob similitudinem parallelepipedorum æqualis



[c] 15. primi

æqualis est angulo EKH, seu RGO; erunt parallelogrâ ma IX,GF, similia & æqualia. Eadem ratione similia e- runt,& æqualia LN,RS; item IT,GE. Quare tria plana IX,LN,IT, parallelepipedi TXIV, similia sunt & æqua lia tribus planis GF,RS,GE, pa rallelepipedi EFGH: [a] Sunt au tem tria cuiusq; similia & æqua lia tribus reliquis oppositis. Igi tur æqualia sunt & similia paral lelepipeda TXIV, EFGH, ex defin. 10. huius lib. Rursus com pletis parallelogrammis MB, BL, LM, perficiatur parallelepi pedum MPBL; Item completis parallelogrammis IY, DL, IQ, perficiatur parallelepi- pedum IYQZ. Quoniam igitur ob similitudinem paral lelepipedorũ ABCD, EFGH, est vt AI, ad EK, hoc est, ad IL, ita DI, ad HK, hoc est, ad IM; & BI, ad FK, hoc est, ad IN. [b] Vt autem AI, ad IL, ita est parallelogram- mum AD, ad DL; Et vt DI, ad IM, ita parallelogram- mum DL, ad LM; & vt BI, ad IN, ita parallelogram- mum BL, ad LN. Igitur erit vt AD, ad DL, ita DL, ad LM; & BL, ad LN. [c] Sed vt AD, basis ad DL, basin, ita est parallelepipedum ADCB, ad parallelepipedum DLYQ: & vt basis DL, ad basin LM, ita pallelepipe- dum DLYQ, ad parallelepipedũ LMBP; & vt basis BL, ad basin LN, ita parallelepipedũ LMBP, ad parallelepi pedũ LNTX. Quare erit, vt parallelepipedũ ADCB, ad parallelepipedũ DLYQ, ita parallelepipedũ DLYQ, ad parallelepipedũ LMBP, & parallelepipedum LMBP, ad parallelepipedũ LNTX. Ac ,pinde quatuor quantitates sunt continue proportionales ADCB, DLYQ, LMBP, LNTX, ideoq; ,pportio primæ ADCB, ad quartã LN- TX, hoc est, ad EFGH, erit triplicata ,pportionis primæ ADCB, ad secundam DLYQ, ex defin. 10. lib. 5. [d] Vt autem ADCB, ad DLYQ, ita est basis AD, ad basin DL; [e] Et vt AD, ad DL, ita est recta AI, ad IL, hoc est, ad EK. Igitur proportio parallelepipedi ADCB, ad pa- rallelepipedum EFGH, est triplicata proportionis homologo-



[a] 24. vnde.
[b] 1. sexti.
[c] 32. vnde.
[d] 32. vnde.
[e] 1. sexti.

mologorum laterum, nimirum AI, ad EK. Quapropter similia solida parallelepipeda, inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum. Quod erat demon- strandum.

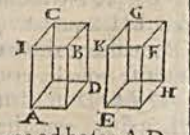
COROLLARIVM.

EX hoc perspicuum est, si fuerint quatuor lineæ rectæ continue proportionales, vt est prima ad quar tam, ita esse parallelepipedum super primam descri ptum ad parallelepipedum simile, similiterque descri ptum super secundam. Quia tam parallelepipedum ad parallelepipedum, vt demonstratum est, quam prima linea ad quartam, ex definitione 10. lib. 5. habet proportionem triplicatam propertionis primæ lineæ ad secundam, nimirum laterũ homologorum.

THEOR. 29. PROPOS. 34. 34-35.

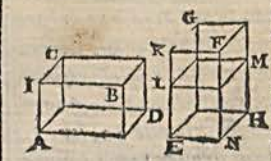
AEQVALIVM solidorum paralle lepipedorũ bases, & altitudines recipro- cantur; Et quorum solidorum parallele- pipedorum bases, & altitudines recipro cantur; Illa sunt æqualia.

SINT æqualia parallelepipeda ADCB, EHGF, su per bases AD, EH. Dico bases AD, EH, & altitudines parallelepipedo- rum ADCB, EHGF, esse recipro- cas, hoc est, esse vt AD, ad EH, ita altitudinem solidi EHGF, ad altitu dinem ADCB. Sint enim primũ in- sistentes lineæ AI, EK, perpendiculares ad bases AD, EH, ita vt AI, EK, sint per defin. 4. lib. 6. altitudines pa- rallelepipedorum. Si igitur altitudines AI, EK, sunt æqua-



æquales; cum & parallelepipeda æqualia ponantur; erunt & baſes AD, EH, æquales, per ea, quæ ad finem propoſ. 31. huius lib. oſtendimus. Quare erit, vt baſis AD, ad baſin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI: Ac proinde baſes & altitudines ſunt reciprocæ.

QVOD ſi altitudines AI, EK, inæquales fuerint; ſit EK, maior, ex qua abſcindatur EL, ipſi AI, æqualis; & per L, ducatur planum LM, parallelum baſi EH, per ſcholiũ propoſ. 15. huius lib.



Quoniã igitur æqualia ſunt ſolida ADCB, EHGF; [a] erit vt ADCB, ad ſolidum EHML, ita EHGF, ad idem ſolidum EHML: [b] Vt autem ſolidum ADCB, ad ſolidum EHML, ita eſt baſis AD, ad baſin EH, cum æquales ponantur altitudines AI, EL; Et vt ſolidum EHGF, ad ſolidum EHML, ita eſt eadẽ ratione, baſis KN, ad baſin LN, cum hac ratione ſolida EHGF, EHML, eãdem habeant altitudinem, ſi nimirũ baſes ponantur KN, LN; erunt enim inter eadem plana parallela KN, GH. Igitur erit vt baſis AD, ad baſin EH, ita baſis KN, ad baſin LN: [c] Sed vt KN, ad LN, ita eſt recta EK, ad rectam EL, hoc eſt, ad AI, ipſi EL, æqualem. Quare erit vt baſis AD, ad baſin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI; Ac propterea reciprocæ ſunt baſes, & altitudines.

[a] 7. quinti.
[b] 32. vnde.
[c] 1. ſexti.

SINT iam baſes & altitudines reciprocæ. Dico parallelepipeda eſſe æqualia. Si enim altitudines EK, AI, ſunt æquales; cum ſit baſis AD, ad baſin EH, vt altitudo EK, ad altitudinem AI, ex hypotheſi; erunt & baſes AD, EH, æquales. [d] Quare parallelepipeda ADCB, EHGF, cum æquales habeant baſes, & altitudinem eandem, inter ſe æqualia erunt.

[d] 31. vnde.

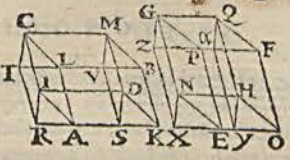
QVOD ſi altitudo EK, maior fuerit, abſcindatur EL, ipſi AI, æqualis, & per L, ducatur planum LM, parallelũ baſi EH. Quia igitur ex hypotheſi eſt, vt baſis AD, ad baſin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI, hoc eſt, ad EL, ipſi AI, æqualem; [e] Vt autem baſis AD, ad baſin

[e] 32. vnde.

baſin EH, ita eſt ſolidum ADCB, ad ſolidum EHML, cum altitudines AI, EL, æquales ponantur; [a] Et vt EK, ad EL, ita eſt KN, ad LN; [b] Vt autem baſis KN, ad baſin LN, ita eſt ſolidum DHGF, ad ſolidum EHML, cũ ſolida EHGF, EHML, eandem habeant altitudinem, ſi baſes ponantur KN, LN; erũt enim hac ratione inter plana parallela KN, GH; Erit vt ſolidum ADCB, ad ſolidum EHML, ita ſolidum EHGF, ad idem ſolidum EHML; [c] ideoque æqualia erunt ſolida ADCB, EHGF.

[a] 1. ſexti.
[b] 32. vnde.
[c] 9. quinti.

SED proponantur iam parallelepipeda A[illegible]F-GH, æqualia, quorum inſiſtẽtes lineæ AI, KD, BM, LC; EN, OH, FQ, PG, non ſint perpẽdiculares ad baſes AB, EF. Demittantur autẽ a punctis I, D, M, C, ad planũ baſis AB, perpendiculares IR, DS, MV, CT; itẽ a punctis N, H, Q, G, ad planum baſis EF, perpendiculares NX, HY, Qα, GZ; connectanturque rectæ RS, TV, RT, SV; XY, Zα, XZ, Yα: Eruntq; perpẽdiculares RI, XN, parallelepipedorũ altitudines, ex defin. 4. lib. 6. Dico rurſus, vt baſis AB, ad baſin EF, ita eſſe altitudinẽ XN, ad altitudinẽ RI. [d] Cũ enim æqualia ſint ſolida ABCD, EFGH, ex hypotheſi, & ſit autem ABCD, æquale ſolido RVCD, quod habeant eandem baſin CD, eandemque altitudinem RI; & EFGH, eadẽ ratione, æquale ſolido XαGH: Erunt & parallelepipeda RVCD, XαGH, æqualia. Quare cum habeant inſiſtentes lineas perpendiculares ad baſes CD, GH; erit, vt iam demonſtratum eſt, vt baſis CD, ad baſin GH, hoc eſt, vt baſis AB, ad baſin EF, ita altitudo XN, ad altitudinem RI. Ac propterea baſes & altitudines ſunt reciprocæ.



[d] 29. vel 30. vndec.

SINT iam baſes atque altitudines reciprocæ. Dico parallelepipeda eſſe æqualia. Conſtructa enim figura, vt prius; Cum ſit vt baſis AB, ad baſin EF, ita altitudo XN, ad altitudinem RI; [e] Sit autem AB, ipſi CD, & EF, ipſi GH, æqualis; erit quoque vt baſis CD, ſolidi RVCD, ad baſin

[e] 24. vndo.

basin GH, solidi XαGH, ita altitudo XN, ad altitudinē RI. Quare cum XN, RI, sint insistentes lineæ, perpendiculares ad bases CD, GH; erunt, vt iam ostensum est, æqualia parallelepipeda RVCD, XαGH. [a] Sunt autem hæc parallelepipeda parallelepipedis ABCD, EFGH, æqualis. Igitur æqualia quoque erunt parallelepipeda ABCD, EFGH: Idemque ostendetur si insistentes lineæ vnius parallelepipedi fuerint perpendiculares ad basin, alterius vero non. Quam ob rem, Aequalium solidorum parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 29. vel 30 vndec.

SCHOLIVM.

OMNIA hæc, quæ demonstrata sunt in sex proximis propositionibus, nimirum 29. 30. 31. 32. 33. & 34. conueniunt quoque prismatis, quæ habent duo plana opposita triangularia, si prædictæ hypotheses seruentur. Nam si duobus prismatis eiusmodi eiusdem altitudinis, & super eandem basin, vel super æquales bases constitutis, apponantur duo alia prismata illis æqualia & similia, conficientur duo parallelepipeda eiusdem altitudinis, & super eandem, vel æquales bases existentia, [b] *Quare æqualia erunt eiusmodi parallelepipeda; ac proinde & data prismata, eorum videlicet dimidia.*

[b] 29. 30. vel 31. undec.

RVRSVS, si duobus prismatis prædictis eiusdem altitudinis, & super diuersas bases constitutis adiiciantur duo alia prismata illis æqualia & similia, conficientur iterum duo parallelepipeda eiusdem altitudinis. [c] *Quare erit parallelepipedum ad parallelepipedum, vt basis ad basin;* [d] *Atque adeo prisma ad prisma, nempe dimidium vnius parallelepipedi, ad dimidium alterius, vt eadem basis ad basin: si prismatum bases fuerint parallelogramma, vel certe vt triangulum ad triangulum, dimidium scilicet vnius basis ad dimidium alterius, si bases prismatum fuerint triangula.*

[c] 32. vnde.
[d] 15. quin.

PRAETEREA, si duobus prismatis præfatis similibus addãtur alia duo prismata illis æqualia & similia, constituentur duo parallelepipeda similia, [e] *quæ inter se habent proportionem triplicatam proportionis laterum homologorum.* [f] *Igitur & prismata, eorum nimirum dimidia, cum eandem habeant*

[e] 33. vnde.
[f] 15. quin.

habeant proportionem cum parallelepipedis, proportionem habebunt triplicatã proportionis eorundem laterum homologorum, quæ quoque sunt latera homologa prismatum.

DENIQVE si dictis duobus prismatis æqualibus adiungantur alia duo prismata illis æqualia & similia, componentur duo parallelepipeda æqualia eorundem altitudinum cum prismatis. [a] *Quare cum bases, & altitudines parallelepipedorum sint reciprocæ; & bases prismatum eadem sint, vel certe triangula earum dimidia eandem habentia proportionem;* [b] *Erunt quoque bases prismatum & eorum altitudines reciprocæ.*

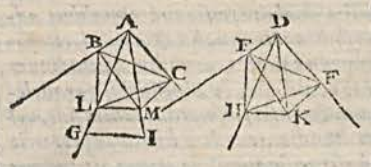
[a] 34. vnde.
[b] 15. quin.

THEOR. 30. PROPOS. 35. 37.

SI fuerint duo plani anguli æquales, quorũ verticibus sublimes rectæ lineæ insistant, quæ cum lineis primo positis angulos contineant æquales, vtrumque vtrique; In sublimibus autẽ lineis quælibet sumpta fuerint puncta, & ab his ad plana, in quibus consistunt anguli primum positi, ductæ fuerint perpendiculares; a punctis vero, quæ in planis a perpendicularibus fiunt, ad angulos primũ positos adiunctæ fuerint rectæ lineæ: Hæ cum sublimibus æquales angulos comprehendent.

SINT duo anguli plani æquales BAC, EDF, quorum verticibus A, & D, insistant extra ipsorum plana, sublimes rectæ lineæ AG, DH, ita vt angulus BAG, angulo EDH, & angulus CAG, angulo FDH, sit æqualis: & sumptis autem punctis G, H, in rectis AG, DH, demit

tantur ad plana, in quibus anguli BAC, EDF, existunt perpendiculares GI, HK, incidentes in puncta I, K, & adiungantur rectę IA, KD. Dico angulos GAI, HDK, esse æquales inter se. Nã si AG, DH, sunt inæquales, auferatur a maiori AG, ipsi DH, æqualis linea AL; & ex L, ad planum anguli BAC, perpendicularis demittatur LM. Quoniã igitur GI, LM, rectę sunt ad planum anguli BAC; [a] ipsæ erunt parallelæ, atque adeo in eodem plano, nempe in plano trianguli AGI. Quare LM, cadet in rectam AI. Ducantur autem ex punctis M, K, ad rectas AB, AC, DE, DF, perpendiculares MB, MC, KE, KF; & connectantur rectę BC, BL, LC, EF, EH, HF. Et quia LM, recta est ad planum anguli BAC, ipsa rectum angulum efficiet cum recta AM, in eodem plano ducta per defin. 3. huius lib. [b] Quare quadratum rectæ AL, æquale erit quadratis rectarum AM, ML: [c] Est autem quadratum rectæ AM, æquale quadratis rectarum AC, CM, cum & angulus ACM, rectus sit, ex constructione. Quadratum ergo rectæ AL, æquale est quadratis rectarum AC, CM, ML: [d] At quadratis rectarum CM, ML, æquale est quadratum rectæ CL, cum angulus CML, rectus sit per defin. 3. huius lib. Igitur quadratum rectę AL, æquale est quadratis rectarum AC, CL; [e] Ac proinde angulus ACL, rectus erit. [f] Rursus quia quadratum rectæ AL, æquale est quadratis rectarum AM, ML: [g] Est autem quadratum rectę AM, æquale quadratis rectarum AB, BM, cum angulus ABM, per constructionem, sit rectus. Igitur quadratum rectæ AL, æquale est quadratis rectarum AB, BM, ML: [h] At quadratis rectarum BM, ML, æquale est quadratum rectæ BL, quod & angulus BML, sit rectus ex defin. 3. huius lib. Quadratum ergo rectæ AL, æquale est quadratis rectarum AB, BL; [i] propterea que angulus ABL, erit rectus. Non aliter ostendentur recti anguli DFH, DEH. Quoniam igitur anguli ABL, LAB, triãguli ABL, æquales sunt angulis DEH, HDE, trianguli DEH; sunt que latera AL, DH, æqualia; [a] Erũt & reliqua latera AB, BL, reliquis lateribus DE, EH, æqualia. Eodem argumento æquales erũt rectæ AC, CL, rectis DF, FH. Quare cũ latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia sint lateribus DE, DF, trianguli DEF; & anguli contenti BAC, EDF, æquales, ex hypothesi; [b] erunt & bases BC, EF, inter se, & anguli ABC, ACB, angulis DEF, DFE æquales: Sunt autem & toti anguli ABM, ACM, totis angulis DEK, DFK, æquales, cum omnes sint recti. Igitur & reliqui anguli MBC, MCB, reliquis angulis KEF, KFE, æquales erunt; Ac propterea cum & latera BC, EF, sint ostensa æqualia; [c] erunt latera BM, CM, lateribus EK, FK, æqualia. Quia igitur latera AC, CM, trianguli ACM, æqualia sunt ostensa lateribus DF, FK, trianguli DFK; & anguli ACM, DFK, sunt recti; [d] erunt & bases AM, DK, inter se æquales. Cum autem æquales sint ostensæ rectę BL, EH, erunt etiam earum quadrata æqualia: [e] Quia vero quadratum rectę BL, æquale est quadratis rectarum BM, ML; & quadratum rectæ EH, quadratis rectarum EK, KH, quod anguli BML, EKH, recti sint, ex defin. 3. huius lib. Erunt & quadrata rectarum BM, ML, æqualia quadratis rectarũ EK, KH. Ablatis ergo quadratis rectarum BM, EK, quę æqualia sunt, quod rectę BM, EK, ostensę sint æquales; reliqua quadrata rectarum LM, HK, æqualia erunt, ac proinde rectę LM, HK, æquales. Quam ob rem cum latera AL, AM, trianguli ALM, æqualia sint lateribus DH, DK, trianguli DHK, & basis LM, basi HK, æqualis; erunt & anguli LAM, HDK, æquales. Si igitur fuerint duo anguli plani æquales, quorum verticibus sublimes rectæ lineę insistant, &c. Quod ostendendum erat.



a 6. vndec.
b 47. primi
c 47. primi
d 47. primi
e 48. primi
f 47. primi
g 47. primi
h 47. primi
i 48. primi

a 26. prim.
b 4. primi.
c 26. primi
d 4. primi.
e 47. primi
f 8. primi.

COROLLARIVM.

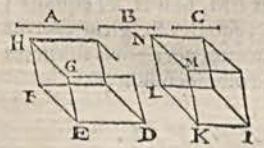
IT AQVE, si fuerint duo anguli plani æquales, quorum verticibus sublimes rectæ lineæ æquales insistãt, quæ cũ lineis primo positis angulos contineãt æquales, vtrũque vtrique. Erunt a punctis extremis

linearum ſublimium ad plana angulorum primo poſitorum demiſſæ perpendiculares inter ſe æquales. Nam propterea quod anguli plani BAC, EDF, ponuntur æquales, & ſublimes æquales AL, DH, conſtituunt angulos æquales LAB, HDE; Item LAC, HDF; demonſtratum fuit, demiſſas perpendiculares LM, HK, eſſe æquales.

38. THEOR. 31. PROPOS. 36.

SI tres rectæ lineæ proportionales fuerint: Quod ex his tribus fit ſolidum parallelepipedum, æquale eſt deſcripto a media linea ſolido parallelepipedo, quod æquilaterum quidem ſit, æquiangulum vero prædicto.

SINT continue proportionales rectæ A, B, C. Conſtituaturque angulus ſolidus E, ex tribus angulis planis quibuſcunque DEF, DEG, FEG, ita vt recta DE, ipſi A; & EF, ipſi B; & EG, ipſi C, ſit æqualis. Completis autem parallelogrammis DF, FG, GD, perficiatur parallelepipedum DH; quod ſub tribus rectis A, B, C, dicitur contineri, aut ex ipſis fieri. [a] Deinde ad rectam IK, eiuſque punctum K, fiat ſolidus angulus K, æqualis ſolido angulo E, ex tribus angulis planis IKL, IKM, LKM, quæ æquales ſint tribus DEF, DEG, FEG; ita vt rectę IK, KL, KM, æquales ſint mediæ lineæ B. Completis vero parallelogrammis IL, LM, MI, perficiatur parallelepipedum IN; quod contineri dicitur ſub linea B, ſeu ex ipſa deſcribi. Dico ſolidum DH, æquale eſſe ſolido IN. Cum enim ſit vt DE, ad IK, ita KM, ad EG, (quod DE, ipſi A; & IK, KM, ipſi B; & EG, ipſi C, ſumpta ſit æqualis,) & anguli DEG, IKM, æquales: Erunt parallelogramma DG, IM, æqualia, propterea quod latera habẽt circa æquales angulos reciproca. Quoniam vero anguli plani DEG, IKM, ſunt æquales, quorũ verticibus inſiſtunt ſublimes lineæ æquales EF, KL, quæ æquales angulos cõprehendũt cũ lineis primo poſitis, ex conſtructione, vtrũq; vtrique; Erunt perpendiculares ex F, L, ad plana baſium DG, IM, demiſſæ, ſnimirum altitudines parallelepipedorum DH, IN, ſi baſes ſint DG, IM, inter ſe æquales, per coroll. propoſ. præcedentis. [b] Quare parallelepipeda DH, IN, cum habeãt baſes DG, IM, æquales, & æquales quoque altitudines, inter ſe æqualia erunt. Si tres igitur rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.



[a] 26. vnde.

[a] 14. ſexti.

[b] 31. vnde.

SCHOLIVM.

VICISSIM quoque, ſi parallelepipedum ex tribus lineis rectis deſcriptum, æquale fuerit parallelepipedo ſibi æquiangulo a media linea deſcripto: erunt tres rectæ continue proportionales. Sit enim parallelepipedum DH, deſcriptum ex rectis A, B, C, vt dictum eſt, æquale ſibi æquiangulo parallelepipedo IN, deſcripto a media B. Dico tres A, B, C, eſſe continue proportionales. Nam veluti prius, oſtendentur eorum altitudines ex F, L, demiſſæ eſſe æquales. Quare cum & ipſa ponantur æqualia; erunt eorum baſes DH, IM, æquales per ea, quæ ad finem propoſ. 31. huius lib. demonſtrauimus. Quæ baſes cum angulos habeant æquales DEG, IKM, ex cõſtructione; [c] habebunt latera circa illos æquales angulos reciproca; hoc eſt, vt DE, ad IK, ita KM, ad EG. Quapropter cũ DE, ipſi A; & IK, KM, ipſi B; & EG, ipſi C, ſumpta ſit æqualis; Erit quoque vt A, ad B, ita B, ad C. Quod eſt propoſitum.

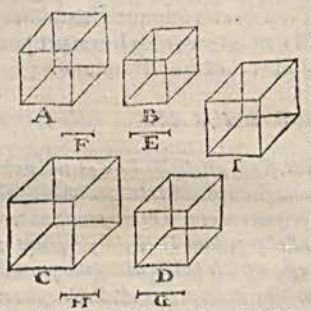
[c] 14. ſexti.

39. PROBL. 32 PROPOS. 37.

SI quatuor rectę lineæ proportionales fuerint: & ſolida parallelepipeda,

quæ ab ipsis & similia, & similiter describuntur, proportionalia erunt. Et si solida parallelepipeda, quæ & similia, & similiter describuntur, fuerint proportionalia: Et ipsæ rectæ lineę proportionales erunt.

SINT quatuor rectę proportionales A, B, C, D; vt quidem A, ad B, ita C, ad D; constituanturque super A, & B, duo parallelepipeda A, & B, similia, similiterque descripta; item super C, & D, alia duo C, & D, similia similiterque posita, siue hæc sint illis similia, siue non. Dico esse quoque solida A, B, C, D, proportonalia; Vt quidem solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D. Inueniantur enim per scholium propos. 11. lib. 6. duabus rectis A, B, aliæ duę continue proporti onales E, F; Item duabus C, D, aliæ G, H. Quoniam igitur sunt quatuor lineę A, B, E, F, & quatuor lineę alię C, D, G, H, quę binæ in eadem ratione sumuntur; erit ex æquo, vt A, ad F, ita C, ad H. Vt autem A, ad F, ita est solidum A, ad solidum B; Et vt C, ad H, ita solidũ C, ad solidum D, ex coroll. propos. 33. huius lib. Igitur erit vt solidum A, ad solidum B, ita solidum D, ad solidum D. Quod est propositum.



SINT iam e contrario solida A, B, C, D, proportionalia. Dico rectas A, B, C, D, esse quoque proportionales. [a] Tribus enim rectis A, B, C, inueniatur quarta proportionalis I, [b] super quam describatur parallelepipedũ ipsi D, vel C, simile, similiterque positum. Quoniam igitur

[a] 12. sexti.
[b] 27. vnde.

tur est, vt recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam I; erit quoque, vt iam est ostensum, vt solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum I. Vt autem solidum A, ad solidum B, ita ponitur quoque solidum C, ad solidum D: Igitur erit vt solidum C, ad solidum I, ita idem solidum C, ad solidum D. [a] Atque idcirco æqualia erunt solida I, & D. Quę cum sint similia, similiterque descripta, continebuntur planis æqualibus, per defin. 10. huius lib. Sed plana æqualia, & similia habent latera homologa æqualia, per lemma propos. 22. lib. 6. Igitur rectæ I, & D, æquales sunt. Ac propterea erit, vt recta C, ad I, rectam, ita eadem C, ad rectam D. Posita est autem C, ad I, vt recta A, ad B. Quare erit vt recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam D. Itaque si quatuor rectę lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 9. quinti.

BREVIVS tota hæc propositio demonstrabitur cum Theone, hoc modo. Ponatur primũ vt recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam D. Dico esse quoque vt solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D. [b] Cum enim sit proportio solidi A, ad solidum B, triplicata proportionis rectę A, ad rectam B; Item proportio solidi C, ad solidum D, triplicata proportionis rectę C, ad rectam D: erunt proportiones solidi A, ad solidum B, & solidi C, ad solidum D, æquales; quandoquidem triplicatę sunt proportionum æqualium, nempe rectę A, ad rectam B, & rectę C, ad rectam D. Quod est primum. Rursus ponatur secundo esse vt solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D. Dico esse quoque, vt recta A, ad rectam B, ita rectam C, ad rectam D. [c] Cum enim sit proportio solidi A, ad solidum B, triplicata proportionis rectæ A, ad rectam B; Item proportio solidi C, ad solidum D, triplicata proportionis rectę C, ad rectam D: erunt proportiones rectarum A, ad B, & C, ad D, æquales; quandoquidem earum proportiones triplicatę, nimirum solidi A, ad solidum B; & solidi C, ad solidum D, æquales ponuntur. Quod est secundum.

[b] 33. vnde.
[c] 33. vnde.

SCHOLIVM.

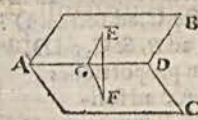
EODEM modo, si fuerint tres rectæ proportionales, erunt & parallelepipeda similia similiterque descripta ex eis, proportionalia, &c. Si enim media linea, eiusque solidum sumatur bis, habebuntur quatuor rectæ proportionales. Igitur & quatuor solida proportionalia, vt demonstratum est. Cum igitur solidum secundæ lineæ æquale sit solido tertiæ lineæ; & linea secunda æqualis tertiæ lineæ; perspicuum est, quod proponitur.

TOTA vero hæc propositio conuenit etiam prismatis, quorum duo plana aduersa æqualia, sunt vel triangula, vel parallelogramma, vt Campanus ait. Nam additis prismatis, quæ singula singulis sint æqualia, exurgent parallelepipeda, quæ vt hic est demonstratum, proportionalia erunt. [a] Cum igitur prismata, eorum dimidia, eandem habeant cum ipsis proportionem; perspicuum est, quod proponitur.

[a] 15. quin.

13. THEOR. 33. PROPOS. 38.

SI planum ad planum rectum fuerit; & ab aliquo puncto eorum, quæ in vno sunt planorum, ad alterum planum perpendicularis ducta fuerit: in communem sectionem cadet planorum ducta perpendicularis.



PLANVM.n. AB, rectum sit ad planum AC, sitque eorum communis sectio recta AD; Et ab E, puncto plani AB, ad planum AC, perpẽdicularis demittatur: quã dico cadere in communem sectionẽ AD. Nam si fieri põt, cadat extra ad punctum F, [b] & ab F, in plano AC, ducatur ad rectã AD, perpẽdicularis FG, connectaturq; recta EG, in plano AB. Quoniam igitur FG, perpendicularis est ad communem sectionem AD; erit quoque perpendicularis ad planum AB, ex defin. 4. huius lib. atq; adeo & ad rectam GE, per 3. defin. huius lib. Est autem & EF, recta ad FG, per eandẽ 3. defin. Igitur in triangulo EFG, duo anguli EFG, EGF, recti sunt. quod est absurdum; [a] cum duobus rectis sint minores. Perpendicularis ergo ex E, demissa ad planum AC, non extra communem sectionem AD, cadet. ergo in ipsam cadat, necesse est. Quamobrem, si planum ad planum rectum fuerit, &c. Quod erat demonstrandum.

[b] 12. primi

[a] 17. primi

SCHOLIVM.

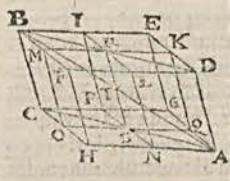
HÆC est demonstratio Theonis. Nos tamen idem demonstrabimus breuius, hoc modo. Si ex puncto E, dato in plano AB, demissa perpendicularis ad planum AC, non cadit in communem sectionem AD, sed in punctum F, extra sectionẽ; [b] ducatur ex E, ad rectam AD, perpendicularis EG; quæ ex 4. defin. recta erit ad planum AC. Quare ex puncto E, extra planum AC, ductæ sunt ad ipsum planum AC, duæ perpendiculares EF, FG. Quod fieri nequit, vt in scholio propos. 13. huius lib. demonstrauimus.

[b] 12. primi

THEOR. 34. PROPOS. 39. 40.

SI solidi parallelepipedi eorum, quę ex aduerso, planorum latera bifariam secta sint; per sectiones autem plana sint extensa: communis sectio planorum, & solidi parallelepipedi diameter, bifariam se mutuo secabunt.

SINT parallelepipedi AB, plana opposita AC, BD, quorum omnia latera bifariam secta sint in punctis I, K, L, M, N, O, P, Q; per quę extẽsa sint duo plana IN, KO, quorum



quorum sectio communis sit recta RS: Ducatur item diameter AB. Dico rectam RS, & diametrũ AB, se mutuo secare bifariam. Connexis enim rectis RB, RD, SA, SC; considerentur duo triangula AQS, COS. Quoniã igitur latera AQ, QS, trianguli AQS, æqualia sunt lateribus CO, OS, trianguli COS; (Sunt enim AQ, CO, dimidia rectarum æqualium AG, CH; [a] & QS, OS, duabus æqualibus AN, HN, æquales, cum sint parallelogramma AS, HS.) [b] & angulus AQS, æqualis alterno angulo COS: [c] Erunt & bases AS, CS, æquales; & anguli ASQ, CSO, æquales. [d] Atqui anguli ASQ, ASO, æquales sunt duobus rectis. Igitur & CSO, ASO, duobus sunt rectis æquales. [e] Ac propterea AS, CS, vnã rectam lineam constituent. Eodem modo ostendentur et se æquales BR, DR, & vnam ex eis componi lineam rectam. Rursus quia vtraq; AD, BC, parallela est, & æqualis rectæ FH, ob parallelogramma AF, FC, [f] ipsæ quoq; inter se parallelæ erunt, & æquales. [g] Quare & rectæ AC, BD, earum extrema coniungentes, parallelæ sunt & æquales; Ac proinde ipsarum dimidiæ AS, BR, æquales sunt. Quia vero AC, BD, parallelæ sunt; [h] erunt rectæ AB, RS, in eodem cum ipsis plano, ideoque se mutuo secabunt, in puncto videlicet T. [i] Cum autem duo anguli AST, ATS, trianguli AST, æquales sint duobus angulis BRT, BTR, trianguli BRT; & latus AS, lateri BR: [k] Erunt reliqua latera TA, TS, reliquis lateribus TB, TR, æqualia; Ac propterea AB, RS, se mutuo secant bifariam in T. Si igitur solidi parallelepipedi eorum, quæ ex aduerso, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 34. primi
[b] 29. primi
[c] 4. primi
[d] 13. primi
[e] 14. primi
[f] 9. vndec.
[g] 33. primi
7. vndec.
29. & 15. primi.
[k] 26. primi

COROLLARIVM.

HINC efficitur, in omni parallelepipedo diametros omnes se mutuo bifariam secare in vno puncto. nimirum in puncto T, in quo bifariam diuidunt, vt hic demonstratum est, rectam RS.

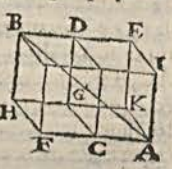
HVIC

SCHOLIVM.

HVIC theoremati addi potest aliud non dissimile illi, quod ad propos. 34. primi lib. demonstrauimus, videlicet.

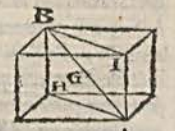
SI solidum parallelepipedum plano secetur per centrum: bifariam secabitur solidum ab ipso plano. Et si solidum parallelepipedum plano secetur bifariam: per centrum transibit ipsum planum.

SECETVR parallelepipedum AB, plano CD, per centrum, hoc est, per punctum medium diametri AB, quod sit G. Dico parallelepipedum bifariam secari. Sit enim primo planũ CD, oppositis planis AE, BF, parallelum. [a] Et quia plana parallela BF, DC, EA, secant rectas quascunque proportionaliter; secatur autem BA, bifariam in G; secabuntur quoque latera aduersorum planorum AH, BI, atque adeo & bases AH, BI, bifariam. [b] Cum igitur sit vt basis KC, ad basim CH; ita solidum AD, ad solidum CB; erit parallelepipedũ AB, sectum bifariam plano CD, per centrum G, ducto.



[a] 17. vnde.
[b] 25. vnde.

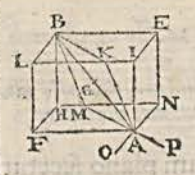
TRANSEAT secundo planum secans AIBH, per diametros BI, AH, planorum oppositorum; quoniam & sic secatur parallelipipedum per centrum G, immo per totam diametrum AB; [c] cũ AB, in plano sit parallelarum AH, BI. [d] Demonstratum autem est antea, parallelepipedum secari plano per diametros oppositorum planorum ducto bifariam.



[c] 7. vndec.
[d] 28. vnde.

TERTIO planum secans AKBM, neque sit aduersis planis parallelum, neque per diametros oppositorum planorum ductum, sed tantum per angulos A, & B, planorum AH, BI. Quoniam igitur plana parallela AH, BI, secantur plano AKBM; [e] erunt communes sectiones AM, BK,

[e] 16. vnde.



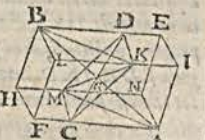
BK, parallelæ. Similiter parallelæ erunt AK, BM, cum sint communes sectiones planorum parallelorum AL, BN, factæ a plano AKBM. Quare parallelogrammum est AKBM; a ideoq; tam rectæ AK, BM, quã rectæ AM, BK, inter se erunt æquales. Quia ergo latera BK, BL, triãguli BKL, æqualia sunt lateribus AM, AN, triãguli AMN; & angulus KBL, angulo MAN, æqualis. (Productis enim NA, MA, ad O, P, erunt AO, AP, rectis BL, BK, parallelæ; b ac proinde æquales anguli erunt OAP, LBK. c Cum igitur OAP, æqualis sit angulo MAN; æquales quoque erunt anguli KBL, MAN.) d Erunt bases KL, MN, inter se, & anguli BKL, BLK, angulis AMN, ANM, æquales; & triangulum triangulo æquale. Quare & similia erunt triangula BKL, AMN, e cum latera habeant circa æquos angulos proportionalia. Quoniã vero rectæ KL, MN; & angulus BKL, angulo AMN; & angulus KBL, angulo MAN, est æqualis, vt ostendimus; erit & reliqua IK, reliquæ HM; & reliquus angulus BKI, reliquo AMH; & reliquus KBE, reliquo MAF, æqualis. (Est enim tota LI, toti NH, æqualis, & tam anguli BKL, BKI, quam anguli AMN, AMH, duobus rectis æquales; & totus angulus LBE, toti angulo NAF, æqualis, ob similitudinẽ parallelogrammorum LE, FN.) Sunt autem & latera BE, EI, lateribus AF, FH, æqualia; & anguli BEI, EIK, anguli AFH, FHM, ob parallelogramma LE, FN. Igitur quadrilaterum BKIE, & æquilaterum, & æquiangulum est quadrilatero AMHF; Ac propterea æquale & simile, cum singula singulis conueniant, latera nimirum lateribus, & anguli angulis. Eodem modo æqualia erunt & similia triangula BHM, AIK; & quadrilatera AKLF, BMNE; cum inter se sint & æquilatera & æquiangula. Quapropter solidum contentum planis AKLF, FHMA, AKBM, MHB, BKLBHF, æquale erit solido contento planis BMNE, EIKB, BMAK, KIA, AMN, NAIE, per 10. defin. huius libri, cum his planis illa sint similia & æqualia, vt demonstratum est. Parallelepipedum ergo AB, sectum est plano AKBM, per centrum G, bifariam. po-

a 34. primi

b 10. unde.
c 15. primi
d 4. primi

e 4. sexti

POSTREMO planum secans CD, neque aduersis planis parallelum sit, neque per diametros planorum oppositorum, neque per vllos angulos eorum ductum, sed vtcunque secet plana opposita AHBI. Ostendemus autem, vt prius, planum secans CD, esse parallelogrammum,



& tam rectas CK, DM, quã rectas CM, DK, esse æquales. Ducantur in parallelogrammo CD, diametri CD, KM; cõnectanturq; rectæ AM, BK, quæ parallelæ erunt, cum sint communes sectiones planorum parallelorum AH, BI, factæ a plano per rectas AB, KM, ducto. Quoniam igitur AF, BE, parallelæ ipsi LI, ob parallelogramma AL, LE, b inter se sunt parallelæ; c Erunt AB, CD, in eodem cum illis plano; ac propterea se mutuo secabunt in cẽtro G. In solo enim centro G, rectæ AB, per hypothesim, secat planum CD, in quo existit recta CD. Simili argumento, cũ AM, BK, sint ostensæ parallelæ; erunt AB, MK, in eodem cum illis plano, seque mutuo secabunt in centro G. Quare diametri CD, KM, per centrum G, transibunt, ibique se mutuo secabunt; atque adeo bifariam, per ea, quæ ad propos. 34. lib. 1. ostẽdimus. Quia ergo latera BG, GD, trianguli BGD, æqualia sunt lateribus AG, GC, trianguli AGC; d & angulus BGD, æqualis angulo AGC; e Erit & basis BD, æqualis basi AC. Eodem argumento æquales erunt rectæ BK, AM. Quocirca cum tria latera BD, DK, KB, trianguli BDK, æqualia sint tribus lateribus AC, CM, MA, triãguli ACM; Erunt, per ea, quæ ad propos. 8. lib. 1. docuimus, anguli illius angulis huius æquales: Est autem totus DBL, toti CAN, æqualis, ob similitudinem parallelogrammorum BI, AH. Igitur & reliquus KBL, reliquo MAN, erit æqualis. Quoniã igitur latera BK, BL, trianguli BKL, æqualia sunt lateribus AM, AN, trianguli AMN; & angulus KBL, angulo MAN, æqualis; f Erit & basis KL, basi MN; & reliqui anguli reliquis angulis æquales. Si igitur æqualibus angulis BKL, AMN, æquales addantur anguli BKD, AMC, fient toti anguli DKL, CMN, æquales. Quare quadrilaterum BDKL, quadrilatere ACMN, & æquilaterum est, & æquiangulum; Ac propterea æquale & simile, cum singula conne-

a 16. unde.

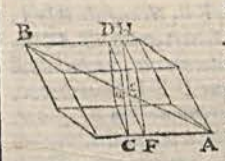
b 9. undec.
c 7. undec.

d 15. primi
e 4. primi

f 4. primi

conueniant singulis, nempe latera lateribus, & anguli angulis. Rursus quia tota LI, toti NH, est æqualis, erit & reliqua IK, reliquæ HM, æqualis. Eademque ratione reliqua DE, reliquæ CF, æqualis erit; Ac propterea quadrilaterũ DEIK, æquilaterum est quadrilatero CFHM: Sed & æquiangulum; cum anguli DEI, EIK, æquales sint angulis CFH, FHM, propter similitudinem parallelogrammorum BI, AH; & anguli EDK, IKD, angulis FCM, HMC, æquales, quod æquales ostensi sint eorum anguli alterni LKD, BDK, angulis NMC, ACM. Igitur quadrilatera DEIK, CFHM, æqualia sunt & similia. Non aliter ostendemus, æqualia esse & similia quadrilatera ACKI, BDMH; Item DENM, CFLK, cum & latera lateribus, & anguli angulis conueniant, vt perspicuum est. Quamobrem solidum contentum planis CKLF, FHMC, CKDM, MHBD, DKLB, BHFL, per 10. defin. huius lib. æquale est solido contento planis DMNE, EIKD, DMCK, KIAC, CMNA, AIEN; cum hisce illa sint demonstrata & æqualia & similia. Parallelepipedum igitur AB, sectum est per centrum G, plano CD, bifariam.

SED secatur iam parallelepipedum AB, plano CD, bifariam. Dico planum CD, per centrum parallelepipedi transire, hoc est, punctum G, in quo planum CD, secat diametrum AB, diuidere diametrum AB, bifariam. Si enim diametrum AB, in G, non diuiditur bifariam, diuidatur bifariam in E, vt sit E, centrum parallelepipedi. Si igitur per E, ducatur planum FH, plano CD, parallelum, secabitur parallelepipedum AB, bifariã plano FH, vt demonstratum est. Ponitur autem & bifariam secari plano CD; Igitur solida CB, FB, cum sint dimidia parallelepipedi AB, inter se æqualia sunt, pars & totum. Quod est absurdũ.



Non ergo aliud punctum, præter G, diuidet diametrum AB, bifariam; Ac proinde G, centrum erit parallelepipedi.

Quod demonstrandum erat.

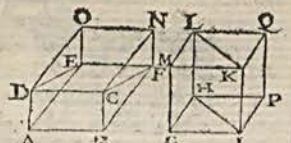
51

THEOR. 35. PROPOS. 40.

41.

SI fuerint duo prismata æqualis altitudinis, quorum hoc quidem habeat basin, parallelogrammum; illud vero, triãgulum; duplum autem fuerit parallelogrammum trianguli: Aequalia erunt ipsa prismata.

SINT duo prismata æqualis altitudinis ABCDEF, GHIKLM, quorum illud basim habeat parallelogrammum ABCD, hoc vero, triangulum GHI; sitque parallelogrammum AC, trianguli GHI, duplum. Dico hæc prismata esse æqualia. Perficiantur enim parallelepipeda AN. GQ; Quod quidem fiet, si plana triangulorum extendantur, perficianturq; parallelogramma BN, AO; GP, MQ. Si enim connectantur rectæ NO, PQ, constituta erunt duo parallelepipeda AN, GQ, eiusdem altitudinis cum prismatis. Nam plana horum solidorum opposita esse parallela, facile colligetur ex propos. 15. huius lib.



[a] Quoniam igitur parallelogrammum GP, duplum est trianguli GHI; Ponitur autem & parallelogrammum AC, eiusdem trianguli GHI, duplum: æqualia erunt parallelogramma AC, GP. [b] Quare parallelepipida AN, GQ, eiusdem altitudinis super æquales bases AC, GP, inter se sunt æqualia; Atque propterea eorum dimidia, nimirum prismata ABCDEF, GHIKLM, ([c] Nã parallelepipeda AN, GQ, per diametros CF, DE, HI, LK, planorum aduersorum secantur bifariam, in bina scilicet prismata) æqualia quoque sunt inter se. Itaque si fuerint duo prismata æqualis altitudinis, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 34. primi

[b] 31. vnde.

[c] 32. vnde.

PER

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem est ex demonstratione, propo positionem hanc intelligi de illis duntaxat prismatis, quæ duo triangula habent opposita; cum imperet parallelepipeda complere; quod fieri non posset, si prisma super parallelogrammum ABCD, constitutum non haberet duo triangula, nempe ADE, BCF. Esset enim iam parallelepipedum completum.

FINIS ELEMENTI VNDECIMI.

EVCLI-

EVCLIDIS

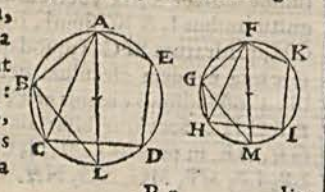
ELEMENTVM DVODECIMVM.

Et Solidorum secundum.

THEOR. 1. PROPOS. 1. 1.

QVAE in circulis polygona similia; inter se sunt, vt a diametris quadrata.

SINT duo polygona similia ABCDE, FGHIK, descripta in circulis, quorũ diametri AL, FM. Dico ita esse polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK, vt quadratum diametri AL, ad quadratum diametri FM. Subtendantur enim angulis æqualibus *ABC*, FGH, rectæ AC, FH, & cõnectantur rectæ BL, GM. Quoniam igitur ob similitudinem polygonorum est vt AB, ad BC, ita FG, ad GH; [a] erunt triangula ABC, FGH, æquiangula, cum circa angulos æquales *ABC*, FGH, habeant latera proportionalia: [b] Est autẽ angulus ALB, angulo ACB; & angulus FMG, angulo FHG, æqua-



[a] 6. sexti

[b] 21. tertij.

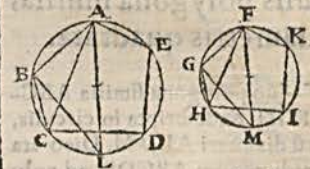
lis. Igitur & anguli ALB, FMG, æquales erunt. Cũ ergo & anguli ABL, FGM, æquales sint, [a] nempe recti in semicirculis existentes, [b] erunt & reliqui BAL, GFM, æquales. [c] Quare erit vt AL, ad AB, ita FM, ad FG; & permutando, vt AL, ad FM, ita AB, ad FG. [d] Igitur est vt quadratum ex AL, ad quadratum ex FM, ita polygonum ABCDE, super AB, ad polygonum FGHIK, super FG; cum tam quadrata, quam polygona sint figuræ similes, similiterque descriptæ. Quæ itaque in circulis polygona similia; inter se sunt, vt a diametris quadrata. Quod erat demonstrandum.

[a] 31. tertij
[b] 32. primi
[c] 4. sexti.
[d] 22. sexti

2. THEOR. 2. PROPOS. 2

CIRCVLI inter se sunt, quemadmodum a diametris quadrata.

SINT duo circuli ABCD, EFGH, quorum diametri AC, EG. Dico esse, vt quadratum diametri AC, ad quadratũ diametri EG, ita circulum ABCD, ad circulũ EFGH. Si enim res non ita se habet; Sit vt quadratum diametri AC, ad quadratũ diametri EG, ita circulus ABCD, ad aliquam magnitudinem, nempe ad I, quæ vel minor erit, vel maior circulo EFGK. Si enim esset æqualis, [e] haberet circulus ABCD, ad circulum EFGH, & ad I, eandem proportionem; ac propterea esset circulus ABCD, ad circulum EFGH, vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, quod non conceditur. Sit ergo primum I, minor, quam circulus EFGH, magnitudine scilicet K, ita vt circulus EFGH, æqualis sit magnitudinibus I, & K, simul. Inscribatur in circulo EFGH, quadratum EFGH; quod quia dimidium est quadrati circa eundem circulum descripti, vt ad propos. 2. lib. 4. ostendimus, maius erit, quam dimidium circuli EFGH. Secentur bifariam peripheriæ EF, FG, GH, HE, in punctis L, M, N, O, adiunganturque rectæ LE, LF, MF, MG, NG, NH, OH, OE. Ducatur per L, recta



[e] 7. quinti.

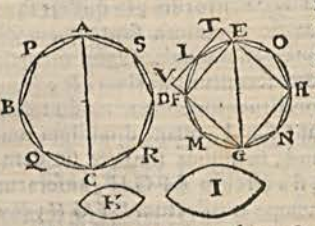
L, recta TV, tangens circulum in L, quæ parallela erit ipsi EF, vt ad propos. 27. lib. 3. ostendimus, occurratq; rectis HE, GF, productis in T, & V. Quia ergo triangulum ELF, dimidium est parallelogrammi TEFV; maius erit triangulum ELF, quam dimidium segmenti circuli ELF. Eadem ratione erunt reliqua triangula maiora, quam dimidia segmentorum, in quibus sunt. Omnia igitur triangula simul maiora sunt, quam dimidium omnium segmentorum simul. Quod si rursus peripheriæ EL, LF, &c. secentur bifariam, & adiungantur rectæ lineæ, constituentur eodem modo triangula, quæ maiora erunt simul, quam dimidium omnium segmentorum simul, in quibus sunt; & sic deinceps. Quoniam vero, si a circulo EFGH, auferatur plus quam dimidium, nempe quadratum EFGH; & a reliquis segmentis plus quam dimidium, nempe triangula ELF, FMG, &c. atque in hunc modum semper fiat detractio; [b] relinquitur tandem minor magnitudo, quam K, excessus inter circulum EFGH, & magnitudinem I. Sint iam circuli segmenta relicta EL, LF, FM, &c. simul sumpta minora, quam magnitudo K. Cum igitur circulus EFGH, æqualis ponatur magnitudinibus I, & K, simul; si ex circulo detrahantur dicta segmenta, & ex I, & K, ipsa magnitudo K, quæ maior est præfatis circuli segmentis; erit reliquum polygonum ELFMGNHO, maius reliqua magnitudine I. Inscribatur in circulo ABCD, polygonum APBQCRDS, simile polygono ELFMGNHO. Quod quidem facile fiet, si semicirculi ABC, ADC, bifariam secentur in B, & D; & rursus circũferentiæ AB, BC, CD, DA, bifariã in P, Q, R, S; & sic deinceps, donec in tot partes æquales diuisa sit circumferentia ABCD, in quot distributa est circumferentia EFGH. Nam iunctis rectis AP, PB, BQ, &c. erit figura inscripta similis figuræ ELFMGNHO, vt patet. [c] Quoniam igitur est polygonum APBQCRDS, ad polygonum ELFMGNHO, vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EH, hoc est, per hypothesim, vt circulus ABCD, ad I: Est autem polygonũ APBQCRDS, minus circulo

[b] 1. decimi

[c] 1. duodec.

[a] 14. quin. ABCD. a Igitur & polygonum ELFMGNHO, minus erit quam I. Ostensum autem est & maius. Quod est absurdum. Non igitur minor est magnitudo I, circulo EFGH.

QVAMQVAM autem in figura confertur maior circulus cum minore; eodem tamen modo demõstrabimus, minorem circulum EFGH, non posse ad magnitudinem, quæ minor sit, quàm maior circulus ABCD, habere eandem proportionẽ, quã habet quadratum diametri minoris EG, ad quadratum maioris diametri AC; Ita vt generaliter & uniuersè demonstratum sit, nunquam quadratũ diametri alicuius circuli ad quadratum diametri alterius circuli eandem habere posse proportionem, quam habet prior circulus ad magnitudinem posteriore circulo minorem: siue prior circulus maior sit posteriore, siue minor.



SIT deinde magnitudo I, maior circulo EFGH. Cũ ergo ponatur circulus ABCD, ad I, esse vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG; erit & conuertendo I, ad circulum ABCD, vt quadratum diametri EG, ad quadratum diametri AC. Ponatur vt I, ad circulum ABCD, ita circulus EFGH, ad magnitudinẽ aliquam, nempe ad K. Et quia I, maior ponitur circulo EFGH, [b] maior quoque erit circulus ABCD, magnitudine K. Quare erit vt quadratum diametri EG, ad quadratum diametri AC, ita circulus EFGH, ad magnitudinem K, quæ minor est circulo ABCD. Quod est absurdũ. Ostensum enim est iam in priori parte generaliter, non posse esse vt quadratum diametri ad quadratum diametri, ita circulum ad magnitudinem circulo minorem: siue prior circulus maior sit posteriore, siue minor. Quamuis autẽ circulus ABCD, maior est, & EFGH, minor; eadem tamen ratione ostendemus, quadratum diametri circuli EFGH, ad quadratũ diametri circuli, ABCD, nõ posse habere

[b] 14. quinti

eandem proportionem, quam habet circulus EFGH, ad magnitudinem circulo ABCD, maiorem: quia eodem modo probabimus, (si illud concedatur) quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, eandem habere proportionem, quam habet circulus ABCD, ad magnitudinem circulo EFGH, minorem. quod falsum esse iam in priori parte generaliter demonstratum est: Ita vt generaliter & vniuersè quoque demonstratum sit, nunquam quadratum diametri alicuius circuli ad quadratum diametri alterius circuli eandem habere posse proportionem, quam habet prior circulus ad magnitudinem posteriore circulo maiorem: siue prior circulus maior sit posteriore, siue minor. Non ergo maior est magnitudo I, circulo EFGH: Sed neque minor est ostensa. æqualis igitur est. Quare cum ponatur, vt quadratũ diametri AC, ad quadratũ diametri EG, ita circulus ABCD, ad I; sit autẽ vt circulus ABCD, ad I, ita idẽ circulus ABCD, ad circulum EFGH, qui æqualis est magnitudini I; Erit quoque vt quadratũ diametri AC, ad quadratum diametri EG, ita circulus ABCD, ad circulum EFGH, siue circulus ABCD, circulo EFGH, maior sit, siue minor. Circuli igitur inter se sunt, quemadmodum a diametris quadrata. Quod erat ostendendum. [a] 17. quinti

COROLLARIVM.

HINC fit, ita esse circulum ad circulum, vt polygonum in illo descriptum ad polygonum simile in hoc descriptũ. Quoniam tam circulus ad circulum, quam polygonum ad polygonum est, vt quadratum diametri ad quadratũ diametri, veluti demonstratum est.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

OMNIS pyramis triangularem habens basim, diuiditur in duas pyramides æquales, & similes inter se, triangulares 3.

gulares habentes baſes, & ſimiles toti; Et in duo priſmata æqualia, quæ duo priſmata maiora ſunt dimidio totius pyramidis.

SIT pyramis, cuius baſis triangulum ABC, vertex D. Secentur omnia eius latera bifariã in E, F, G, H, I, K, connectanturque rectæ EF, FG, GE, HI, IK, KH, HE, EI, IF. Diuiſa itaque eſt pyramis in duas pyramides AEGH, HIKD, quarum baſes triangula AEG, HIK, & vertices H, D; nec non in duo ſolida EBFGHI, CFGHIK, quæ mox oſtendemus eſſe priſmata, quorum illius baſis eſt parallelogrammũ EBFG, & triangula oppoſita EHG, BIF; huius uero baſis eſt triangulum CFG, cui opponitur triangulum KIH, habentque hæc priſmata terminum communem, parallelogrammum FGHI; & cum duabus illis pyramidibus componunt totam pyramidem, vt conſtat, ſi recte concipiatur pyramidis vertex D, in ſublimi, necnon eius triangula circumiacentia. Dico igitur duas illas pyramides eſſe æquales, & ſimiles inter ſe, & ſimiles toti; item duo hæc priſmata eſſe inter ſe æqualia, & maiora dimidio totius pyramidis. Cum enim latera AD, BD, trianguli ADB, ſecta ſint bifariam, ac proinde proportionaliter; [a] erunt HI, AB, parallelæ. Eadem ratione parallelæ erunt IK, BC; & HK, AC; & EG, BC; & EF, AC; & FG, AB; & EH, BD; & EI, AD; & IF, DC; & HG, DC. [b] Sunt autẽ & rectæ FG, HI, cum parallelæ ſint ipſi AB, inter ſe parallelæ; Atque eadem ratione parallelæ ſunt GH, FI, cũ ſint parallelæ ipſi DC. Quare parallelogramma ſunt AEIH, HEBI, IDHE, EBFG, GHKC, CKIF, FGHI. Quoniam vero rectæ HE, HG, rectis DB, DC, ſunt parallelæ; [c] erũt anguli EHG, BDC, æquales: Ac eadẽ ratione æquales erũt anguli HEG, DBC; & HGE, DCB. [d] Proportionalia igitur ſunt latera trianguli HEG, lateribus trianguli DBC, circa æquales angulos; ac proinde ſimile eſt triangulum HEG, triangulo DBC. Sunt autem & triangula HAE, HAG, AEG, triangulis DAB, DAC, ABC, ſimilia per coroll. propo. 4. lib. 6. Pyramis ergo AEGH. pyramidi ABCD, ſimilis eſt, per defin. 9. huius lib. Rurſus quia rectæ HI, HK, rectis AB, AC, ſunt parallelæ; [a] erunt anguli IHK, BAC, æquales. Eadẽ ratione æquales erunt anguli HIK, ABC; & HKI, ACB. [b] Quare latera trianguli HIK, lateribus triãguli ABC, circa æquales angulos ſunt proportionalia; ac propterea triangulum HIK, triangulo ABC, ſimile eſt: Sunt autem & triãgula DHI, DIK, DKH, triangulis DAB, DBC, DCA, ſimilia, per idem coroll. propoſ. 4. lib. 6. Pyramis ergo HIKD, ſimilis eſt quoque eidem pyramidi ABCD, per defin. 9. huius lib. Quoniam autẽ triangula AHE, HDI, ſimilia ſunt triangulo ADB, vt oſtenſum eſt ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. [c] ipſa quoque inter ſe ſimilia erunt. Cum igitur ſint ſuper rectas æquales AH, HD, conſtituta; ipſa erunt æqualia, per lemma propoſ. 22. lib. 6. Simili argumento æqualia erunt & ſimilia triangula AHG, HDK, cum ſimilia ſint oſtenſa triangulo ADC, & conſtituta ſuper æquales rectas AH, HD. Pari ratione æqualia, & ſimilia erunt triangula AEG, HIK, cũ ſimilia ſint oſtenſa triangulo ABC, & ſuper rectas poſita AF, HI, [d] quæ æquales ſunt, ob parallelogrammum AEIH. Non ſecus æqualia erunt & ſimilia triangula EHG, IDK, cum ſint oſtenſa ſimilia triangulo BDC, & habeant rectas HE, DI, quæ æquales ſunt, ob parallelogrammum HEID. Pyramides igitur AEGH, HIKD, æquales ſunt & ſimiles, per 10. defin. huius lib. quandoquidem omnia triangula vnius æqualia ſunt & ſimilia omnibus triangulis alterius, vt demonſtratum eſt.

RVRSVS, [e] quia rectæ EH, HG, GE, æquales ſunt, & parallelæ rectis BI, IF, FB, ob parallelogramma EHIB, FGHI, BFGE; erunt triangula EHG, BIF, æquiangula inter ſe, & æqualia, per coroll. propoſit. 8. lib. 1. Ac propterea & ſimilia: [g] Sunt autem & parallela; cum EH, HG, per quas ducitur planum EHG, parallelæ ſint rectis BI, IF, per quas planum BIF, ducitur. Igitur ſolidum BIFGHE, contentũ duobus triãgulis EHG, BIF,

a 2. ſexti. b 9. vnde. c 10. vnde. d 4. ſexti.

a 10. vnde. b 4. ſexti. c 21. ſexti. d 34 primi. e 34. primi 34. primi. g 15. vnde.

ex aduerſo æqualibus & ſimilibus, & parallelis; & tribus parallelogrammis EGFB, BEHI, IFGH, priſma eſt, ex definitione. Eodem modo priſma oſtendetur ſolidum CFGHIK. [a] Cum enim rectæ FC, CG, GF, æquales ſint, & parallelæ rectis IK, KH, HI, ob parallelogramma CFIK, CGHK, FGHI; erunt triangula CFG, HIK, æqualia, & æquiangula inter ſe, ac propterea ſimilia: [b] Sunt autem & parallela, quod rectę CF, CG, per quas ducitur planum CFG, parallelæ ſint rectis KI, KH, per quas planum KIH, ducitur. Igitur ſolidum CFGHIK, contentum duobus triangulis CFG, KIH, ex aduerſo æqualibus & ſimilibus, & parallelis; atque tribus parallelogrammis CFIK, KHGC, IFGH, priſma eſt. Quoniam vero priſmata EBFGHI, CFGHIK, ſunt eiuſdem altitudinis, nempe inter plana parallela BCGE, HIK; & parallelogrammum EBFG, baſis illius, duplum eſt trianguli CFG, baſis huius, per ſcholium propoſ. 41. lib. 1. [c] Ipſa inter ſe æqualia erunt.

[a] 34. primi

[b] 15. unde.

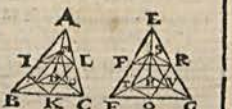
[c] 40. unde.

DENIQVE quia priſma EBFGHI, maius eſt pyramide EBFI, totum parte; Eſt autem pyramis EBFI, æqualis & ſimilis pyramidi AEGH, necnõ pyramidi HIKD, vt perſpicuum eſt ex æqualitate & ſimilitudine triangulorum: Maiora erunt priſmata EBFGHI, CFGHIK, pyramidibus AEGH, HIKD. Ac proinde illa quidem dimidium pyramidis ABCD, excedent, hæ vero a dimidio eiuſdem deficient. Quando enim totum in duas partes inæquales ſecatur, maior dimidium eius ſuperat, minor vero a dimidio deficit. Omnis igitur pyramis triangularem habens baſin, &c. Quod erat oſtendendum.

4. THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI fuerint duæ pyramides eiuſdem altitudinis, triangulares habentes baſes; ſit autem illarum vtraq; diuiſa & in duas pyramidas æquales inter ſe, & ſimiles toti; & in duo priſmata æqualia; Ac eodem modo diuiſa ſit vtraq; pyramidum, quæ ex ſuperiore diuiſione natæ ſunt, idque ſemper fiat; erit vt vnius pyramidis baſis ad alterius pyramidis baſim, ita et omnia, quæ in vna pyramide, priſmata ad omnia, quæ in altera pyramide, priſmata multitudine æqualia.

SINT duæ pyramides ABCD, EFGH, eiuſdem altitudinis, quarum latera biſariam diuidantur in punctis I, K, L, M, N, O; P, Q, R, S, T, V, connectanturque rectæ IL, LK, KN, NO, OM, MN, LM, MI; PR, RQ, QT, TV, VS, ST, RS, SP, ita vt pyramis vtraque ſecta ſit in binas pyramides æquales inter ſe, & ſimiles toti, nimirũ in AILM, MNOD; EPRS, STVH; & in bina priſmata æqualia IBKLMN, CKLMNO, PFQRST; GQRSTV; vt vult propoſitio præcedens: eodemque modo intelligãtur eſſe diuiſæ pyramides factæ AILM, MNOD; EPRS, STVH; & ſic deinceps. Dico ita eſſe omnia priſmata facta in pyramide ABCD, ad omnia priſmata generata in pyramide EFGH, illis multitudine æqualia, vt eſt baſis ABC, ad baſin EFG. Cum enim ſit vt BG, ad CK, ita FG, ad GQ, eo quod vtraq; linea diuiſa eſt biſariam; ſint autem triangula ABC, LKC, ſimilia ſimiliterque poſita; Item triangula EFG, RQG, ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. [a] Erit quoque vt triangulum ABC, ad triangulum LKC, ita triangulũ EFG, ad triangulum RQG. Et permutãdo, vt ABC, ad EFG, ita LKC, ad RQG. Vt autem LKC, ad RQG, ita eſt priſma CKLMNO, ad priſma GQRSTV, vt mox oſtendemus, atque adeo ita priſma IBKLMN, ad priſma PFQRST, cum hæc illis ſint æqualia: Et vt vnum priſma, videlicet



[a] 22. ſexti.

delicet IBKLMN, ad vnum prisma PFQRST.[a] ita sunt duo prismata IBKLMN, CKLMNO, ad duo prismata PFQRST, GQRSTV. Igitur erũt quoq;, vt basis ABC, ad basin EFG, ita duo prismata in pyramide ABCD, ad duo prismata in pyramide EFGH. Simili argumento ostendemus, ita esse bina prismata in pyramidibus AILM, MNOD, factis in pyramide ABCD, ad bina prismata in pyramidibus EPRS, STVH, factis in pyramide EFGH, vt sunt bases AIL, MNO, illarum pyramidum ad bases EPR, STV, harum pyramidum; & sic deinceps eadem semper facta diuisione. Sed vt illæ bases ad has, ita est LKC, basis quæ illis est æqualis & similis, ad basin RQS, quæ his est æqualis, & similis, vt in præcedẽti est demonstratum, hoc est, ita est basis ABC, ad basin EFG. Igitur erũt quoq;, vt basis ABC, ad basin EFG, ita prismata cuiuslibet pyramidis factæ in pyramide ABCD, ad prismata cuiuslibet pyramidis factę in pyramide EFGH: Ac propterea erunt quoque, vt prismata pyramidis ABCD, ad prismata pyramidis EFGH, ita prismata tam pyramidis AILM, ad prismata pyramidis EPRS, quam prismata pyramidis MNOD, ad prismata pyramidis STVH; & ita deinceps, Quare cũ sint, vt duo prismata pyramidis ABCD, ad duo prismata pyramidis EFGH, [b] ita omnia prismata in pyramidibus ABCD, AILM, MNOD &c. simul ad omnia prismata in pyramidibus EFGH, EPRS, STVH, &c. simul, si hæc illis multitudine sint æqualia; Erunt quoque, vt basis ABC, ad basin EFG, ita omnia prismata in pyramide ABCD, ad omnia prismata in pyramide EFGH. Quocirca si fuerint duæ pyramides eiusdem altitudinis, triangulares habentes bases, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 12. quin.

[b] 12. quin.

LEMMA.

QVOD autem sit LKC, ad RQG, ita prisma CKLMNO, ad prisma GQRSTV, ita ostẽdemus. Intelligantur ex verticibus D, H, ad bases ABC, EFG, demissæ perpendiculares, quæ erunt altitudines æquales pyramidum ABCD, EFGH. Quoniam igitur plana parallela ABC, MNO, secant duas rectas, nempe DC, & perpendicularem ex D, demissam proportionaliter; secatur autem DC, bifariam in O; secabitur quoque perpendicularis ex D, demissa bifariam in puncto, cui planum MNO, occurrit. Eadem ratione perpendicularis ex H, demissa bifariam secabitur a plano STV. Quare cum totæ perpendiculares ponantur æquales, erunt & dimidiæ, nempe prismatum altitudines, æquales; Ac proinde prismata CKLMNO, GQRSTV, cum habeant altitudines æquales, inter se erunt, vt bases LKC, RQG, per ea, quę ad propos. 34. lib. 11. demonstrauimus.

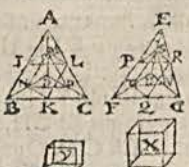
[a] 17. vnde.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

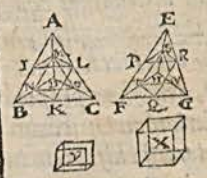
5.

SVB eadem altitudine existentes pyramides, & triangulares habentes bases; inter se sunt, vt bases.

SINT pyramides eiusdem altitudinis ABCD, EFGH, quarum bases triangula ABC, EFG. Dico esse pyramidem ad pyramidem, vt est basis ad basin. Si enim nõ ita sit, ponatur vt basis ABC, ad basin EFG, ita pyramis ABCD, ad solidum X; quod vel minus erit, vel maius pyramide EFGH. Sit primo minus, magni tudine Y. Diuidatur pyramis EFGH, in duas pyramides æquales, & duo prismata æqualia, iuxta propo. 3. huius lib. & rursus eodẽ modo factæ pyramides in pyramide EFGH, in binas pyramides æquales, & in bina prismata æqualia,



æqualia, & sic deinceps. Quoniam igitur, si a pyramide EFGH, auferatur plus quam dimidium, nempe duo prismata PFQRST, GQRSTV, quæ maiora sunt dimidio pyramidis EFGH: Item a reliquis pyramidibus EPRS, STVH, plus quam dimidium, earum scilicet prismata, & sic deinceps; [a] relinquetur tandem minor magnitudo quam Y, excessus pyramidis EFGH, supra solidum X. Sit ergo iam relicta magnitudo minor. Cum autem pyramis EFGH, æqualis ponatur solidis X, Y; erunt reliqua prismata in pyramide EFGH, maiora solido X. Diuidatur pyramis ABCD, in duas pyramides æquales, & duo prismata æqualia, & eodem modo factæ pyramides AILM, MNOD, in binas pyramides æquales, & bina prismata æqualia; Atque hoc toties fiat, quoties id factum fuit in pyramide EFGH. [c] Quoniam igitur sunt omnia prismata in pyramide ABCD, ad omnia prismata numero æqualia in pyramide EFGH, vt basis ABC, ad basin EFG, hoc est, vt pyramis ABCD, ad solidum X: Sunt autem omnia prismata in pyramide ABCD, minora, quam tota pyramis ABCD; [d] erunt quoque omnia prismata in pyramide EFGH, minora quam solidũ X. Ostensa vero sunt & maiora. Quod est absurdum. Non ergo minus est solidum X, pyramide EFGH.



SIT deinde solidum X, pyramide EFGH, maius. Quoniam igitur ponitur pyramis ABCD, ad solidum X, vt basis ABC, ad basin EFG; Erit conuertendo solidum X, ad pyramidem ABCD, vt basis EFG, ad basin ABC. Ponatur, vt solidum X, ad pyramidem ABCD, ita pyramis EFGH, ad solidum Y. Et quia solidum X, maius ponitur pyramide EFGH; [e] erit & pyramis ABCD, maior solido Y. Quare erit, vt basis EFG, ad basin ABC, ita pyramis EFGH, ad solidum Y, quod minus est pyramide ABCD. Quod est absurdum. Ostensum enim est iam, non posse esse, vt est basis ad basin, ita pyramidem ad solidum pyramide minus. Non ergo maius est solidum

[a] 3. duode.
[b] 1. deci.
[c] 4. duode.
[d] 14. quin.
[e] 14. quin.

dum X, pyramide EFGH; sed neque minus est ostensum. Igitur æquale est. Quare cum ponatur vt basis ABC, ad basin EFG, ita pyramis ABCD, ad solidum X; [a] Sit autẽ pyramis ABCD, ad solidum X, vt ad pyramidẽ EFGH, solido X, æqualem: Erit quoque vt basis ABC, ad basin EFG, ita pyramis ABCD, ad pyramidem EFGH. Sub eadem ergo altitudine existentes pyramides, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 7. quinti.

SCHOLIVM.

CONVERSO modo, si pyramides triangulares inter se sint, vt bases; ipsæ erunt sub eadem altitudine. Si enim minus altitudo maior credatur, abscindatur ab ea æqualis minori, & a puncto abscisionis ad omnes angulos basis ducantur rectæ lineæ; Eritq; vt basis ad basin, ita pyramis ad pyramidem modo constitutam: Sed sic quoque erat ad totam pyramidem. [b] Pyramis ergo constituta æqualis, erit toti pyramidi, pars toti. Quod est absurdum.

[b] 9. quinti.

COROLLARIVM.

HINC sit, pyramides eiusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases triangulares constitutas, esse inter se æquales; propterea quod eandẽ proportionem habent cum basibus, quæ æquales ponuntur, vel certe vna & eadem.

ITEM sequitur, e conuerso pyramides triangulares æquales super eandem, vel æquales bases, eandem habere altitudinem. Et pyramides triangulares æquales eandemque habentes altitudinem, bases habere æquales, si non eandem habuerint. Quæ quidem duo ex prima parte corollarij eodem argumento ostendemus, quo in conuerso propos. 30. & 31. lib. 11. demonstrando vsi sumus: si tam in altitudine, quam in basi abscissa constituatur alia pyramis, &c.

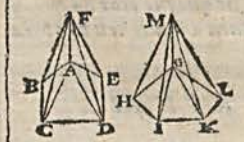
THE-

6.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

SVB eadem altitudine exiſtentes pyramides, & polygonas habentes baſes, inter ſe ſunt, vt baſes.

SINT pyramides ABCDEF, GHIKLM, quarũ baſes polygonæ ABCDE, GHIKL, latera multitudine æqualia habentes. Dico eſſe pyramidem ad pyramidem, vt eſt baſis ad baſin. Reſolutis enim baſibus in triangula numero æqualia; erit quælibet pyramis in totidem pyramides triãgulares diuiſa. [a] Quia vero eſt, vt baſis ABC, ad baſin ACD, ita pyramis ABCF, ad pyramidem ACDF; erit componendo vt baſis ABCD, ad baſin ACD, ita pyramis ABCDF, ad pyramidem ACDF: Sed rurſus eſt vt baſis ACD, ad baſin ADE, ita pyramis ACDF, ad pyramidem ADEF. Igitur ex æquo vt baſis ABCD, ad baſin ADE, ita pyramis ABCDF, ad pyramidem ADEF. Componendo ergo erit vt baſis ABCDE, ad baſin ADE, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem ADEF. Simili argumento erit vt baſis GHIKL, ad baſin GKL, ita pyramis GHIKLM, ad pyramidem GKLM; & conuertendo vt baſis GKL, ad baſin GHIKL, ita pyramis GKLM, ad pyramidẽ GHIKLM. [c] Rurſus quoniam eſt, vt baſis ADE, ad baſin GKL, ita pyramis ADEF, ad pyramidem GKLM; Erunt quatuor baſes ABCDE, ADE, GKL, GHIKL, in eiſdem proportionibus cũ quatuor pyramidibus ABCDEF, ADEF, GKLM, GHIKLM, vt in hac formula videre, manifeſtumque eſt ex demonſtratione. Quare ex æquo



a 5. duode.

b 5. duode.

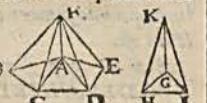
c 5. duode.

ABCDE.	ABCDEF.
ADE.	ADEF.
GKL.	GKLM.
GHIKL.	GHIKLM.

æquo, erit vt baſis ad ABCDE, baſin GHIKL, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIKLM: ac propterea, ſub eadem altitudine exiſtẽtes pyramides, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

QVAMVIS huius propoſitionis demonſtratio de illis dumtaxat pyramidibus eiuſdem altitudinis loquatur, ſecundum interpretes, quorum baſes polygonæ latera habent multitudine æqualia; facile tamen idem etiam demonſtrabimus de pyramidibus eiuſdem altitudinis, quarum vnius baſis plura continet latera, quam baſis alterius. Sint enim primũ duæ pyramides eiuſdem altitudinis ABCDEF, GHIK, quarum illius baſis ſit polygona, nempe pentagona, huius vero triangularis. Dico eſſe pyramidem ad pyramidem, vt eſt baſis ad baſin. Reſoluto enim pentagono in triangula, erit & pyramis in pyramides numero æquales diuiſa. [a] Quoniam vero eſt, vt baſis ABC, prima quantitas, ad baſin GHI, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCF, tertia quantitas, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem; & eodem modo, vt baſis ACD, quinta quantitas, ad baſin GHI, ſecundam quantitatem, ita pyramis ACDF, ſexta quantitas, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem: [b] Erit vt baſis ABCD, prima quantitas cum quinta, ad baſin GHI, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas cum ſexta, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem. Rurſus quia eſt, vt baſis ABCD, prima quantitas, ad baſin GHI, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem, vt modo eſt oſtenſum: [c] & vt baſis ADE, quinta quantitas, ad baſin GHI, ſecundam quantitatem, ita pyramis ADEF, ſexta quãtitas ad pyramidem GHIK, quartam quãtitatẽ; [d] Erit etiã baſis ABCDE, primã quantitas cum quinta, ad baſin GHI, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCDEF, tertia quãtitas cum ſexta, ad pyramidẽ GHIK,



a 5. duode.

b 24. quin.

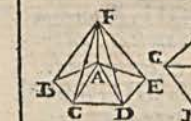
c 5. duode.

d 24. quin.

GHIK, quartam quantitatem. Quod est propositum. Eodem modo semper procedendum est, si plura fuerint triangula in basi polygona. Cum autem, vt demonstratum est, sit vt basis polygona ABCDE, ad basin triangularem GHI, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIK; Erit quoque conuertendo, vt basis GHI, ad basin ABCDE, ita pyramis GHIK, ad pyramidem ABCDEF. Quã ob rem duæ pyramides quælibet, quarũ vnius basis est polygona, alterius triangularis, suis basibus sunt proportionales, vndecunque incipias. Quamuis enim demonstratio incipiat a polygono, eiusque pyramide, vt ex demonstratione constat, tamen conuertendo licebit initium quoque sumere a triangulo, eiusque pyramide, vt dictum est.

SED iam sint duæ pyramides eiusdem altitudinis ABCDEF, GHIKL, quarum bases sint polygona, sintq; plura latera in vna base, quam in altera. Dico rursus esse pyramidem ad pyramidem, vt est basis ad basin. Resoluto enim polygono ABCDE, in triangula ABC, ACD, ADE, erit pyramis eius in totidem diuisa pyramides. Quia vero, vt iam est demonstratũ, est vt basis ABC, triangularis prima quantitas, ad basin GHIK, polygonam, secundam quantitatem; ita pyramis ABCF, tertia quantitas ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem; & vt basis ACD, quinta quantitas, ad basin GHIK, secundam quantitatem, ita pyramis ACDF, sexta quantitas, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem; [a] Erit etiam vt basis ABCD, prima quantitas cum quinta, ad basin GHIK, secundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas cum sexta, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem. Rursus quia est, vt basis ABCD, prima quantitas, ad basin GHIK, secundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem, vt proxime demonstratum est; Et est quoque, vt basis ADE, quinta quantitas, ad basin GHIK, secundam quantitatem, ita pyramis ADEF, sexta quantitas, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem, vt ante est ostensum; [a] Erit etiam vt basis ABCDE, prima quantitas cum quinta, ad basin GHIK, secundam quantitatem, ita pyramis ABCDEF, tertia quantitas cum sexta, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem. Quod est propositum. Non aliter procedendum erit, si plura triangula fuerint in basi ABCDE.

[a] 24. quin.



[a] 24. quin.

HANC autem propositionem 6. & ea, quæ in hoc scholio demonstrata sunt, conuertemus hoc modo.

PYRAMIDES quarumlibet basium, quæ inter se sunt, vt bases; eandem habent altitudinem.

QVOD non secus ostendemus, ac ea, quæ in scholio propos. 5. huius lib. diximus, ostensa sunt.

COROLLARIVM.

PERSPICVVM quoque inde efficitur, pyramides eiusdem altitudinis super æquales bases multangulas, vel eandẽ cõstitutas, esse inter se æquales; cum eandẽ habeant proportionem cum basibus, quæ æquales ponuntur, vel certe vna & eadem.

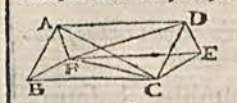
RVRSVS cõtra fit, pyramides multangulas æquales, & super æquales bases, vel super eandem constructas, eandem habere altitudinem. Et pyramides multangulas æquales, eandemque habentes altitudinem, æquales habere bases, si non habuerint eandem. Hæc autem duo demonstrabuntur, vt in coroll. propos. 5. huius lib. diximus.

THEOR. 7. PROPOS. 7. 6.

OMNE prisma triangularem habens basim, diuiditur in tres pyramides æqua

les inter se, triangulares bases habentes.

SIT prisma ABCDEF, cuius duo trianguia oppos ta, æqualia, ac similia ABF, DCE. Dico ipsum prisma se cari in tres pyramides triangulares inter se æquales. Du cantur. n. in tribus parallelogrammis tres diametri, nẽpe
[a] 34. primi AC, in ABCD; CF, in BCEF; FD, in ADEF. [a] Quoniam igitur triangula ABC, ADC, æ-
[b] 5. duode. qualia sunt; [b] est q; vt basis ABC, ad basin ADC, ita pyramis ABCF, ad pyramidem ADCF, cum



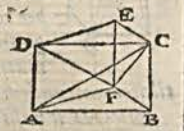
hæ pyramides eandem habeant altitudinem, nempe perpendicularem ex F, vertice ad planũ ABCD, demissam; Erunt & pyramides A B C F, ADCF, inter se æquales. Eadem ratione æquales erũt pyramides A DFC, EFDC, super æquales bases ADF, EFD, constitutę, & sub eadem altitudine, nempe perpẽdiculari a vertice C, ad planum ADEF, demissa. Est autem pyramis ADCF, eadem pyramidi ADFC, cum illa contineatur quatuor planis, nempe basi ADC, & triangulis ADF, ACF, DCF; hæc vero eisdem quatuor planis, nimirum basi ADF, & triãgulis ADC, ACF, DCF. Igitur tres pyramides ABCF, ADCF, EFDC, seu C D E F, (quæ eadem est pyramidi EFDC, cum tam EFDC, quam CDEF, contineatur planis CDE, EFD, DCF, FCE, totum prisma componẽtes, vt perspicuum est) æquales sunt inter se; Ac propterea prisma A B C D E F; in tres pyramides æquales est diuisum. Quocirca omne prisma triangularem habens basin, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

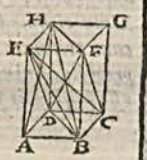
HINC colligitur, quamlibet pyramidem esse tertiam partem prismatis, quod eandem cum illa habet & basim, & altitudinem: Siue prisma quodlibet triplum esse pyramidis, qua eandem cum ipso habet & basin, & altitudinem.

SIT

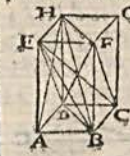
SIT enim primum pyramis ABFC, triangularem habens basin ABF; & prisma ABCDEF: sub eadem altitudine eandem habens basin triangularem ABF. Dico pyramidem esse tertiam partem prismatis. Nam si ducatur recta DF, [a] erit prisma diuisum in tres pyramides æquales ABCF, ADCF, CDEF; [a] vt demonstratum est; Ac propterea pyra- [a] 7. duode.
mis ABCF, hoc est, pyramis ABFC, (cum hæc illi sit æqualis, immo eadem, quod eisdem planis cõprehẽdatur ABF, FCA, ABC, CBF,) tertia pars erit prismatis ABCDEF. Cum igitur pyramis ABFC, æqualis sit cuicunque alteri pyramidi sub eadem altitudine, & super eãdem basin ABF, constitutæ, ex coroll. propos. 5. huius lib. manifestum est, quamlibet pyramidem esse tertiam partem prismatis, quod eandem cum illa habet basin triangularem, & altitudinem; ac propterea prisma e contrario esse pyramidis triplum.



SIT deinde pyramis ABCDE, cuius basis rectilineum quodcunque A B C D, quotlibet laterum; & prisma ABCDEFGH, sub eadem altitudine eandem habens basim. Dico rursus pyramidem esse prismatis partem tertiam. Resoluta enim basi A B C D, & plano oppositio EFGH, in triangula numero æqualia ADB, BCD; EHF, FGH; erit prisma in totidem prismata bases habentia triangulares diuisum. Ductis ergo rectis AH, BH; DF, CF; erit, vt demonstratum est, pyramis ADBH, tertia pars prismatis ABFEHD; Item pyramis BCDF, tertia pars prismatis CDHGFB. Quare erit, vt pyramis ADBH, ad prisma ABFEHD, ita pyramis BCDF, ad prisma CDHGFB; [b] Ac propterea vt una pyramis ad suum prisma, ita omnes pyramides ad omnia prismata, hoc est, ad prisma ABCDEFGH. Igitur pyramides ADBH, BCDF, simul tertiam partem constituent prismatis ABCDEFGH. Sunt autem pyramides ADBH, BCDF, æquales pyramidi ABCDE; propterea quod pyramides ADBH, ADBE, super eandem basin, & sub eadem altitudine, nimirum inter plana parallela, sunt æquales, ex coroll. [b] 12. quin.



propos. 5. huius lib. Eademque ratione æquales sunt pyramides BCDF, BCDE, super eandem basim, & sub eadem altitudine. Quapropter cum pyramides ADEF, BCDE, componant totam pyramidem ABCDE; erit & pyramis AB-



GCDE, tertia pars prismatis ABCDEFGH. Cum igitur pyramis ABCDE, æqualis sit cuncque alteri pyramidi sub eadem altitudine, & super eandem basim ABCD, constitutæ, per coroll. propos. 5. huius lib. perspicuum est, quamlibet pyramidem esse tertiam partẽ prismatis, quod eandem cum illa habet basim multilateram, eandemque altitudinem.

QVOD si basis pyramidis, ac prismatis plura habeat latera, eodem modo ostendetur, pyramidem esse prismatis partem tertiam. Nam diuisis polygonis in triangula, sectum erit prisma in totidem prismata bases habentia triangulares. Vnde singulæ pyramides triangulares horũ prismatum erunt tertiæ partes singulorum prismatum. Cum igitur omnes hæ pyramides æquales sint pyramidi basim habenti polygonum prismatis propositi, constat propositum.

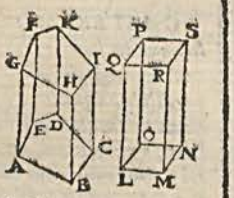
EODEM modo pyramis tertia pars est prismatis habẽtis basem basi, & altitudinem altitudini pyramidis æqualem. Nam eiusmodi pyramis æqualis est pyramidi illi, quæ eadem cum prismate habet & basem, & altitudinem, per coroll. propos. 6. huius lib. Quam quidem tam ostendimus tertiam esse prismatis partem.

SCHOLIVM. I.

EX dictis facile demonstrabimus hanc propositionem, videlicet.

SVB eadem altitudine existentia prismata, quascumque habeant bases; inter se sunt, vt bases.

QVAMVIS enim hoc demonstratum sit in lib. 11. de prismatis, quorum duo plana opposita, parallela, & æqualia, sunt triangula, licet eorũ bases sint parallelogramma, vertices vero lineæ rectæ; necnon de parallelepipedis, quæ nomine prismatum contineri diximus? Nunc tamen idipsum demonstrabimus vniuerse de omnibus prismatis, quorum duo plana aduersa, siue bases, sunt polygona, quamuis plura latera, seu anguli in vnius base reperiantur, quam in base alterius. Sint igitur duo prismata eiusdem altitudinis ABCDEFGHIK, LMNOPQRS, quorum bases sint figuræ multilateræ. Dico vt est basis ABCDE, ad basim LMNO, ita esse prisma ad prisma. Si enim ex omnibus angulis vtriusque basis ad vnum punctum superioris plani, quod basi opponitur, lineæ rectæ ducantur, consurgent duæ pyramides sub eadem altitudine cum prismatis habentes easdem bases. Ac proinde per coroll. prædictum, qualibet pyramis tertia pars erit sui prismatis. Quam ob rem erit, vt pyramis ad pyramidem, ita prisma ad prisma. Sed pyramis ad pyramidem est, vt basis ad basin, vt ostensum est propos. 6. eiusque scholio. Igitur erit quoque vt basis ad basin, ita prisma ad prisma. Quod est propositum. 15. quinti.



CONVERSO modo, si prismata quarumcunque basium inter se sint, vt bases, ipsa erunt sub eadem altitudine. Quod quidem eodem modo ostendemus, quo scholium propos. 5. demonstratum est.

COROLLARIVM. II.

VNDE prismata eiusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases quascunque, inter se sunt æqualia. Quia nimirum eandem habent proportionem, quam bases, quæ æquales ponuntur, vel certe vna & eadem.

ECONTRARIO, Prismata æqualia super æquales bases, vel eandem, in eadem sunt altitudine.

ne. Et prismata æqualia eiusdem altitudinis, bases habent æquales, si non habuerint eandem. Quod quidem non aliter ostendes, ac conuersum propos. 31. lib. 11. fuit demonstratum.

SCHOLIVM II.

CAETERVM tam ea, quæ in priori corollario, quam illa, quæ in scholio proximo demonstrata sunt, intelliguntur tantummodo de prismatis, quæ in vertice habent plana basi parallela, æqualia, & similia. Quod dixerim, ne hallucineris in prismate constante duobus triangulis parallelis, æqualibus, & similibus, & tribus parallelogrammis, quod videlicet Campanus cum alijs putat tantummodo prisma dici ab Euclide, vt in defin. prismatis diximus. Nam si in huiusmodi prismate intelligatur quidem basis vnum illorum triangulorum, erit necessario pyramis eiusdem altitudinis, eandemque habens basim, tertia paris ipsius prismatis, vt in corollario 1. demõstratum est. Item ipsum prisma ad quodlibet aliud prisma proportionem habebit, quam basis ad basin, vt in scholio ostendimus. At vero si in prismate tali basis cõcipiatur vnũ parallelogrãmorum, ita vt in vertice sit linea recta, non erit pyramis eandem habens basim, eandemque altitudinem, tertia eius pars, sed dua tertiæ partes, hoc est, prisma ad pyramidem proportionem habebit sesquialteram, quam videlicet habent 3. ad 2. Si enim huic prismati addatur aliud æquale & simile, vt parallelepipedum efficiatur, erit pyramis tertia pars constituti parallelepipedi, ex corollario præcedente, cum parallelepipedum sit prisma eandem & altitudinem, & basin habens cum pyramide. Quare si pyramis pernatur 2. erit parallelepipedum 6. Ablato ergo dimidio, erit reliquum prisma propositum 3. Ac propterea ad pyramidem proportionem habebit, quam 3. ad 2. nimirum sesquialteram. Ex quo efficitur, pyramidem super dimidium parallelogrammum constitutam, quæ eandem cum tali prismate habeat altitudinem, cum sit dimidium prioris pyramidis, esse tertiã partem prismatis. Qua cum ita sint, non habebit tale prisma ita constitutum ad aliud prisma eiusdem altitudinis, eandem proportionem, quam basis ad basin, nisi hoc aliud prisma in

vertice lineam rectam habeat quoque, & basin parallelogrammum. Itaque ea, quæ ostendimus in scholio, intelligenda sunt de prismatis eiusdem altitudinis, quorũ vertices vel linea recta sunt, & bases parallelogramma, vel certe, quæ in verticibus plana habeant basibus parallela, æqualia atque similia. Hac enim ratione, si vertices prismatum fuerint linea recta, erunt pyramides in eisdem basibus, eiusdemque altitudinis, dua tertia partes prismatum, vt modo demonstrauimus. Quare eandem habebunt rationẽ, quam prismata, &c.

THEOR. 8. PROPOS. 8. 8.

SIMILES pyramides, quæ triangulares habent bases, in triplicatã sunt homologorum laterum ratione.

SINT pyramides similes triangulares ABCD, EFGH, ita vt bases ABC, EFG, sint similes, & reliqua triangula vnius similia reliquis triãgulis alterius. Dico, pportionẽ pyramidũ esse triplicatam proportionis, quam habent latera homologa, nempe BC, FG. Extendantur enim plana triangulorum ABC, CBD, DAB, perficianturq; parallelogramma BI, BK, BL. Deinde ducantur LM, IM, rectis AI, AL, parallelæ & æquales, cõuenientes in M, connectaturque recta KM. Erit igitur cõpletũ parallelepipedum BM, eiusdem cum pyramide altitudinis; cũ plana solidi BM, sint parallela, vt facile colligitur ex propos. 15. lib. 11. Rursus eodẽ modo perficiatur parallelepipedũ FQ. Quoniã igitur ob similitudinẽ pyramidũ, anguli plani ABC, EFG, sunt æquales, estq; vt AB, ad BC, ita EF, ad FG; erunt parallelogramma BI, FN, simlia. Eodẽ modo cũ anguli ABD, EFH, sint æquales, sitq; vt AB, ad BD, ita EF, ad FH; Itẽ anguli DBC, HFG, æquales, & vt DB, ad BC, ita HF, ad FG; erũt & parallelogramma BL, BK, parallelogrãmis FP, FO, similia. [a] Sed tam tria BI, BK, BL, parallelepi-

[a] 24. vnde.

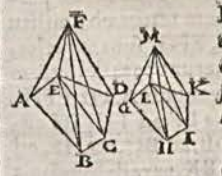
pedi BM, reliquis tribus oppositis DM, AM, CM; quam tria FN, FO, FP, parallelepipedi FQ, reliquis oppositis tribus HQ, EQ, GQ, sunt æqualia, & similia. Igitur sex plana circumscribentia solidum BM, similia sunt sex planis solidum FQ, ambientibus; Ac propterea ex defin. 9. lib. 11. similia sunt pallelepipeda BM, FQ. Quoniam vero ductis rectis LI, PN, [b] prismata DBCILA, HFGNPE, habēt eandē proportionē, quam parallelepipeda BM, FQ, eorum dupla; & pyramides ABCD, EFGH, eandem, quam prismata dicta, earum tripla; [c] habebunt quoque pyramides eandem proportionem, quam parallelepipeda. [d] Cum igitur proportio parallelepipedi BM, ad parallelepipedum FQ, sit triplicata proportionis homologorum laterum BC, FG; erit quoque proportio pyramidis ABCD, ad pyramidem EFGH, proportionis BC, ad FG, triplicata. Similes itaque pyramides, quæ triangulares habent bases, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 24. vnde.
[b] 15. quinti
[c] 11. quin.
[d] 33. unde.

COROLLARIVM.

EX hoc quoque est manifestum, similes pyramides, quarum bases plura latera, quam tria, continent, habere proportionem homologorum laterum triplicatam.

SINT pyramides similes, quarum bases rectilinea similia plurium laterum ABCDE, GHIKL. Dico proportionem pyramidum esse triplicatam proportionis, quam habent latera homologa AB, GH. Nam si ex angulis E, L, ducantur ad angulos oppositos rectæ EB, EC; LH, LI, [e] diuisæ erunt bases similes in triangula numero æqualia, & similia; nimirum triangula ABE, EBC, CDE, similia erunt triangulis



[e] 20. sexti

triangulis GHL, LKI, IKL. Quoniam ergo ob pyramidum similitudinem, triangula AEF, GLM, similia sunt, & angulus FEA, angulo MLG, æqualis; erit vt FE, ad EA, ita ML, ad LG: Vt autem EA, ad EB, ita LG, ad LH, propter similitudinem triangulorum AEB, GLH. Igitur ex æquo erit, vt FE, ad EB, ita ML, ad LH. Rursus quia est vt EB, ad BA, ita LH, ad HG, ob triāgula similia ABE, GHL; Et vt BA, ad BF, ita HG, ad HM, cum ob pyramidum similitudinem similia sint triangula ABF, GHM: Erit quoque ex æquo, vt EB, ad BF, ita LH, ad HM; Ac propterea cum sit, vt FE, ad EB, ita ML, ad LH; & vt EB, ad BF, ita LH, ad HM; erit etiam ex æquo, vt FE, ad FB, ita ML, ad MH. [a] Quare æquiangula, atq; adeo & similia sunt triangula FEB, MLH. Sunt autem & triangula FEA, FAB, ABE, triangulis MLG, MGH, GHL, similia. Igitur pyramides ABEF, GHLM, ex defin. 9. lib. 11. similes sunt. Eadem ratione similes erunt pyramides EBCF, LHIM; Item CDEF, IKLM. [b] Quapropter, vt demonstratum est, pyramides ABEF, EBCF, CDEF, ad pyramides GHLM, LHIM, IKLM, singulæ ad singulas, triplicatam proportionem habebunt laterum homologorū AB, BC, CD, ad GH, HI, IK, singulorum ad singula. Cū igitur AB, BC, CD, ad GH, HI, IK, habeāt vnā et eandem proportionem, ob similitudinem basium ABCDE, GHIKL; habebunt quoque pyramides ABEF, EBCF, CDEF, ad pyramides GHLM, LHIM, IKLM, vnā eandemq; proportionem, triplicatam scilicet illius; [c] Atque idcirco erit, vt una pyramis ABEF, ad unam pyramidem GHLM, ita omnes pyramides, nempe pyramis ABCDEF, ad omnes pyramides, nimirum ad pyramidem GHIKLM. Quam ob rem, [d] cū pyramis ABEF, ad pyramidē GHLM, habeat triplicatam proportionem homologorum laterum AB, GH; habebit quoque pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIKLM, triplicatam proportionem eorundem laterum homologorum AB, GH. Quod est propositum.

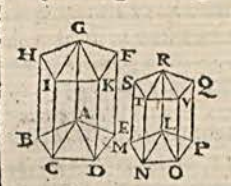
[a] 5. sexti
[b] 8. duodec.
[c] 12. quinti
[d] 8. duodec.

SCHOLIVM.

EADEM ratione prismata similia habebunt triplicatā proportionem homologorum laterum. Sint enim duo prismata similia ABCDEFGHIK, LMNOPQRSTV. Dico eorum propor-

proportionem esse triplicatam proportionis homologorum laterum. Nã si ex angulis A, & L, ducãtur rectæ AC, AD; LN, LO, a erunt, vt de pyramidibus dictum est, triangula ABC, CAD, DEA, triangulis LMN, NLO, OPL, similia. Similiter, si ex angulis G, & R, ducantur rectæ GI, GK; RT, RV, erunt triangula GHI, IGK, KFG, & triangulis RST, TRV, VQR, & triangulis ante dictis, similia, cum omnia plana prismatum opposita similia existant, per definitionem prismatis. Quoniam uero ob similitudinem prismatum, parallelogramma CH, NS, similia sunt; erit vt IC, ad CB, ita TN, ad NM: Vt autem CB, ad CA, ita quoque est NM, ad NL, ob similitudinem triangulorum BCA, MNL. Igitur ex æquo erit vt IC, ad CA, ita TN, ad NL. Rursus quoniam angulus solidus N, æqualis est solido angulo C, ob similitudinem prismatum; si ille huic superponatur, omnia inter se conuenient, nimirum angulus MNO, angulo BCD, & angulus TNM, angulo ICB, & angulus TNO, angulo ICD: Conuenit autem & recta NL, rectæ CA, eo quod anguli MNL, BCA, sint æquales. Igitur anguli ICA, TNL, æquales sunt; Ac propterea cum latera circa ipsos ostensa sint esse proportionalia, erũt parallelogramma CG, NR, similia. Atqui & parallelogramma CH, HA, parallelogrammis NS, SL; & triangula ABC, GHI, triangulis LMN, RST, similia sunt. Igitur prismata ABCIGH, LMNTRS, similia sũt, ex defin. solidorum similium. Non aliter ostendentur esse similia prismata CDAGIK, NOLRTV; nec non prismata AEDKGF, LPOVRQ. Quapropter prismata ABCIGH, CDAGIK, AEDKGF, ad prismata LMNTRS, NOLRTV, LPOVRQ, per ea, quæ demonstrauimus ad propos. 34. lib. 11. triplicatam habent proportionem, singula ad singula, laterũ homologorum BC, CD, DE, ad MN, NO, OP, singulorum ad singula. Ac propterea eodem modo demonstrabimus, prismata ABCDEFGHIK, LMNOPQRSTV, proportionem habere homologorum laterum BC, MN, triplicatam, quo paulo ante usi sumus ad idem demonstrandum in pyramidibus multangulis.

a 20. sexti



EX

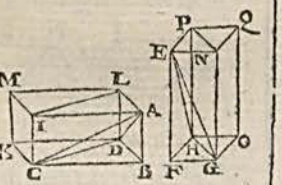
EX quibus omnibus colligitur, pyramides multangulas similes diuidi in pyramides triangulares similes, & numero æquales, & homologas totis. Hoc enim manifestum est ex demonstratione præcedentis coroll.

EODEM modo infertur, prismata multangula similia diuidi in prismata similia triangularia bases habentia, & numero æqualia, & homologa totis. Vt apparet ex huius scholij demonstratione.

THEOR. 9. PROPOS. 9. 7.

AEQVALIVM pyramidum, & triangulares bases habentium, reciprocantur bases & altitudines. Et quarum pyramidum triangulares bases habentium reciprocantur bases & altitudines; illæ sunt æquales.

SINT æquales pyramides triangulares ABCD, EFGH. Dico earum bases ABC, EFG, & altitudines esse reciprocas, hoc est, esse vt ABC, ad EFG, ita altitudinẽ pyramidis EFGH, ad altitudinẽ pyramidis ABCD. Si.n. perficiantur, vt in precedẽti propos. dictũ est, parallelepipeda BM, FQ, eorundem altitudinum cum pyramidibus, connectanturque rectæ LI, PN; erunt prismata DBCILA, HFGNPE, cum sint tripla pyramidum, quæ æquales ponuntur, inter se æqualia; Ac proinde parallelepipeda BM, FQ, cum sint prismatum dupla, æqualia quoque erunt. a Quare bases eorum & altitudines reciprocabuntur, hoc est, erit vt basis BI, ad basin FN, ita altitudo solidi FQ, ad altitudinẽ solidi BM: b Vt autẽ basis BI, ad basim FN, ita est triangulũ ABC, ad triãgulũ EFG. Igit erit quoq; vt basis ABC, ad basin EFG, ita altitudo pyramidis EFGH, ad altitudinem pyramidis ABCD, cum altitudines pyramidum eędem



a 34. vnde.

b 15. quin.

dem sint, quæ parallelepipedorum; Ac propterea bases, & altitudines pyramidum æqualium reciprocantur.

SINT iam bases & altitudines reciprocæ: Dico pyramides esse æquales. Constructa enim figura, vt prius; cũ sit vt ABC, ad EFG, ita parallelogrammum BI, ad parallelogrammum FN; sintque eędem altitudines parallelepipedorum, & pyramidum; erunt quoque bases parallelepipedorum & altitudines eorundẽ reciprocæ; [b] Ac propterea inter se æqualia erunt parallelepipeda BM, FQ. Quare & prismata DBCILA, HFGNPE, eorum dimidia, æqualia erunt: Atque propterea pyramides quoque, prismatum tertiæ partes, æquales erunt. Æqualium igitur pyramidum, & triangulares bases habentium, &c. Quod erat demonstrandum.

a 15. quinti

b 34. unde.

SCHOLIVM.

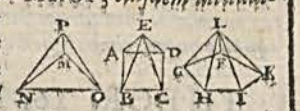
EADEM ratione Æqualium pyramidum, quarum bases non sint triangulares, reciprocantur bases atque altitudines. Et quarum pyramidum triangulares bases non habentiũ reciprocãtur bases & altitudines, illæ sunt æquales. Sint enim primum duæ pyramides æquales, quarum quidem ABCD, basin habeat triangularem; at vero EFGHI, non triangularem. Fiat basi non triangulari EFGH, æquale triangulum KLM. Quod quidem fieri, si basis multilatera reuocetur ad parallelogrammum, per propos. 45. lib. 1. Nam hoc parallelogrammum facile ad triangulum reducetur, per ea, quæ demõstrauimus ad propos. 42. lib. 1. Deinde super KLM, fiat pyramis KLMN, eiusdem altitudinis cũ pyramide EFGHI. Quoniam ergo pyramides EFGHI, KLMN, æquales habent bases, & eandem altitudinem; ipsæ erunt æquales, per ea, quæ in scholio propos. 6. huius lib. ostendimus: Ponitur autem pyramis EFGHI, æqualis pyramidi ABCD. Igitur & pyramis KLMN, pyramidi ABCD, æqualis erit. Quamobrem, cum habeant pyramides ABCD, KLMN, bases triangulares; [c] *erit vt basis ABC, ad basin KLM, hoc est, ad huic æqualem basin EFGH, ita altitudo pyramidis KLMN, hoc est, altitudo pyramidis EFGH, (ponuntur enim hæ altitudines æquales) ad altitudinem pyramidis ABCD. Ac proinde pyramidum ABCD, EFGHI, æqualium bases & altitudines reciprocantur.*

c 9. duodec.

SED reciprocentur iam harum pyramidum bases atque altitudines. Dico ipsas esse æquales. Constructa enim figura eodem modo; cum basis KLM, æqualis sit basi EFGH, & altitudo pyramidis KLMN, eadem, quæ pyramidis EFGHI; ponatur autem esse vt ABC, ad EFGH, ita altitudo pyramidis EFGHI, ad pyramidis ABCD, altitudinem; erit quoque vt basis ABC, ad basim KLM, ita altitudo pyramidis KLMN, ad altitudinem pyramidis ABCD. [a] *Quamobrem æquales sunt pyramides ABCD, KLMN. Cum ergo pyramis KLMN, æqualis sit pyramidi EFGHI, per ea, quæ ostensa sunt in scholio propos. 6. huius lib. Erit & pyramis ABCD, pyramidi EFGHI, æqualis. Quod est propositum.*

a 9. duode.

SINT deinde pyramides æquales ABCDE, FGHIKL, quarum bases sint multãgulæ. Fiat rursus triangulũ MNO, æquale basi ABCD, & pyramis MNOP, eiusdem altitudinis cum pyramide ABCDE: Eritque ex scholio propos. 6. huius lib. pyramis MNOP, æqualis pyramidi ABCDE. Sed hæc æqualis ponitur pyramidi FGHIKL. Igitur & pyramis MNOP, æqualis est pyramidi FGHIKL. Quare, vt nũc demonstrauimus, erit vt basis MNO, hoc est, basis ABCD, sibi æqualis, ad basim FGHIK, ita altitudo pyramidis FGHIKL, ad altitudinem pyramidis MNOP, hoc est, ad altitudinem pyramidis ABCDE; (ponuntur enim hæ altitudines æquales.) Ac propterea pyramidum æqualium ABCDE, FGHIKL, bases & altitudines reciprocantur.



SED reciprocentur iam bases harum pyramidum atque altitudines. Dico ipsas esse æquales. Constituta enim eodem modo figura, cum basis MNO, æqualis sit basi ABCD, & altitudo pyramidis MNOP, eadem quæ pyramidis ABCDE; ponatur autem vt ABCD, ad FGHIK, ita altitudo pyramidis FGHIKL, ad altitudinem pyramidis ABCDE; Erit quoque vt MNO, ad FGHIK, ita altitudo pyramidis FGHIKL, ad altitudinem pyramidis MNOP. Quare vt ante ostendimus,

ostendimus, æquales erunt pyramides MNOP, FGHIKL: Est autem pyramis MNOP, pyramidi ABCDE, æqualis, ex scholio propos. 6. huius lib. Igitur & pyramis ABCDE, pyramidi FGHIKL, æqualis erit. Quod est propositum.

OMNIA hæc facile quoque demonstrabuntur conuenire prismatis quibuscunque. Nam si prismata fuerint æqualia, erunt & eorum pyramides earundem altitudinum cum ipsis, & super easdem bases, æquales; cum sint eorum tertiæ partes, ex coroll. propos. 7. huius lib. Vel certe duæ tertiæ, si nimirum prismatum bases fuerint parallelogramma, & eorum verticis, lineæ rectæ, vt in scholio eiusdē propos. ostensum est. Quare, vt modo demonstrauimus, bases harum pyramidum atq; altitudines reciprocantur. Cum ergo hæ bases & altitudines eædem sint, quæ prismatum; reciprocabuntur quoque bases prismatum atque altitudines.

RVRSVS, si prismatum bases, & altitudines reciprocentur, reciprocabuntur quoque bases, & altitudines pyramidum easdem bases & altitudines cum prismatis habentium. Quare, vt demonstratum est, pyramides æquales sunt; Ac propterea prismata, cum earum sint tripla, vel certe sesquialtera, æqualia quoque sunt. Quod est propositum.

9. ## THEOR. 10. PROPOS. 10.

OMNIS conus tertia pars est cylindri eandem cum ipso basin habentis, & altitudinem æqualem.

HABEANT conus & cylindrus basin eandem circulum ABCD, & altitudinem eandem. Dico conum cylindri esse tertiam partem. Si enim conus non creditur esse tertia pars cylindri, non erit cylindrus coni triplus, sed vel maior, vel minor triplo coni. Sit primum maior quā triplus coni, magnitudine E, ita vt cylindrus sit æqualis triplo coni & magnitudini E, simul. Inscribatur in circulo quadratū ABCD, & circa eūdem, quadratum FGHI; intelliganturque super hæc quadrata sub altitudine coni, & cylindri, erecta duo parallelepipeda. Quo-

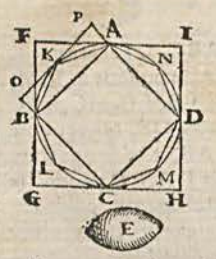
Quoniam igitur quadratum ABCD, dimidiū est quadrati FGHI, vt ad propos. 9. lib. 4. ostendimus; estq; vt basis ad basin, ita parallelepipedum ad parallelepipedum eiusdem altitudinis; Erit & parallelepipedum basis ABCD, dimidiū parallelepipedi basis FGHI; Ac proinde parallelepipedum basis ABCD, maius erit, quam dimidium cylindri, cuius basis circulus ABCD. Secentur bifariam peripheriæ AB, BC, CD, DA, in punctis K, L, M, N, adiungunturque rectæ KA, KB, LB, LC, MC, MD, ND, NA. Ducatur quoque per K, recta OP, tangens circulum in K, quæ parallela erit ipsi AB, vt ad propos. 27. lib. 3. ostendimus, occurratque rectis DA, CB, productis in P, & O; & super AKB, ABOP, intelligantur prismata sub altitudine coni & cylindri. Quia ergo triangulum AKB, dimidium est parallelogrammi ABOP; erit quoque prisma basis AKB, dimidium prismatis, seu parallelepipedi basis ABOP: cum sit prisma ad prisma, vt basis ad basim, quemadmodum ad propos. 7. huius lib. demonstrauimus; Ac propterea prisma basis AKB, maius erit, quam dimidium segmenti cylindri, cuius basis figura cōtenta linea recta AB, & peripheria AKB. Eadem ratione erunt prismata, quorum bases reliqua triangula BLC, CMD, DNA, & altitudo eadem, quæ coni & cylindri, maiora, quam dimidia segmentorum cylindri, quorum bases circuli segmenta. Omnia igitur hæc prismata simul maiora sunt, quam dimidia omnium segmentorum cylindri simul. Quod si rursus peripheriæ AK, KB, &c. secentur bifariā, & adiungantur rectæ lineæ, constituentur eodē modo prismata eiusdē altitudinis cū cono, & cylindro, quæ maiora erunt simul, quam dimidia omniū segmentorū cylindri simul, quorum bases circuli segmēta, & sic deinceps. Quoniā uero si a cylindro, cuius basis circulus ABCD, auferatur plus quam dimidium, nempe parallelepipedum basis ABCD; & a reliquis segmentis plus quam dimidium, nimirum prismata basium AKB, BLC,

= 32. vnde.

b 41. primi

[a] 1. decim

BLC,&c. atq; in hunc modum semper fiat detractio;[a] relinquitur tandem minor magnitudo, quam E, excessus cylindri supra triplum coni: Sint iam segmẽta cylindri relicta basium AK,KB,BL, &c. (quę quidem bases sunt circuli segmenta,) simul sumpta, minora quam E. Cum igitur cylindrus æqualis ponatur triplo coni & magnitudini E, simul; Si ex cylindro auferantur segmenta dicta, & ex triplo coni vna cum magnitudine E, ipsa magnitudo E, quæ maior est dictis cylindri segmentis, erit reliquum prisma basis multangulę AKBLCMDN, eandem habẽs altitudinem cum cono, & cylindro, maius quam reliquum tripli coni; ideoq; conus minor erit, quam tertia pars prismatis. Quare cum dicti prismatis sit tertia pars pyramis, cuius eadẽ cum ipso basis & altitudo, ex coroll. propos. 7. huius lib. Erit conus minor dicta pyramide, totum parte. Quod est absurdum. Non igitur maior est cylindrus triplo coni.



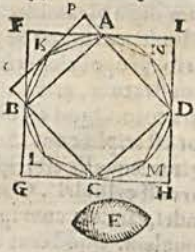
SIT deinde cylindrus minor triplo coni, ac proinde conus maior quam tertia pars cylindri. Sit ergo conus maior quam tertia pars cylindri, magnitudine E; ita vt conus æqualis sit tertiæ parti cylindri, & magnitudini E, simul. Inscribatur rursus in circulo quadratum ABCD, & circa eundem, quadratum FGHI; intelligaturq; super hæc quadrata, pyramides sub altitudine coni & cylindri. Quoniam igitur quadratum ABCD, dimidium est quadrati FGHI, vt ad propos. 9. lib. 4. demonstrauimus, [b] estque vt basis ad basin, ita pyramis ad pyramidẽ eiusdem altitudinis, Erit quoque pyramis super ABCD, dimidium pyramidis super basin FGHI; ac proinde pyramis super basin ABCD, maior erit dimidio coni, cuius basis circulus ABCD. Secẽtur peripheriæ AB, BC, CD, DA, bifariam in K, L, M, N, adiunganturq; rectæ AK, KB, BL, LC, CM, MD, DN, NA. Ducatur quoque per K, recta OP, tangens circulum in K, quæ parallela erit

[b] 6. duodec.

erit ipsi AB, vt ad propos. 27. lib. 3. demonstrauimus, occurratque rectis DA, CB, productis in P, & O, & super AKB, ABOP, intelligãtur pyramides sub altitudine coni & cylindri. Quia ergo triangulũ AKB, dimidium est parallelogrammi ABOP, erit quoque pyramis super basin AKB, dimidium pyramidis super basin ABOP, [b] cũ pyramides habeant proportionem eandem, quam bases; ac proinde pyramis super basin AKB, maior erit dimidio segmenti coni, cuius basis figura contenta linea recta AB, & peripheria AKB. Eadem ratione erũt pyramides, quarum bases reliqua triangula BLC, CMD, DNA, & altitudo eadem cum cono & cylindro, maiores, quam dimidia segmentorum coni, quorum bases circuli segmenta. Omnes igitur hæ pyramides simul maiores sunt, quã dimidia omnium segmentorum coni simul. Quod si rursus peripheriæ AK, KB, BL, LC, CM, MD, DN, NA, secentur bifariam, & adiungantur rectæ lineæ in eodem circulo, constituentur eodem modo pyramides eiusdem altitudinis cum cono & cylindro, quæ maiores erunt simul, quã dimidia omniũ segmentorum coni simul, quorũ bases circuli segmenta; & sic deinceps. Quoniam vero si a cono, cuius basis circulus ABCD, auferatur plus quam dimidium, nempe pyramis super basin ABCD, quam maiorem esse ostendimus, quam dimidium coni, cuius basis est circulus ABCD; & a reliquis segmẽtis plus quam dimidium, nimirum pyramides basium AKB, BLC, CMD, DNA; atque in hunc modum semper fiat detractio; [c] relinquitur tãdem minor magnitudo, quam E, excessus coni supra tertiam partem cylindri: Sint iam segmenta coni relicta basium AK, KB, BL, LC, CM, MD, DN, NA, (quæ quidem bases sunt circuli segmenta,) simul sumpta minora, quam E. Cum igitur conus æqualis ponatur tertiæ parti cylindri, & magnitudini E, simul; si ex cono detrahãtur segmẽta prædicta, & ex tertia parte cylindri vna cum magnitudine E, ipsa magnitudo E, quæ maior

[a] 41. primi.

[b] 6. duode.



[c] 1. decimi

est, præfatis coni segmentis; erit reliqua pyramis, cuius basis polygonum AKBLCMDN, eandem habens altitudinem cũ cono & cylindro, maior quã tertia pars cylindri reliqua; ac proinde triplum dictæ pyramidis maius erit cylindro. Quocirca, cũ prisma eandẽ habens basim cum dicta pyramide, eandemq; altitudinem cũ cono & cylindro, triplum sit ipsius pyramidis, vt supra in corollario propositionis septimæ huius libri a nobis est demonstratum, erit huiusce modi prisma maius cylindro, pars toto. Quod est absurdum, Non ergo cylindrus minor est triplo coni: Sed neque maior triplo est ostensus. Igitur æqualis est triplo coni, propterea q; conus tertia pars est cylindri. Omnis igitur conus tertia pars est cylindri, eandem cum ipso basim habentis, & altitudinem æqualem. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

QVAMVIS propositio hæc solum intelligatur de conis & cylindris rectis, cum hos dũtaxat Euclides definierit lib. 11. omnibus tamen conis & cylindris tam rectis, quam scalenis conuenit, vt perspicuum est eius demonstrationem diligenter intuenti. Itaque propositio vniuerse ita proponi poterit.

OMNIS conus, siue rectus, siue scalenus, tertia pars est cuiuslibet cylindri siue recti, siue scaleni, eandem cum ipso & basim & altitudinem habentis, licet non sit idem axis coni & cylindri.

11. THEOR. 11. PROPOS. 11.

SVB eadem altitudine existentes coni & cylindri, inter se sunt. vt bases.

SINT sub eadem altitudine coni & cylindri, quorũ bases circuli ABCD, EFGH, altitudines vero æquales IK, LM. Dico vt est basis ad basim, ita esse conum ad conum, &

num, & cylindrum ad cylindrũ. Si enim hoc non creditur, sit vt basis ABCD, ad basim EFGH, ita conus ABCDK, ad aliquam magnitudinem, nempe ad N, quæ vel maior erit, vel minor cono EFGHM. Si n. esset æqualis, [a] haberet conus ABCDK, ad conum EFGHM, & ad N, proportionẽ eandẽ; ac propterea esset conus ad conum, vt basis ad basin: quod non cõceditur. Sit ergo primũ N, minor quam conus EFGHM, magnitudine O, ita vt conus EFGHM, æqualis sit magnitudinibus N, & O, simul. Inscribatur in circulo EFGH, quadratum EFGH. diuidanturque peripheriæ EF, FG, GH, HE, bifariam in P, Q, R, S, & adiungantur rectæ EP, PF, FQ, &c. Quoniam igitur si ex cono EFGHM, detrahatur pyramis super basim EFGH, eiusdem altitudinis, & a reliquis segmentis auferantur pyramides eiusdem altitudinis basium EPF, FQG, &c. atque in hunc modum semper fiat detractio, semper plus dimidio subtrahitur, vt in posteriore parte præcedẽtis propositionis ostensum est; [b] relinquetur tandem minor magnitudo, quam O, excessus coni EFGHM, super N. Sint ergo iam segmenta coni relicta basium EP, PF, FQ, &c. (quæ quidẽ bases sunt circuli segmenta) simul sumpta, minora quam O. Cum igitur conus EFGHM, ponatur æqualis magnitudinibus N, & O, simul; si ex cono detrahantur dicta coni segmenta, & ex N, & O, ipsa magnitudo O, quæ prædicti coni segmẽtis maior est, erit reliqua pyramis, cuius basis polygonũ EPFQGRHS, eiusdẽ altitudinis cũ cono, maior quã N, reliqua magnitudo. Inscribatur in circulo ABCD, polygonũ ATBVCXDY, simile polygono EPFQGRHS, vt in propos. 2. huius lib. docuimus, ducanturq; circulorũ diametri BD, FH. Qm igit per coroll. ppos. 2. huius lib. est vt circulus ABCD, ad circulũ EFGH, ita polygonũ ATBVCXDY, ad polygonum

[a] 7. quinti.

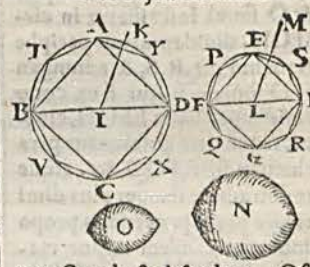
[b] 1. decimi

gonum EPFQGRHS: Vt autem circulus ABCD, ad circulum EFGH, ita ponitur conus ABCDK, ad magnitudinem N, [a] & vt polygonum, ad polygonum, ita est pyramis ad pyramidem eiusdem altitudinis cum conis; Erit quoque vt pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidē EPFQGRHSM, vt conus ABCDK, ad N. Cum igitur pyramis ATBVCXDYK, minor sit cono ABCDK, pars toto, [b] erit & pyramis EPFQGRHSM, minor quā N: Ostēsa autem fuit & maior. Quod est absurdum. Non igitur minor est magnitudo N, cono EFGHM.

[a] 6. duodec.

[b] 14. quinti

SIT secundo N, maior cono EFGHM. Cum igitur ponatur vt circulus ABCD, ad circulum EFGH, ita conus ABCDK, ad N; Erit & conuertendo vt circulus EFGH, ad circulum ABCD, ita N, ad conum ABCDK. Ponatur vt N, ad conum ABCDK, ita conus EFGHM, ad magnitudinē O. Et quia N, maior ponitur cono EFGHM; maior quoque erit conus ABCDK, quam O. Quare erit vt circulus EFGH ad circulum ABCD, ita conus EFGHM, ad magnitudinem O, quæ minor est cono ABCDK. Quod est absurdum. Ostensum enim est iam, non posse esse conum ad magnitudinem minorem alio cono, vt est basis illius coni ad basin huius coni. Non ergo maior est N, magnitudo cono EFGHM; Sed neque minor est ostensa; Aequalis igitur est. Quapropter cum ponatur, vt basis ABCD, ad basin EFGH, ita conus ABCDK, ad N; [d] Sit autem, vt conus ABCDK, ad N, ita idē conus ABCDK, ad conum EFGHM; erit quoque vt basis ABCD, ad basin EFGH, ita conus ABCDK, ad conum EFGHM.



[c] 14. quin.

[d] 7. quinti

[e] 15. quin.

[e] QVONIAM autem, vt conus ABCDK, ad conum EFGHM, ita est cylindrus ABCDK, (qui triplus est coni ABCDK;) ad cylindrum EFGHM; (qui triplus est coni EFGHM) Erit quoque vt basis ALCD, ad basin EFGH, ita cylindrus ABCDK, ad cylindrū EFGHM. Quod tamen eodem modo confirmari potest, quo vsi sumus in conis, si loco conorum, & pyramidum, concipiantur cylindri, & prismata. Sub eadem ergo altitudine existentes coni & cylindri, inter se sunt, vt bases. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM quoque est, hanc propositionem, quam Euclides de conis, & cylindris solis rectis proposuit, ob rationem superius traditam, extendi etiam posse ad conos, & cylindros scalenos, vt eius demonstratio manifeste indicat, ita vt propositio vniuerse proponatur in hunc modum.

SVB eadem altitudine existentes coni & cylindri, siue ambo recti sint, siue scaleni, siue vnus rectus, & alter scalenus; inter se proportionem habent, quam bases.

CONVERTETVR hæc propositio quoque hoc modo.

SI coni & cylindri inter se sint, vt bases; ipsi sub eadem altitudine erunt.

QVOD quidem demonstrabis eo modo, quo conuersum proposit. 32. lib. 11. ostendimus.

COROLLARIVM.

HINC fit, conos & cylindros eiusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases constitutos, siue ambo sint recti, vel scaleni, siue vnus rectus, & alter scalenus, esse inter se æquales; propterea quod eandem proportionem habent, quam bases, quæ æquales ponuntur, vel certe vna & eadem.

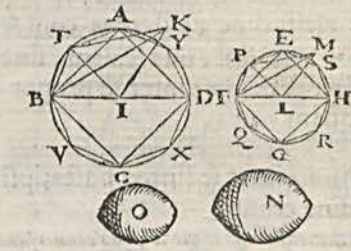
ITEM sequitur, conos & cylindros æquales super eandem, vel æquales bases, in eadem esse altitudine: Et conos & cylindros æquales in eadem altitudine, super æquales bases esse, si nō habuerint eandem. Quod ostendemus non aliter, ac conuersum propos. 31. lib. 11. demonstratum fuit.

10.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

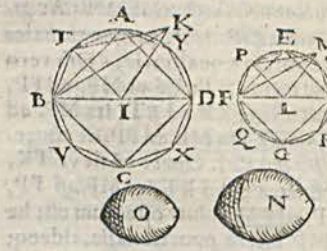
SIMILES coni,& cylindri, in triplicata ratione sunt diametrorum, quæ in basibus.

SINT similes coni,& cylindri,quorum bases circuli ABCD,EFGH,axes vero LK, LM, & diametri basium BD,FH. *Dico* conum ad conum, & cylindrum ad cylindrum, habere proportionem triplicatã diametri ad diametrum.Si enim hoc non credatur,habeat conus ABCDK,ad aliquam magnitudinem N, proportionem triplicatam diametri BD, ad diametrum FH. Eritque N, vel minor, vel maior cono EFGHM. Si enim esset æqualis, [a] haberet conus ABCDK, ad conũ EFGHM, & ad N, proportionem eãdem; Ac proinde proportio coni ABCDK, ad conũ EFGHM, esset quoq; triplicata proportionis diametri BD, ad diametrum FH;quod non conceditur.Sit ergo primum N, minor,quam conus EFGHM, magnitudine O; Fiatque eadẽ prorsus constructio figuræ,quæ in præcedenti propositione,ita vt rursus pyramis EPFQGRHSM, maior ostendatur,quam N. Ducantur deinde rectæ KB, KT, MF,MP,vt habeãtur duo triangula BKT,EMP, pyramidum ATBVCXDYK,EPFQGRHSM;& connectantur rectæ TI,PL. Quoniam igitur coni ABCDK,EFGHM, similes ponuntur,erit,ex 24.defin.lib.11.vt diameter BD, ad diametrum FH, [b] ac propterea vt semidiameter BI,ad semidiametrum FL,ita axis IK,ad axem LM; Ac permutãdo vt BI,ad IK, ita FL, ad LM.Cum igitur anguli BIK,FLM,recti sint,ex defin.3.lib.11.quod coni recti ponantur,propterea que axes recti ad eorum bases; [c] Erunt triangula BIK, FLM,æquiangula; [d] Ac propterea vt KB,ad BI,ita erit MF,ad FL.Vt autẽ BI, ad BT, ita FL,ad FP,ob similitudinẽ triangulorum BIT, FLP. (Cum enim anguli BIT,FLP,insistentes similibus arcubus BT,FP,sint æquales,vt in scholio propos. 22. lib.3. ostẽsum est;sitq; vt BI,ad IT,ita FL,ad LP,ob æqualitatẽ tam linearũ BI,IT,quam FL,LP, [a] erunt triangula BIT, FLP, similia.) Igitur ex æquo, vt KB,ad BT, ita MF,ad FP. Rursus qa latera KI,IB,triãguli KIB, æqualia sũt lateribus KI,IT,triãguli KIT,& anguli dictis lateribus cõprehẽsi,recti,ex defin 3.lib.11.cũ axis IK, rectus ponatur ad circulũ ABCD, [b] erũt bases KB,KT,æquales.Eodẽ modo æquales erũt rectæ MF,MP; Ac propterea rectæ KB, KT, rectis MF, MP, proportionales erunt,cũ vtrobiq; sit proportio æqualitatis. [c] Qm vero vt KB,ad BT,ita KT,ad eandẽ BT; Itẽ vt MF, ad FP, ita MP,ad eandẽ FP:Erat aũt vt KB,ad BT, ita MF, ad FP;Erit quoque vt KT,ad BT,ita MP,ad FP;Et cõuertẽdo vt BT,ad TK,ita FP,ad PM. Quare cũ sit vt TK, ad KB,ita PN,ad MF; & vt KB, ad BT,ita MF,ad FP, Et vt BT, ad TK, ita FP,ad PM,veluti ostensum est; habebũt triãgula BKT,FMP,latera pportionalia, [d] ideoq; æquiãgula erũt;Ac proinde similia,ex definitione. Non aliter ostendẽtur reliqua triangula ambiẽtia pyramides ATBVCXDYK, EPFQGRHSM, inter se similia esse: Quæ cũ sint multitudine æqualia, erũt dictæ pyramides similes,ex defin.9.lib.11.Quocirca in triplicata proportione erunt homologorum laterum BT, FP, ex coroll. propos. 8.huius lib.Vt autẽ BT,ad FP, ita est BI, ad FL, ob similitudinẽ triangulorum BIT, FLP; [e] Et vt BI, ad FL, ita BD,ad FH. Igitur pyramis ad pyramidẽ habebit quoque proportionem triplicatam diametrorum BD, FH;Ponebatur autem & proportio coni ABCDK,ad N, earundem diametrorum triplicata. Igitur erit vt pyramis ATBVCXDYK ; ad pyramidem EPFQGRHSM,ita conus ABCDK, ad N. Quare cum pyramis ATBVCXDYK, minor sit cono ABCDK,pars toto; erit & pyramis EPFQGRHSM, minor quam N. Ostensa autem est & maior. Quod est absurdum. Non igitur minor est magnitudo N,cono EFGHM.



[a] 7. quinti
[b] 15. quinti
[c] 6. sexti.
[d] 4. sexti
[a] 6. sexti.
[b] 4. primi
[c] 7. quinti
[d] 6. sexti.
[e] 15. quinti
[f] 14. quinti

SIT deinde N, maior cono EFGHM. Cum ergo ponatur conus ABCDK, ad N, habere proportionem triplicatam diametri BD ad diametrum FH; Habeat autē & pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidem EPFQGRHSM, triplicatam proportionem earundem diametrorum, vt proxime oſtendimus: Erit vt conus ABCDK, ad N, ita pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidem EPFQGRHSM; & conuertendo vt N, ad conum ABCDK, ita pyramis EPFQGRHSM, ad pyramidem ATBVCXDYK. Quare cum ex coroll. propoſ. 8. huius lib. pyramis EPFQGRHSM, ad pyramidem ATBVCXDYK, habeat proportionem triplicatam homologorum laterū PF, ad TB, hoc eſt, diametri FH, ad diametrum BD; habebit quoq; N, ad conum ABCDK, proportionem triplicatā diametri FH, ad diametrum BD. Ponatur vt N, ad conum ABCDK, ita conus EFGHM, ad magnitudinē O. Habebit igitur & conus EFGHM, ad O, proportionem triplicatam diametri FH, ad diametrum BD. Et quia N, maior ponitur quam conus EFGHM,[a] erit quoq; conus ABCDK, maior quā O. Quapropter conus EFGHM, ad magnitudinē O, minorem cono ABCDK, proportionē habet triplicatam diametri FH, ad diametrū BD. Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt, non poſſe conū ad magnitudinē alio cono minorē, proportionē habere triplicatā eius, quā habent baſiū diametri. Non ergo maior eſt magnitudo N, cono EFGHM: Sed neque minor eſt oſtenſa. Aequalis igitur eſt;[b] ac proinde conus ABCDK, eandē habet proportionē ad conū EFGHM, & ad N. Cū ergo pōnatur conus ABCDK, ad N, in triplicata proportione diametrorū BD, & FH; erit quoq; conus ABCDK, ad conū EFGHM, in earundē diametrorū, pportione triplicata.



[c] QVONIAM vero, quam proportionem habent coni, eandem quoque obtinent cylindri, eorum tripli; habebit quoq; cylindrus ad cylindrum proportionē diametrorum in baſibus triplicatam. Quod tamen eodem modo demonſtrabitur, quo vſi ſumus in conis, ſi modo loco conorum, & pyramidum aſſumantur cylindri, atque priſmata. Similes igitur coni, & cylindri in triplicata ratione ſunt diametrorum, quæ in baſibus. Quod oſtendendum erat.

a 14. quin

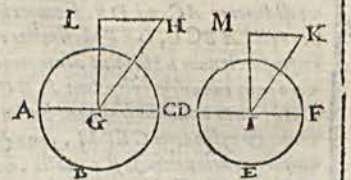
b 7. quinti.

c 15. quin

SCHOLIVM.

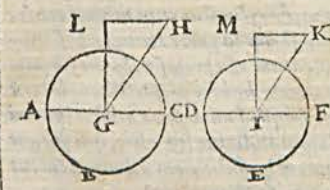
QVOD ſi maior conus, & cylindrus cum minore conferatur, perſpicuum eſt, in ſecunda parte huius propoſ. Euclidem aſſumere, demonſtratum eſſe propoſ. 8. huius lib. minorem pyramidem ad maiorem habere proportionem laterū homologorum triplicatam. Id quod ad defin. 10. lib. 5. monui contra Federicum Commandinum, & alios, qui putant referri ſemper debere maiorem quantitatem ad minorem, vt habeatur proportio duplicata, triplicata, &c.

HÆC porro propoſitio, quamuis etiam extendatur ad ſimiles conos & cylindros ſcalenos: tamen hic demonſtratur in ſolis rectis conis & cylindris ſimilibus, cum in demonſtratione aſſumantur axes recti ad baſes. Quocirca eam hac ratione oſtendemus in ſimilibus conis & cylindris ſcalenis. Sint ſimiles coni, & cylindri ſcaleni, quorum baſes circuli ABC, DEF, axes vero GH, IK, & diametri baſiū AC, DF. Dico tam conum ad conum, quam cylindrum ad cylindrum habere proportionem diametri ad diametrum triplicatā. Intelligantur enim ſuper eaſdem baſes duo coni, & cylindri recti earundem cum ſcalenis altitudinum, quorum axes GL, IM. Ducaturq; per rectas GH, GL; item per IK, IM, plana ſecantia baſes lineis rectis AC, DF. Quoniam igitur axes GL, IM, recti ſunt baſibus ABC, DEF,[a] erunt & plana per GH, GL; & per IK, IM, ad eaſdem recta.[b] Ac proinde perpendiculares lineæ ex H, K, ad baſes demiſſæ cadent in AC, DF, communes ſectiones; & proinde erunt anguli



[a] 18. vnde.
[b] 38. vnde.

anguli CGH, FIK, anguli inclinationum, qui æquales inter se erunt, cũ coni & cylindri scaleni similes ponantur: Sunt autem & anguli CGL, FIM, æquales, nempe recti, ex defin.
a 32. primi 3. lib. 11. a Reliqui igitur HGL, KIM, æquales quoq; erunt. Quoniam vero coni ABCH, ABCL, ponuntur esse eiusdem altitudinis; erit recta HL, per axiũ vertices ducta ipsi AC, parallela, b ideoque angulus L, rectus. Eodemque argumento rectus erit angulus M, cum & anguli CGL, FIM, recti
b 29. primi sint. Non aliter & reliqui anguli H, K, æquales erunt, cum sint æquales eorum alterni anguli CGH, FIK. Triangula igitur GHL, IKM, æquiangula sunt; atque idcirco
c 4. sexti. erit vt GL, ad GK, ita IK, ad IM; & permutando, vt GH, ad IK, ita GL, ad IM. Vt autem axis GH, ad axẽ IK, ita est AC, diameter ad DF, diametrum; quod coni & cylindri scaleni ponãtur similes. Igitur & GL, axis ad IM, axẽ erit, vt diameter AC, ad DF, diametrũ; Et proinde coni & cylin
d 12. duod. dri recti ABCL, DEFM, similes erũt, ex definitione. d Quare proportionem habebunt diametrorum triplicatam. Quia vero tam conus & cylindrus ABCL, cono & cylindro ABCH, (cum eandem habeant basim, & altitudinem,) quam conus & cylindrus CEFM, cono & cylindro DEFK, (eandem rationem,) est æqualis, vt constat ex coroll. propos.
e 7. quint. 11. huius lib. e Erit vt conus & cylindrus ABCL, ad conum & cylindrum DEFM, ita conus & cylindrus ABCH, ad conum & cylindrum DEFK; ideoque proportio coni & cylindri ABCH, ad conum et cylindrũ DEFK, triplicata quoq; erit diametri AC, ad diametrum DF. Quod est propositum.



11.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

SI cylindrus plano secetur aduersis planis parallelo: Erit vt cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem.

SECETVR cylindrus ABCD, plano GH, parallelo aduersis planis AB, CD, quod quidem secet axẽ EF, in I. Dico vt est cylindrus ABHG, ad cylindrũ GHCD, ita esse axem EI, ad axem IF. Intelligatur enim cylindrus ABCD, in vtramque partem, vna cum eius axe & rectangulo EC, ad cuius reuolutionem descriptus est cylindrus, protractus quantumlibet; Sumanturque in axe producto quotcunq; rectæ EK, KL, æquales ipsi EI; Itẽ quotcũque rectæ FM, MN, NO, æquales ipsi FI. Deinde per puncta I, K, L, M, N, O, ducantur rectę IH, KP, LQ, MT, NV, OX, parallelæ, & æquales rectis EB, FC; quæ quidem ad reuolutionem rectanguli EC, describent circulos GH, PR, QS, Tα, VZ, XY, parallelos & æquales circulis AB, CD, ob æqualitatem semidiametrorum, quæ semper inter se æquidistantes circunferuntur. Ac propterea cylindri erũt SP, PA, AH, HD, DT, TZ, ZX, ex definitione, componẽtes totum cylindrum SQXY. Quoniã vero tam cylindri SP, PA, AH, super bases æquales QS, PR, BA,

& sub altitudinibus æqualibus KL, EK, IE, æquales sũt, quam cylindri XZ, ZT, TD, DH, super æquales bases XY, VZ, Tα, CD, & sub altitudinibus æqualibus NO, MN, FM, IF, ex coroll. propos. 11. huius lib. Erit tam multiplex cylindrus SH, cylindri AH, quã multiplex est axis IL, ipsius axis IE; Itẽ tã multiplex cylindrus XG, cylindri CG, quam multiplex est axis IO, ipsius axis IF. Quoniam autem si axis IL, (multiplex IE, primæ magnitudinis) æqualis est axi IO, (multiplici axis IF, secundæ magnitudinis) æqualis quoque est cylindrus SH, (multiplex cylindri AH, tertiæ magnitudinis) cylindro XG, (multiplici cylindri CG, quartæ magnitudinis) vt ex propos. 11. huius lib. liquet. Si vero axis maior est axe, cylindrus quoque cylindro maior est; Et si minor, minor, in quacunq; hoc contingat multiplicatione: Erit, per def. 6. lib. 5. ita axis IE, prima magnitudo ad axẽ IF, secundã magnitudinẽ, vt cylindrus AH, tertia magnitudo ad cylindrum CG, quartam magnitudinem. Si cylin-

drus

drus igitur plano secetur aduersis planis parallelo; erit vt cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

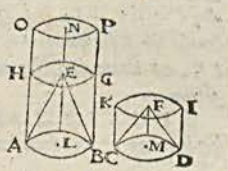
ETSI hanc propositionem Euclides de solo cylindro recto demonstrat; tamen eius demonstrationem cylindro scaleno facile accommodabis, si modo adhibeas descriptionem cylindri scaleni sicut in demonstratione Euclidis assumpta fuit cylindri recti descriptio; ita vt quemadmodum in conis rectis rectangulum circa quiescens latus circumfertur, sic quoque in conis scalenis circumferantur semidiametri LS, KR, EA, &c. semper æquidistates circa centra L, K, E, &c. una cũ recta SY, semidiametros coniungente. Hac enim ratione semper cylindri describentur, vt constat ex iis, quæ scribit Seremus in lib. 1. de sectione cylindri.

11. THEOR. 14. PROPOS. 14.

SVPER æqualibus basibus existentes coni, & cylindri; inter se sunt, vt altitudines.

SINT super bases æquales AB, CD, duo coni ABE, CDF, & duo cylindri ABGH, CDIK, quorum axes, seu altitudines (Nam in conis & cylindris rectis axes ipsi sunt altitudines) LE, MF. Dico esse conum ABE, ad conum CDF, & cylindrum ABGH, ad cylindrum CDIK, vt est altitudo LE, ad altitudinem MF. Extendatur enim cylindrus ABGH, ad partes GH, vna cum eius axe LE, & rectangulo AG; abscindaturq; axis EN, æqualis axi MF, & circa centrum N, intelligatur circulus OP, æqualis & parallelus circulo GH, vt fiat cylindrus GHOP, eiusdem altitudinis cum cylindro CDIK. Quoniam igitur cylindri HP, CI, cum habeant æquales bases & altitudines, æquales sunt, ex coroll. propos. 11. huius lib. [a] proptereaque cylindrus AG, ad ipsos eandem habet proportionem. [b] Est autem cylindrus AG, ad cylindrum HP, vt axis, seu altitudo LE, ad axem, seu altitudinem EN, hoc est, ad altitudinem MF, sibi æqualem. Igitur & cylindrus AG, ad cylindrum CI, erit quoque, vt altitudo LE, ad altitudinem MF.

[a] 7. quinti.
[b] 13. duod.

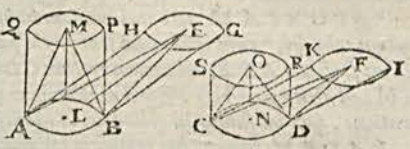


[c] QVIA vero coni ABE, CDF, sunt tertiæ partes cylindrorum AG, CI; [d] ipsi habebunt eandem cum cylindris proportionem; Ac proinde erit quoque conus ABE, ad conum CDF, vt altitudo LE, ad altitudinem MF. Super æqualibus igitur basibus existentes coni & cylindri, inter se sunt, vt altitudines. Quod ostendendum erat.

[c] 10. duode.
[d] 15. quin.

SCHOLIVM.

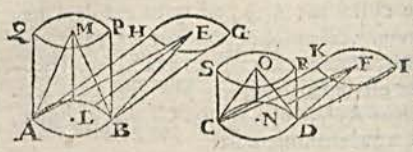
HOC idem conuenire conis scalenis, hoc modo demonstrabimus. Sint super bases æquales AB, CD, coni ABE, CDF, et cylindri ABGH, CDIK, scaleni. quorum altitudines LM, NO. Dico conũ ABE, ad conum CDF, et cylindrum ABGH, ad cylindrum CDIK, esse, vt est altitudo LM, ad altitudinem NO. Super basin enim AB, construatur cylindrus rectus ABPQ, sub altitudine LM; Item super basin CD, cylindrus CDRS, sub altitudine NO. [e] *Quoniã igitur est cylindrus rectus ABPQ, ad*



[e] 14. duod.

ad cylindrum rectũ CDRS, vt altitudo LM, ad altitudinẽ NO: Est aũt cylindro ABPQ, cylindrus ABGH: Itẽ cylindro CDRS, cylindrus CDIK, æqualis, ex coroll. propos. 11. huius lib. Erit quoque cylindrus ABGH, ad cylindrum CDIK, vt altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod est propositum.

a 10. duod. b 15. quin. QVONIAM autem coni, [a] cum sint tertiæ partes cylindrorum, [b] eandem habent proportionem, quam cylindri; Erit quoque conus ABE, ad conum CDF, vt altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod tamen eodẽ argumento, quo vsi sumus in cylindris, confirmari potest, vt perspicuum est, si super bases AB, CD, fiant coni recti ABM, CDO, earundẽ altitudinum cum cylindris ABPQ, CDRS.

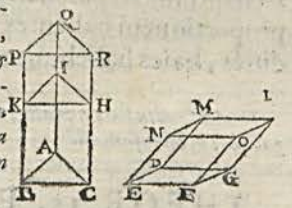


IDEM concludetur, quamuis vnus conorum, & cylindrorum, nempe conus ABE, & cylindrus ABGH, fuerit scalenus, alter vero, nimirum conus CDO, & cylindrus CDRS, rectus. Nam cum cylindrus scalenus ABGH, æqualis sit cylindro recto ABPQ; sit autẽ cylindrus rectus ABPQ, ad cylindrum rectum CDRS, vt altitudo LM, ad altitudinem NO, vt Euclides demonstrauit: Erit quoque cylindrus scalenus ABGK, ad cylindrum rectum CDRS, vt altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod est propositum.

c 15. quin. a 10. duod. [c] QVONIAM vero coni eandem habent proportionẽ, quam cylindri, [d] cum illi horum sint tertiæ partes; Erit etiã conus scalenus ABE, ad conum rectum CDO, vt altitudo LM, ad altitudinẽ NO. Quod nihilominus ostendetur eadẽ ratione, qua vsi sumus in cylindris, vt manifestum est.

EADEM quoque hæc propositio conuenit prismatis, parallelepipedis, & pyramidibus super æquales bases constitutis. Sint enim super bases æquales ABC, DEFG, prismata ABCHIK, DEFGKMNO, & pyramides sub eisdem altitudinibus. Dico esse prisma ad prisma, & pyramidem ad pyramidem, vt est altitudo ad altitudinem. Sint namque insistentes lineæ AI, CH, BK, prismatis ABCHIK, ad basin ABC, perpendi-

perpendiculares, ita vt BK, sit altitudo prismatis ABCHIK; Productis autem rectis AI, CH, BK, sumantur IQ, HR, KP, æquales altitudini prismatis EL; & ductis rectis PQ, QR, RP, compleatur prisma HIKPQR, eiusdem altitudinis cum prismate EL. Eruntq; prismata HIKPQR, EL, cum habeant & bases, & altitudines æquales, inter se æqualia, ex coroll. 2. propo. 7. huius lib. [a] Ac propterea prisma ABCHIK, ad vtrumq; eandem habebit proportionem. Quia vero ex scholio propo. 25. lib. 11. prisma ABCHIK, ad prisma HIKPQR, est vt planum BI, ad planum KQ; [b] Et vt planum BI, ad planum KQ, ita est recta BK, ad KP; erit prisma ABCHIK, ad prisma HIKPQR, hoc est, ad prisma EL, vt BK, altitudo prismatis ABCHIK, ad KP, altitudinem prismatis HIKPQR, hoc est, prismatis EL. Quod est propositum.



a 7. quinti. b 1. sexti.

QVOD si insistẽtes lineæ AI, CH, BK nõ sint perpendiculares ad basin ABC, cõstituẽdũ erit sup basin ABC, aliud prisma, cuius insistẽtes sint perpẽdiculares ad basin, & æquales altitudini prismatis ABCHIK. Nam cũ ex 2. coroll. propos. 7. huius lib. hæc duo prismata eandem habentia altitudinẽ, et basin, sint æqualia, sitq; prisma constitutũ ad prisma EL, vt illius altitudo ad huius altitudinẽ; erit et prisma ABCHIK, ad prisma EL, vt altitudo illius, ad altitudinẽ huius

c 15. quin. d 7. duode. [c] QVONIAM vero pyramides eandẽ habent proportionem cum prismatis, [d] quod illæ sint horũ tertiæ partes: Perspicuum est, ita quoque esse pyramidem ad pyramidem, vt est altitudo ad altitudinem.

EADEM prorsus est ratio habenda de parallelepipedis, cum parallelepipeda comprehendantur etiam nomine prismatum, vt dictum est; atque ob id eadem illis demonstratio possit accommodari.

HAEC omnia eodem fere modo demonstrabuntur de conis, & cylindris, nec non de pyramidibus, & prismatis eandem habentibus basem.

OMNIA

OMNIA quoq; hæc facile conuerti possunt hoc modo.

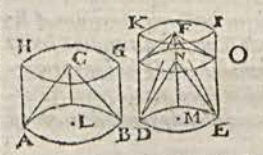
CONI & cylindri tam recti, quam scaleni; Item prismata, parallelepipeda, & pyramides, proportionem habentes eandem, quam altitudines, bases habebunt æquales.

NAM alia pars æqualis foret toti, vt in conuerso prop. 31. lib 11. ostensum est.

12. THEOR. 15. PROPOS. 15.

AEQVALIVM conorum, & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines: & quorum conorum, & cylindrorũ reciprocantur bases & altitudines, illi sunt æquales.

SINT æquales coni ABC, DEF, & æquales cylindri ABGH, DEIK, quorum bases AB, DE; axes, altitudines ve LC, MF. Dico bases & altitudines esse reciprocas, hoc est, esse vt AB, ad DE, ita MF, ad LC. In cylindris quidem sic propositum ostendetur. Si altitudines LC, MF, sint æquales, cum cylindri ponantur quoque æquales; erunt & bases æquales, ex coroll. propos. 11. huius lib. Quare erit vt basis AB, ad basin æqualem DE, ita altitudo MF, ad altitudinem æqualem LC. Ac proinde bases atque altitudines sunt reciprocæ.



QVOD si altitudines LC, MF, inæquales fuerint, sit MF, maior, ex qua abscindatur MN, ipsi LC, æqualis; & per N, ducatur planum ON, basi DE, parallelum, vt

vt in scholio propos. 11. docuimus, vt fiant duo cylindri DO, OK. Quoniam igitur æquales ponuntur cylindri ABGH, DEIK; [a] erit vt cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita cylindrus DEIK, ad eundem cylindrum DO. [b] Est autem vt cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita basis AB, ad basin DE, cum æquales sint altitudines: [c] Itẽ vt cylindrus DEIK, ad cylindrum DO, ita altitudo MF, ad altitudinem MN, cum bases sint æquales, immo vna & eadem DE. Igitur erit quoque vt basis AB, ad basin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem MN, hoc est, ad huic æqualem LC; Ac propterea reciprocæ sunt bases & altitudines.

[a] 7. quinti.
[b] 11. duod.
[c] 14. duod.

IN conis vero ita concludemus propositum. Si coni ABC, DEF, sint æquales; erunt & cylindri ABGH, DEIK, æquales, [d] cum coni sint cylindrorum tertiæ partes. Quare vt ostensum est, ex æquaiitate cylindrorum sequetur, bases & altitudines esse reciprocas; Ac propterea, ex æqualitate conorum etiam sequetur, bases & altitudines reciprocas esse. Quod tamen eodem prorsus modo demõstrari potest, quo vsi sumus in cylindris, si modo sub altitudinibus MN, NF constituãtur duo coni, vt in figura.

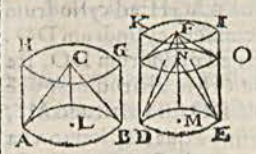
[d] 10. duod.

SED iam bases atque altitudines reciprocentur. Dico conos & cylindros esse æquales. Quod quidẽ in cylindris confirmabitur hac ratione. Si altitudines LC, MF, sint æquales, cum sit vt basis AB, ad basin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem æqualem LC; erunt & bases AB, DE, æquales: Ac propterea cylindri super æquales bases AB, DE, & sub altitudinibus æqualibus LC, MF, æquales erunt, ex coroll. propos. 11. huius lib.

QVOD si altitudines fuerint inæquales, fiat constructio, vt prius. Quia igitur ponitur, vt basis AB, ad basin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem LC, hoc est, ad huic æqualem MN; [e] Est autem vt basis AB, ad basin DE, ita cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, cum altitudines sint æquales: [f] Item vt altitudo MF, ad altitudinem MN, ita cylindrus DEIK, ad cylindrum DO, cum bases sint æquales; erit vt cylindrus ABGH, ad cylindrũ DO, ita cylindrus DEIK, ad eundem cylindrum DO;

[e] 11. duod.
[f] 14. duod.

[a] ideoq; cylindrus ABGH, cylindro DEIK, æqualis erit. AT vero in conis hæc erit demõstratio. Si conorũ



ABC, DEF, bases & altitudines reciprocẽtur, reciprocabũtur quoq; bases, & altitudines cylindrorum ABGH, DEIK, cũ eædem sint bases, altitudinesque conorum, & cylindrorum. Quam ob rem, vt ostensum fuit, cylindri, ideoque coni, eorum tertiæ partes, æquales erunt. Demonstrari tamen potest eodem modo conos esse æquales, quo ostẽdimus cylindros æquales esse. Aequalium igitur conorum & cylindrorum reciprocãtur bases & altitudines, &c. Quod erat demonstrandũ.

[a] 9. quinti.

SCHOLIVM.

NON difficile erit idẽ ostendere de conis, & cylindris scalenis. Si enim æquales sint coni & cylindri scaleni, erunt quoque recti eisdem cum illis bases, & altitudines habentes, æquales, ex coroll. propos. 11. huius lib. Quare vt ostensum est, bases & altitudines reciprocabuntur. Quod si bases, & altitudines conorum & cylindrorum scalenorum reciprocentur, reciprocabuntur quoque bases & altitudines conorum & cylindrorum rectorum, si eadem sint bases, & altitudines rectorum & scalenorum. Quare, vt demonstratum est, coni & cylindri recti æquales erunt; Ac propterea coni & cylindri scaleni, cum sint rectis æquales, ex coroll. propos. 11. huius lib. inter se quoque erunt æquales.

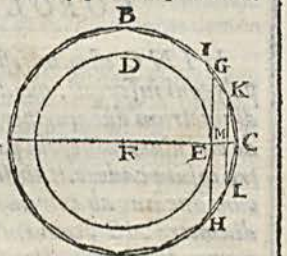
IDEM facile concludetur, licet vnus conorum & cylindrorum sit rectus, & alter scalenus, vt perspicuum est ex ijs, quæ in scholio propos. 14. huius lib. docuimus.

13. PROBL. 1. PROPOS. 16.

DVOBVS circulis circa idem centrum existentibus, in maiori circulo polygonum

lygonum æquilaterum, & parium laterum inscribere, quod non tangat minorem circulum.

SINT duo circuli ABC, DE, circa idẽ centrũ F, oporteatq; in maiori ABC, inscribere polygonũ æquilaterũ, cuius latera numero pari cõtinentur, nõ tangens minorem DE. Extendatur per centrum F, recta AC, secãs circulum DE, in E, puncto, & per E, ducatur GH, ad AC, perpendicularis, quæ tanget circulum DE, in E, ex coroll. propos. 16. lib. 3.



Quoniã igitur arcus AGC maior est arcu GC, si ex AGC, auferatur dimidium AB, & ex residuo BC, dimidium BI, & ex residuo IC, dimidium IK, & sic deinceps; [a] relinquetur tandem minor arcus quã CG. Sit igitur iã arcus CK, arcu CG, minor, & subtẽdatur recta CK. Dico rectã CK, esse vnum latus polygoni inscribendi. Si enim arcus BI, diuidatur in partes numero & magnitudine æquales partibus arcus CI; & quadrãs AB, in totidẽ partes æquales diuidãt, in quot diuisus ẽ quadrans BC; necnõ semicirculus AHC, in totidẽ partes, quot cõtinet semicirculus ABC; deinde oĩbus arcubus rectę lineę subtẽdãtur, [b] quę æquales quidẽ erunt ipsi rectæ CK, eo quod arcus arcui CK, æquales subtendant: Descriptũ erit polygonum in circulo ABC, & æquilaterum, & parium laterum. Quod quidẽ non tangere circulum minorem DE, ita ostendetur. Ex K, ad AC, demittatur perpendicularis KL, secans ipsam AC, in M. Qm̃ igitur anguli GEM, KME, recti sũnt; [c] erũt rectę GH, KL parallelæ. Quare cũ recta GH, tãgat circulũ DE, in solo puncto E; recta KL, erit tota extra dictũ circulũ, nec vnquam ipsum continget, quod nunquã cum recta GH, cõueniat. Multo igitur minus recta CK, quæ longius a circulo DE, abest, quam KL, circulum DE, tanget. Ac

[a] 1. decimi

[b] 29. tertij.

[c] 28. primi

propterea neque alia latera polygoni inscripti, cũ æqualia sint lateri CK, ideoque æqualiter cum CK, a centro F, distent, circulum DE, contingent. Duobus itaque circulis circa idem centrum existẽtibus, in maiori circulo, &c. quod erat faciendum.

[a] *14. tertij.*

COROLLARIVM.

HINC est manifestum, si ab extremitate lateris polygoni inscripti, quod cum diametro conuenit, ad diametrum ducatur perpendicularis, hanc nullo modo circulum minorem posse contingere, sed totam extra ipsum cadere. Huiusmodi enim est linea KL, quæ cum ducatur ab extremo puncto K. lateris CK, cum diametro AC, conuenientis, ad AC, diametrum perpendicularis, ostensa est non tangere circulum DE.

14. PROBL. 2. PROPOS. 17.

DVABVS sphæris circa idem centrum existentibus, in maiori sphęra solidum polyedrum inscribere, quod non tangat minoris sphæræ superficiem.

SINT duæ sphęræ ABCD, EFGH, circa idem centrum I, oporteatque in maiori ABCD, inscribere solidũ polyedrum, seu multilaterum, quod non tangat minorẽ sphæram EFGH. Secentur ambæ sphæræ plano aliquo p centrum, sintq; communes sectiones factæ in sphęris plana ABCD, EFGH, quæ circuli erunt, ex descriptione sphæræ, habentes idem centrum sphærarum I. Nam semicirculi, ad quorum circumuolutionem sphæræ describuntur, circumducti congruent sectionibus ABCD, EFGH. Quare dictæ sectiones circuli erunt. Vel certe, quia omnes

omnes lineæ rectę cadentes ex I, ad peripherias sectionũ sunt æquales, cum ducãtur ex centro sphærarum ad earum superficiem; erunt ipsæ sectiones, circuli, ex definitione circuli. Ducãtur in his circulis diametri AC, BD, se se in centro I, secantes ad angulos rectos, vt sint quadrantes AB, BC, CD, DA, &c. Deinde in maiori circulo ABCD, inscribatur polygonum non tangens minorem circulum EFGH. Quod quidẽ vt facilius omnia demonstrentur, in hunc modum efficiatur. Ex G, ad EG, ducatur perpendicularis Gγ, ad circumferentiam vsq; circuli ABCD, quæ circulũ EFGH, tanget in G, ex coroll. propos. 16. lib. 3. Et rectę Gγ, [b] applicetur in circulo ABCD, recta æqualis Aε. Quia vero si arcui Cγ, intelligatur subtendi recta, vt fiat triangulum GCγ, [c] latus Cγ, oppositũ maiori angulo, nẽpe recto, maius est latere Gγ, quod minori angulo opponitur, nimirum acuto; erit quoq; recta Cγ, maior recta Aε; ac proinde arcus Cγ, arcu Aε, maior erit, vt constat ex scholio propos. 28. lib. 3. Abscindatur ergo arcus Cζ, arcui Aε, æqualis. Quod si ex quadrante CD, dimidiũ auferatur DL, & ex reliquo CL, dimidiũ LK, & sic deinceps; relinquetur tandẽ arcus minor arcu Cζ, seu arcu Aε. Sit ergo iam arcus CK, minor; Eritq; recta CK, subtensa minor quam recta Aε, hoc est, quam Gγ, ex scholio propos. 29. lib. 3. Dico igitur, rectã CK, esse vnum latus polygoni æquilateri inscribendi. Nam cum recta subtendens arcum Cζ, minorem arcu Cγ, non tãgat circulum EFGH, vt ex demonstratione præcedentis propos. patet, multo minus recta CK, subtendens arcum minorem arcu Cζ, eundem circulũ tanget. Rursus ducta diametro KN, [e] erigatur ex centro I, ad plana circulorũ ABCD, EFGH, perpendicularis IO, occurrens superficiei sphæræ maioris in O; Et per rectas OI, AC, & OI, KN, plana ducantur, [f] quæ ad circulum ABCD, recta erunt, efficientq; cõmunes sectiones, circulos, vt iam dictũ ẽ, quorũ semicirculi sint AOC, NOK. Quia vero anguli OIC, OIK, recti sunt, ex defin. 3. lib. 11. [g] quadrantes erunt OC, OK; atq; adeo cum circuli ABCD, AOC, NOK, æquales sint, quod eorum diametri sint & sphæræ maioris diametri, erunt quoq; quadrantes CD, OC,

[a] *16. duod.*

[b] *1. quarti.*

[c] *19. primi.*

[d] *1. decimi*

[e] *12. vnde.*

[f] *18. vnde.*

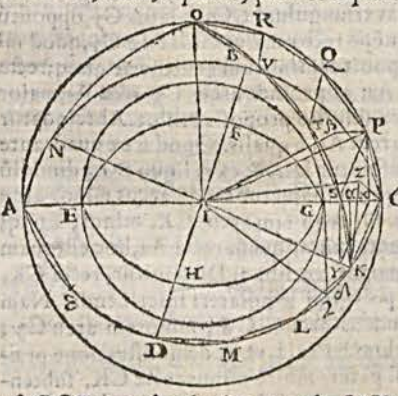
[g] *schol. 22. tertij.*

OC, OK, æquales. Si igitur arcus DL, in tot partes æquales distribuatur, in quot diuisus fuit arcus CL; & quadrantes OC, OK, in arcus numero & magnitudine æquales arcubus quadrãtis CD; Erunt rectæ his omnibus arcubus æqualibus subtensæ, nimirum CK, KL, LM, MD; CP, PQ, QR, RO; KS, ST, TV, VO, æquales. Coniunctis autem rectis PS, QT, RV, demittantur ex P, & S, ad planum circuli ABCD, perpendiculares PX, SY, quæ communes sectiones AC, NK, cadent; eruntque inter se parallelæ.

a 29. tertij.
b 38. vnde.
c 6. vndec.

QVONIAM igitur triangulorum PCX, SKY, anguli PXC, SYK, recti sunt, ex defin. 3. lib. 11. & anguli PCX, SKY, æquales, quod & æquales sint peripheriæ AOP, NOS, quibus insistunt; (Nam si ex semicirculis AOC, NOK, æqualibus demantur arcus æquales CP, KS, reliqui arcus AOP, NOS, æquales quoq; erunt.) Erunt duo anguli PCX, PXC, trianguli PCX, æquales duobus angulis SKY, SYK, trianguli SKY: Sũt autẽ & latera PC, SK, rectis angulis opposita, æqualia. Igitur reliqua latera PX, XC, reliquis lateribus SY, YK, æqualia erunt. Quare cum rectæ PX, SY, æquales sint & parallelæ; si connectatur recta XY; æquales quoque erunt & parallelæ PS, XY, inter se.

d 27. tertij.
e 26. primi
f 33. primi
g 2. sexti.



g At quia & rectæ CK, XY, parallelæ sunt, quod latera IC, IK, proportionaliter secta sint. (Si enim ex semidiametris IC, IK, æqualibus demãtur æquales rectæ CX, KY relinquẽtur & IX, IY, æquales; Ac proinde erit, vt IX, ad XC, ita IY, ad YK.) h Erũt parallelæ quoq; PS, CK, inter se, cum

h 9. vndec.

se, cum vtraq; parallela sit ipsi XY; a ideoque eas coniungentes rectæ CP, KS, in eodem cum ipsis plano existent. Totũ igitur quadrilaterũ CKSP, in vno erit plano. Quod si ex Q, & T, demittantur ad planum circuli ABCD, perpediculares, & cõnectantur rectæ QC, TK, ostẽdemus similiter CK, QT, esse parallelas; atq; adeo ipsas PS, QT, inter se parallelas esse, cũ eidẽ CK, sint parallelæ; totũq; quadrilaterũ PSTQ, in vno esse plano. Eadẽ ratione in vno erit plano qnadrilaterũ QTVR. b Est autẽ & triangulũ RVO, in vno plano. Si igitur eadẽ constructio exhibeatur super reliqua latera KL, LM, MD, ductis scilicet quadrantibus OL, OM, OD; necnon in reliquis tribus quartis, ac reliquo hemisphærio, vt tota sphæra maior repleatur quadrilateris, & triangulis, quæ similia sint prædictis inter quadrantes OC, OK, super latus CK, cõstructis; inscriptũ erit in sphæra maiori solidũ polyedrũ circunscriptũ dictis quadrilateris, atq; triãgulis. Hoc ergo dico non tangere sphæram minorem EFGH.

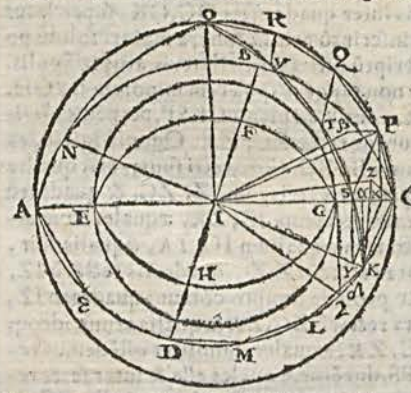
a 7. vndec.
b 2. vndec.

DVCATVR. n. ex I, ad planũ CKSP, perpẽdicularis IZ, connectanturque rectæ ZC, ZK. Quoniã igitur, ex defin. 3. lib. 11. anguli IZC, IZK, recti sunt; c erit quadratum rectæ IC, quadratis rectarum IZ, ZC, & quadratũ rectæ IK, quadratis rectarum IZ, ZK, æquale. Cum ergo quadrata rectarum æqualium IC, IK, æqualia sint, erunt & quadrata rectarũ IZ, ZC, quadratis rectarũ IZ, ZK, æqualia; Ac proinde dempto cõmuni quadrato IZ, reliqua quadrata rectarũ ZC, ZK, æqualia erunt, ideoq; & ipsæ rectæ ZC, ZK, æquales. Similiter ostẽdemus rectas, q ex Z, ad PS, ducẽtur, æquales esse & inter se, & rectis ZC, ZK. Quare circulus ex Z, ad interuallũ ZC, descriptus p quatuor pũcta C, K, S, P, trãsibit. Eadẽq; rõne circa reliqua quadrilatera PSEQ, QTVR, & triangulũ RVO, circulos describi posse, demõstrabimus. Qm vero, vt postea ostẽdemus, angulus CZK, obtusus est; erit quadratum rectæ CK, maius quadratis rectarum ZC, ZK; ideoque cum hæc quadrata æqualia sint, maius erit quadratum rectæ CK, duplo quadrati rectæ ZC.

c 47. primi.
d 12. secun.

DVCATVR ex K, ad rectã AC, perpendicularis Kα. Cum igitur AC, dupla sit ipsius AI, & Aα, maior sit,

quã AI, erit AC, minor duplo ipsius Aα. Quã ob ré cum
[a] 1. sexti. sit, vt AC, ad Aα, ita rectangulũ sub AC, αC, ad rectangulũ sub Aα, αC, quod bases horum rectangulorum sint AC, Aα, & eadẽ altitudo αC; erit quoq; rectãgulum sub AC, αC, minus duplo rectanguli sub Aα, αC. [b] Est autem
[b] 17. sexti. rectangulũ sub AC, αC, ęquale quadrato rectę CK; & rectangulũ sub Aα, αC, æquale quadrato rectæ Kα; quod recta CK, inter AC, αC, sit media proportionalis; & recta Kα, inter Aα, αC, ex coroll. propos. 8. lib. 6. (si enim connecteretur recta AK, fieret triangulum rectangulum ACK.) Igitur & quadratum rectæ CK, minus erit duplo quadrati rectæ Kα. Ac propterea cum quadratum rectæ CK, ostensum sit maius esse duplo quadrati rectæ ZC; erit quadratũ rectæ Kα, maius quadrato rectæ ZC.



[c] 47. primi [c] Quoniã vero quadratũ rectæ IC, æquale est quadratis rectarũ IZ, ZC; & quadratũ rectæ IK, quadratis rectarum Iα, αK: Suntque ęqualia quadrata rectarũ ęqualiũ IC, IK; Erunt & quadrata rectarum IZ, ZC, ęqualia quadratis rectarũ Iα, αK. Si ergo ex his dematur quadratum maius, nempe rectę αK; & ex illis minus, videlicet rectę ZC, erit reliquum quadratũ rectę IZ, maius quadrato reliquo rectæ Iα; ideoque recta IZ, maior quam recta Iα. Quapropter cum punctum α, non tãgat sphæram minorem EFGH, quod per coroll. propos. præcedentis recta Kα, tota sit extra dictam sphæram; multo minus punctum Z, longius distans, eandem sphæram continget. Ac proinde cũ omnia alia puncta plani CKSP, longius absint à sphæra EFGH,

EFGH, quam punctum Z, vt mox ostendemus, non tanget planum CKSP, sphæram EFGH.

SED & expeditius ex ipsa fere constructione figuræ ostendemus, planum CKSP, non tangere sphæram minorem EFGH, si prius ducatur recta Iγ, hoc modo. Quoniam ex constructione ostensum fuit, rectam CK, minorem esse recta Cγ: [a] Est autem CK, maior quam ZC, quod angulus CZK, obtusus sit, vt mox demonstrabitur; Multo maior erit Gγ, quam ZC; Ac proinde quadratum rectæ Gγ, maius quadrato rectæ ZC. [b] Quia vero quadratum rectæ Iγ, æquale est quadratis rectarum IG, Gγ; & quadratum rectæ IC, quadratis rectarum IZ, ZC; sunt autem quadrata rectarum Iγ, IC, æqualium æqualia; erunt & quadrata rectarum IG, Gγ, quadratis rectarum IZ, ZC, æqualia. Dempto ergo illinc quadrato rectæ Gγ, & hinc quadrato rectæ ZC; relinquetur quadratum rectæ IG, minus quadrato rectæ IZ; Ac propterea recta IG, minor, quam IZ. Quam ob rem, cum IG, sit sphæræ minoris EFGH, semidiameter; existet punctum Z, extra eandem sphæram; Et proinde, vt prius, planum CKSP, sphæram EFGH, nequaquam continget.

[a] 19. primi

[b] 47. primi

DVCATVR rursus ex I, ad planum PSTQ, perpendicularis Iβ, eritque β, centrum circuli circa PSTQ, descripti, vt demonstratum est: Connexis autem rectis βP, IP, cum angulus IβP, rectus sit, ex 3. defin. lib. 11. [c] erit quadratum rectæ IP, æquale quadratis rectarum Iβ, βP. Quia uero & quadratum rectæ IC, (quod æquale est quadrato rectæ IP, ob æqualitatem rectarum IC, IP,) æquale est quadratis rectarum IZ, ZC; erunt quadrata rectarum Iβ, βP, quadratis rectarum IZ, ZC, æqualia: Est aũt quadratum rectæ ZC, maius quadrato rectæ βP, quod & linea ZC, maior sit, quam linea βP, vt postea ostendemus. Reliquum igitur quadratum rectæ Iβ, reliquo quadrato rectæ IZ, maius erit; ideoque & linea Iβ, maior quam linea IZ: Ac proinde multo magis punctum β, extra sphæram EFGH, existet, quam punctum Z; propterea que multo minus planum PSTQ, quam CKSP, tanget sphæram

[c] 47. primi

ram minorem E F G H. Eodem modo demonstrabimus, quod neque reliqua plana sphæram dictam contingere possint. Quocirca, duabus sphæris circa idem centrum existentibus, in maiori sphæra solidum polyedrum inscripsimus, quod non tangat minoris sphæræ superficiem. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

EX iis, quæ demonstrata sunt, manifestum est, si in quauis alia sphæra describatur solidum polyedrum simile prædicto solido polyedro, proportionem polyedri in vna sphæra ad polyedrum in altera sphæra esse triplicatam eius, quam habent sphærarum diametri. Nam si ex centris sphærarum ad omnes angulos basium dictorum polyedrorum rectæ lineæ ducantur, distribuentur polyedra in pyramides numero æquales, & similes, quarum homologa latera sunt semidiametri sphærarum; vt constat, si intelligatur harum sphærarum minor intra maiorem circa idem centrum descripta. Congruent enim sibi mutuo lineæ rectæ ductæ a centris ad basium angulos, ob similitudinem basium; Ac propterea pyramides efficientur similes. Quare cum singulæ pyramides in vna sphæra ad singulas pyramides illis similes in altera sphæra habeant proportionem triplicatam laterum homologorum, hoc est, semidiametrorum sphærarum, vt constat ex coroll. propos. 8. huius lib. Sint autem, vt vna pyramis ad vnam pyramidem, ita omnes pyramides, hoc est, solidum polyedrum ex ipsis compositum, ad omnes pyramides, id est, ad solidum polyedrum ex ipsis constitutum: Habebit quoque polyedrum vnius sphæræ ad polyedrum alterius sphæræ proportionem triplicatam semidiametrorum, atque adeo diametrorum sphærarum, [a] *cum semidiametri atque diametri eandem habeant proportionem.*

[a] 15. quinti

SCHOLIVM.

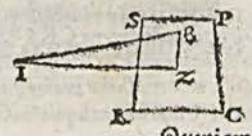
QVONIAM vero ne nimis longa demonstratio fieret, nonnulla in ea assumpta fuerunt, vt vera; qua tamen nondum sunt demonstrata; idcirco ea nunc breuiter a nobis erunt demonstranda.

PRIMVM itaque ostendendum est, angulum C Z K, in quadrilatero C K S P, esse obtusum. Quod vt commodius fiat, describatur circa dictum quadrilaterum ex centro Z, circulus. Quoniam igitur in figura superiori, est vt I K, ad K C, ita I Y, ad Y X, (quod per coroll. propos. 4. lib. 6. triangula I C K, I X Y, similia sint.) Est autem I K, maior quam I Y; [b] erit & K C, maior quam Y X. Cum igitur Y X, æqualis sit ostensa ipsi S P, erit quoque K C, maior quam S P; Ac propterea arcus C K, maior erit arcu S P, ex scholio propos. 28. lib. 3. [c] Quare cum arcus C P, K S, arcui C K, sint æquales, quod & lineæ C P, K S, ipsi K C, lineæ sint æquales demonstratæ; (subtenduntur enim arcubus circulorum æqualibus, vt ex constructione figuræ superioris constat) erunt quoque arcus C P, K S, arcu P S, maiores; Atq; idcirco quilibet arcuum C K, C P, K S, quadrantem circuli C K S P, excedet; atque adeo angulus C Z K, obtusus erit, nempe recto maior, cum angulo recto in centro subtendatur quadrans circuli, vt perspicuum est ex scholio propos. 27. lib. 3.

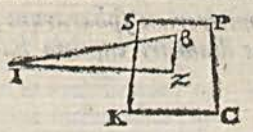
[b] 14 quin.

[c] 28. tertij

SECVNDO demonstrandum est, omnia alia puncta quadrilateri C K S P, longius a centro I, abesse, quam punctum Z. Sumatur enim quodcunque aliud punctum θ, in quadrilatero C K S P, & adiungantur rectæ I θ, Z θ.



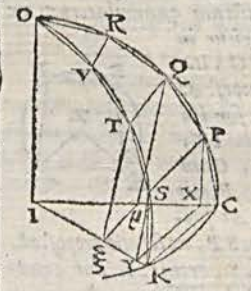
Quoniam



Quoniã ergo angulus IZθ, rectus est, ex defin. 3. lib. 11. [a] Erit latus illi oppositum Iθ, maius latere IZ, quod minori angulo IθZ, nimirũ acuto, opponitur; Ac propterea punctum θ, longius a centro I, distat, quam punctum Z. Simili argumento concludemus, omnia alia puncta longius distare.

a 19. primi

TERTIO, ac vltimo probandum est, rectam ZC, maiorem esse recta βP. Quod vt aptius fiat, demonstrandum prius erit, rectam PS, maiorem esse recta QT. Describatur igitur pars superioris figuræ, ea videlicet, quæ continetur semidiametris IC, IO, & quadrantibus OC, OK, &c. Demittantur deinde ex Q, & T, ad planum circuli ABCD, in quo est triangulum ICK, perpendiculares Qμ, Tξ, [b] quæ in communes sectiones IC, IK, cadent, [c] eruntque inter se parallelæ, vt de rectis PX, SY, dictum est. Quod si adiungatur recta μξ, erunt QT, μξ, parallelæ & æquales, quemadmodum ostensum fuit parallelas esse & æquales PS, XY. [d] Quia vero μξ, ipsi CK, parallela est; quod latera IC, IK, proportionaliter sint secta in μ, & ξ, veluti diximus de recta XY; [e] erunt quoque μξ, XY, parallelæ. Quare erit, ex coroll. propos. 4. lib. 6. vt IY, ad YX, ita Iξ, ad ξμ: Est autem IY, maior quam Iξ. Igitur & YX, maior erit quam ξμ; Ac proinde & PS, quæ æqualis est ipsi XY, maior erit quam QT, quæ æqualis est ipsi ξμ.

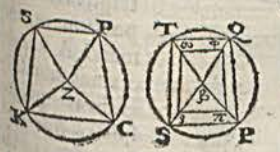


b 38. vnde.
c 6. vnde.
d 2. sexti
e 30. primi

HOC ergo demonstrato, describantur ex centris Z, β, circa quadrilatera CKSP, PSTQ, circuli, egredianturque e centris rectæ ZC, ZK, ZS, ZP; βP, βS, βT, βQ. Si igitur ZC, non credatur maior, quam βP, erit vel æqualis, vel minor. Sit primum æqualis. Quia ergo latera ZK, ZC, æqualia ponuntur lateribus βS, βP, & basis KC, maior est basi PS; [a] erit angulus KZC, maior angulo SβP: Eadem ratione maior erit angulus SZP, angulo TβQ. At quoniam bases KS, CP, basibus ST, PQ, sunt æquales; [b] erunt anguli KZS, CZP, angulis SβT, PβQ, æquales. Igitur quatuor anguli ad Z, maiores erunt quatuor angulis ad β: Sunt autem & æquales, cum tam hi, quam illi quatuor rectis sint æquales, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. quod est absurdum. Non igitur æqualis est recta ZC, rectæ βP.

a 25. primi
b 8. primi

SIT deinde ZC, minor, quam βP. Et abscindantur βπ, βρ, βω, βφ, ipsis ZC, ZK, ZS, ZP, æquales, connectanturque rectæ πρ; ρω, ωφ, φπ, [c] quæ parallelæ erunt rectis PS, ST, TQ, QP, eo quod rectæ ex centris sectæ sũt proportionaliter; ac proinde, ex coroll. propos. 4. lib. 6. erit vt βS, ad SP, ita βρ, ad ρπ. Cum ergo βS, maior sit quam βρ, [d] erit & SP, maior quam ρπ. Eademque ratione maiores erunt ST, TQ, QP, rectis ρω, ωφ, φπ; Ac propterea cum PS, minor sit, quam CK, & ST, PQ, æquales rectis KS, CP; & TQ, minor quam PS, erunt rectæ πρ, ρω, ωφ, φπ, minores rectis CK, KS, SP, PC. Quare cum rectæ βπ, βρ, βω, βφ, rectis ZC, ZK, ZS, ZP, sint æquales; [e] erunt anguli ad Z, maiores angulis ad β: Sunt autem & æquales. quod tam illi, quam hi sint quatuor rectis æquales, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. Quod est absurdum. Non igitur minor est recta ZC, quam βP: Sed neque æqualis est ostensa; Maior igitur est. Quod erat ostendendum.



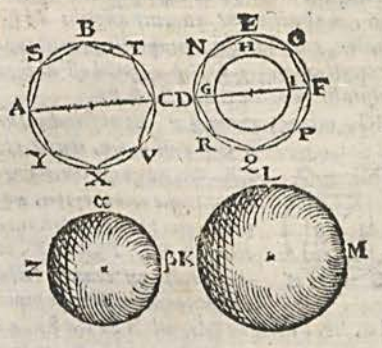
c 2. sexti
d 14. quin.
e 25. primi

THEOR. 16. PROPOS. 18. 15.

SPHAERAE inter se sunt in triplicata ratione suarum diametrorum.

SINT

SINT duæ sphæræ A B C, D E F, quarum diametri A C, D F. Dico sphæram A B C, ad sphæram D E F, habere proportionem triplicatam diametri A C, ad diametrum D F. Si enim hoc non concedatur, habebit sphęra A B C, ad aliam sphæram G H I, minorem, vel K L M, maiorem, quã D E F, triplicatam proportionem diametri A C, ad diametrum D F. Habeat primũ sphera A B C, ad sphęram G H I, minorem sphæra D E F, proportionem triplicatam diametri A C, ad diametrum D F; intelligaturque sphæra G H I, concentrica sphæræ D E F. [a] Inscribatur in sphæra maiori D E F, polyedrum D N E O F P Q R, non tangens minorem sphæram G H I; Atque huic simile polyedrum A S B T C V X Y, inscribatur in sphæra A B C. Quoniam igitur ponitur proportio sphæræ A B C, ad sphæram G H I, triplicata proportionis diametri A C, ad diametrum D F: Est autem, per coroll. præcedentis propos. & proportio polyedri A S B T C V X Y, ad polyedrum D N E O F P Q R, triplicata proportionis diametri A C, ad diametrum D F; Erit vt sphæra A B C, ad sphæram G H I, ita polyedrum A S B T C V X Y, ad polyedrum D N E O F P Q R. Quare cum sphæra A B C, maior sit polyedro A S B T C V X Y, [b] erit & sphæra G H I, maior polyedro D N E O F P Q R, pars toto. Quod est absurdum. Non igitur habebit sphæra A B C, ad sphæram G H I, minorem sphæra D E F, proportionem triplicatam diametri A C, ad diametrum D F.



a 17. duod.

b 14. quin.

HA-

HABEAT secundo sphæra A B C, ad sphæram K L M, maiorem sphæra D E F, proportionem triplicatam diametri A C, ad diametrum D F. Cum igitur, ex coroll. præcedentis propos. & polyedrum A S B T C V X Y, ad polyedrum D N E O F P Q R, habeat proportionem triplicatam diametri A C, ad diametrum D F; Erit vt sphæra A B C, ad sphæram K L M, ita polyedrum A S B T C V X Y, ad polyedrum D N E O F P Q R: Et conuertendo, vt sphęra K L M, ad sphęram A B C, ita polyedrum D N E O F P Q R, ad polyedrum A S B T C V X Y: Est autem ex dicto coroll. præcedentis propositionis polyedrum D N E O F P Q R, ad polyedrum A S B T C V X Y, in triplicata proportione diametri D F, ad diametrum A C. Igitur & sphæra K L M, ad sphæram A B C, erit in triplicata proportione diametri D F, ad diametrum A C. Ponatur vt sphæra K L M, ad sphæram A B C, ita sphæra D E F, ad aliam sphæram Z αβ. Habebit igitur & sphæra D E F, ad sphæram Z αß, proportionem triplicatam diametri D F, ad diametrum A C. Et quia sphæra K L M, maior ponitur, quam sphæra D E F, erit quoque sphæra A B C, maior, quam sphæra Z αβ. Quapropter sphæra D E F, ad sphæram Z αβ, minorem sphæra A B C, proportionem habet triplicatam diametri D F, ad diametrum A C. Quod est absurdum. Ostensum enim est non posse sphæram ad sphæram alia sphæra minorem, proportionem habere triplicatam diametrorum. Non ergo habebit sphæra A B C, ad sphæram K L M, maiorem sphæra D E F, proportionem triplicatam diametri A C, ad diametrum D F. Sed neque ad minorem habet, vt demonstratum est: Igitur habebit ad sphæram D E F, proportionem triplicatam diametri A C, ad diametrum D F. Sphęræ itaq; inter se sunt in triplicata ratione suarum diametrorum. Quod erat ostendendum.

HINC

COROLLARIVM.

HINC fit, ita esse sphæram ad sphæram, vt polyedrum in illa descriptum ad polyedrum simile in hac descriptum. Quia tam sphæra ad sphæram, quam polyedrum ad polyedrum habet triplicatam diametrorum proportionem, vt demonstratum est.

FINIS ELEMENTI DVODECIMI.

EVCLI-

EVCLIDIS

ELEMENTVM TERTIVMDECIMVM.

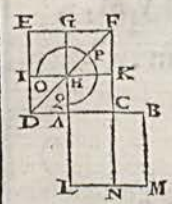
Et Solidorum tertium.

THEOR. 1. PROPOS. 1. 1.

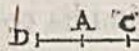
SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur; maius segmentum assumẽs dimidiam totius, quintuplum potest eius, quod a dimidia totius describitur, quadrati.

SECETVR recta *A B*, in *C*, extrema ac media ratione, sitque maius segmentum *A C*. Producta autem *B A*, ad *D*, sit *A D*, dimidia totius *A B*. Dico quadratum rectæ *C D*, quintuplum esse quadrati rectæ *A D*. Describatur enim super *C D*, quadratum *C E*, in quo ducta diametro *D F*, ducatur *A G*, ipsi *D E*, parallela, secans diametrum in *H*, puncto, per quod ducatur *I K*, parallela ipsi *C D*. Producta deinde *G A*, perficiatur quadratum *A M*, protrahaturque *F C*, ad *N*. eruntque

ex coroll.propos.4. lib.2. AI, KG, quadrata rectarum AD, AC. [a] Quia ergo est vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; [b] erit rectangulũ CM, sub AB, CB, æquale ipsi KG, quadrato rectæ AC. Deinde cum ponatur AB, dupla ipsius AD, sitque AL, ipsi AB; & AH, ipsi AD, æqualis; erit quoque AL, ipsius AH, dupla: [c] Est autẽ vt AL, ad AH, ita rectangulum AN, ad AK, rectangulum. Duplum igitur est AN, ipsius AK. [d] Quoniam autem AK, ipsi IG, est æquale; erit AN, æquale duobus AK, IG. Additis igitur æqualibus CM, KG; erit quadratum AM, gnomoni OPQ, æquale. Quare cum quadratum AM, quadruplum sit quadrati AI, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod linea AB, dupla ponatur lineę AD; erit & gnomon OPQ, eiusdem quadrati AI, quadruplus; Ac propterea, si gnomoni OPQ, addatur ipsum quadratum AI, quintuplum efficietur quadratum CE, quadrati AI.



ALITER. Ex scholio propos. 4. lib. 2. quadratum rectæ AB, quadruplum est quadrati rectæ AD, quod linea AB, dupla lineæ AD, ponatur. [e] Est autem quadratum rectæ AB, æquale rectangulis sub AB, AC, & sub AB, BC, comprehensis; Et rursus, quod sub AB, AC, æquale est ei, quod sub AD, AC, bis; (sicut enim AB, ipsius AD, est dupla, [f] ita quoque erit rectangulum sub AB, AC, rectanguli sub AD, AC, duplum, cum vtriusq; rectanguli eadem sit altitudo AC. Ac propterea rectangulum sub AD, AC, bis sumptum æquale erit rectangulo sub AB, AC.) [g] Quod vero sub AB, BC, æquale est quadrato rectæ AC, cum sit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB. Igitur quadratum rectæ AC, vna cum rectangulo sub AD, AC, bis, quadruplum quoque erit quadrati rectæ AD; Ac proinde quadrata rectarum AC, AD, vna cum rectangulo sub AD, AC, bis, quintupla erunt quadrati eiusdem rectæ AD. [h] Quocirca cum quadratum rectæ CD, æquale sit quadratis rectarum AC, AD, vna cum rectangulo sub AD, AC, bis; Erit & quadratum rectæ



[a] 3. defin. sexti.
[b] 17. sexti.
[c] 1. sexti
[d] 43. primi
[e] 2. secundi
[f] 1. sexti.
[g] 17. sexti
[h] 4. secun.

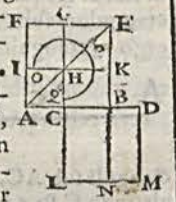
rectæ CD, quadrati rectæ AD, quintuplum. Si recta igitur linea secundum extremam & mediam rationem secetur, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

2.

SI recta linea suijpsius segmenti quintuplum posit; Duplæ prædicti segmenti extrema ac media ratione sectæ, maius segmentum reliqua pars est eius, quæ a principio, rectæ.

DIVISA sit recta AB, in C, positque quintuplum segmenti AC; sumatur autẽ ipsius AC, dupla CD, quę, vt post ostẽdemus, maior erit reliquo segmento BC. Dico si CD, secetur extrema ac media ratione, maius segmentum esse CB, reliquã partem prioris lineę. Describatur. n. I super AB, quadratum BF, in quo ducta diametro AE, ex C, ducatur ipsi AF, parallela CG, secans diametrum in puncto H, per quod agatur IK, parallela ipsi AB. Producta deinde GC, perficiatur quadratum CM, protrahaturq; EB, ad N. Eruntque ex coroll. propos. 4. lib. 2. CI, KG, quadrata rectarum AC, CB. Quia igitur quadratum BF, quintuplũ ponitur quadrati CI; Si tollatur quadratũ CI, relinquetur gnomon OPQ, eiusdẽ quadrati CI, quadruplus: Est autẽ & quadratum CM, quadruplum quadrati CI, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod recta CD, dupla sit rectæ AC. Igitur gnomon OPQ, quadrato CM, æqualis erit. Rursus quoniam CD, ponitur ipsius AC, dupla; estque LC, ipsi CD; & CH, ipsi AC, æqualis; erit & LC, ipsius CH, dupla. [a] Cum igitur sit vt LC, ad CH, ita rectãgulum LB, ad rectangulum CK; erit quoque illud huius duplum: [b] Est autem CK, ipsi HF, æquale. Aequale igitur est LB,

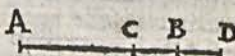


[a] 1. sexti
[b] 43. primi

ipſis CK, HF; Ac proinde & reliquum quadratum KG, reliquo rectangulo BM. Quoniam ergo ſunt tres rectæ CD, CB, BD; eſtque rectangulum BM, ſub CD, BD, comprehenſum æquale ipſi KG, quadrato rectæ CB; [a] Erit vt CD, ad CB, ita CB, ad BD. Quam ob rem, ex definitione, recta CD, ſecta eſt in B, extrema ac media ratione, eſtque maius ſegmentum CB.

a 17. ſexti

ALITER. Quoniam quadratum rectę AB, quintuplum ponitur quadrati rectæ AC; [b] eſtque quadratum rectæ AB, æquale quadratis rectarum CB, AC, vna cum rectangulo ſub AC, CB, bis; Erunt & quadrata rectarum CB, AC, una cum rectangulo ſub AC, CB, bis, quintuplum quadrati rectę AC. Dempto igitur quadrato rectę AC, relinquetur quadratum rectæ CB, & rectangulum ſub AC, CB, bis, quadruplum eiuſdem quadrati rectę AC: Eſt autem & quadratum rectę CD, eiuſdem quadrati rectę AC, quadruplum, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Aequale igitur eſt quadratum rectę CB, & rectangulum ſub AC, CB, bis, quadrato rectæ CD. Cum ergo rectangulum ſub AC, CB, bis, æquale ſit rectangulo ſub CD, CB; (ſicut enim recta CD, dupla eſt rectæ AC, [c] ita quoque duplum erit rectangulum ſub CD, CB, rectanguli ſub AC, CB; cum vtriuſque rectãguli eadem ſit altitudo CB; Ac propterea rectangulum ſub CD, CB, æquale erit rectangulo ſub AC, CB, bis.) Erit & quadratum rectæ CB, & rectangulum ſub CD, CB, quadrato rectæ CD, æquale: [d] At quadratum rectæ CD, æquale eſt rectangulis ſub CD, CB, & ſub CD, BD. Igitur quadratũ rectæ CB, & rectangulum ſub CD, CB, æquale erit rectangulis ſub CD, CB, & ſub CD, BD; Ac proinde dempto communi rectangulo ſub CD, CB, relinquetur quadratum rectæ CB, æquale rectãgulo ſub CD, BD; [e] ideoque erit vt CD, ad CB, ita CB, ad DB. Quare ex defin. recta CD, ſecta eſt in B, extrema ac media ratione, eſtque ſegmentum maius CB. Si igitur recta linea ſui ipſius ſegmenti quintuplũ poſsit, &c. Quod erat demonſtrandum.



b 4. ſecundi

c 1. ſexti

d 2. ſecundi

e 17. ſexti

LEM

LEMMA.

QVOD autem recta CD, maior ſit neceſſario, quam CB, ita oſtendemus ex hypotheſi. Quia quadratum rectæ CD, quadruplum eſt, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quadrati rectæ AC; Addito quadrato rectæ AC, erunt duo quadrata rectarum CD, AC, quintupla eiuſdem quadrati rectæ AC. Eſt autem quadratum rectæ AD, maius quadratis rectarum AC, CD, [a] cum æquale ſit quadratis rectarum AC, CD, vna cum rectangulo ſub AC, CD, bis. Igitur quadratum rectæ AD, maius quoque erit quintuplo quadrati rectæ AC; Ac propterea maius quadrato rectæ AB, quod quintuplum ponitur eiuſdem quadrati rectæ AC. Quare recta AD, maior erit, quam recta AB; ideoque dempta communi AC; maior erit reliqua CD, quam reliqua CB. Quod eſt propoſitum.

a 4. ſecundi

THEOR. 3. PROPOS. 3.

3.

SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur; minus ſegmentum aſſumens dimidiam maioris ſegmenti, quintuplum poteſt eius, quod a dimidia maioris ſegmenti deſcribitur, quadrati.

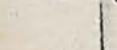
SECETVR recta A B, in C, extrema ac media ratione, cuius maius segmentum *A C*, bifariam diuidatur in D. Dico quadratũ rectę BD, quintuplũ esse quadrati

rectæ C D. Describatur. n. super AB, quadratum A E, in quo diameter B F. Deinde ex C, D, ducantur ipsis A F, B E, parallelæ CG, DH, secantes diametrum in I, K, punctis, per quæ agantur ipsis AB, EF, parallelæ LM, NO, quæ secẽt rectas CG, DH, in P, Q. Eruntq; ex coroll. propos. 4. lib. 2. LG, PQ, DO, quadrata rectarum *AC*, CD, BD. Quoniam igitur recta A C, dupla est rectæ C D, erit ex scholio eiusdem propos. quadratum LG, quadruplum quadrati P Q. Est autem rectangulum CE, æquale quadrato LG. (Nam cum sit vt *AB*, ad AC, ita AC, ad CB, [a] erit rectangulum sub A B, C B, nempe CE, æquale quadrato rectæ AC, nimirum ipsi LG.) Igitur & CE, quadruplũ erit quadrati PQ. Quia vero æqualia sunt quadrata N H, P Q, ob æqualitatem rectarum AD, CD; erunt earũ latera H K, IQ, æqualia; [b] ac proinde rectæ EO, OM, ipsis oppositæ æquales erunt. [c] Quare rectangula IO, QE, æqualia erunt: [d] Est autem I O, ipsi I D, æquale. Ergo & QE, eidem I D, æquale erit; Ac proinde, addito communi rectangulo C O; totus gnomon RST, rectangulo CE, erit æqualis. Cum igitur CE, ostensum sit quadruplum quadrati P Q; erit etiam gnomon RST, eiusdem quadrati P Q, quadruplus; *Ac* propterea addito quadrato P Q, erit quadratum D O, ex recta BD, quintuplum quadrati P Q, ex recta *C* D.

[a] 17. *sexti*

[b] 34. *primi*
[c] 36. *primi*
[d] 43. *primi*

ALITER. Cum A *C*, diuisa sit bifariam in *D*, & ei addita CB; [e] erit rectangulum sub A B, B C, vna cum



quadrato rectę CD, æquale quadrato rectæ BD. At rectanguium sub AB, BC, quadruplum est quadrati rectæ CD; (Nam cum sit, vt AB, ad *AC*, ita *AC*, ad CB; [f] erit rectangulum sub AB, BC, æquale quadrato rectę *A C*: quod cum, ex scholio propos. 4. lib. 2. quadruplũ sit quadrati rectæ CD; erit & rectangulum sub AB, BC, quadruplum eiusdem quadrati rectę *C* D.) *Ac* propterea rectangulum sub *A* B, B C, vna cum quadrato rectæ *C D*,

[e] 6. *secundi*

[f] 17. *sexti*.

CD, quintuplum quadrati rectę CD. Igitur & quadratũ rectę B D, quintuplum erit quadrati rectę *C* D. Si recta ergo linea secundum extremam & mediam rationem secetur; minus segmẽtum assumens dimidiam maioris segmenti, quintuplum potest eius, quod a dimidia maioris segmenti describitur, quadrati. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

CONVERSVM huius theorematis demonstrabimus quoque cum Campano ad hunc modum.

SI recta inæqualiter secetur, & minus segmentum assumens dimidium maioris segmenti quintuplum possit eius, quod a dimidia maioris segmenti describitur, quadrati; Recta illa linea secta erit extrema & media ratione.

SIT recta AB, *diuisa inæqualiter in* C, *cuius maius segmentum* A C, *bifariam sectum sit in* D; *sitque quadratum rectæ* B D, *quintuplum quadrati rectæ* C D. *Dico rectam* AB, *diuisam esse in* C, *extrema ac media ratione. Repetita enim figura priore huius propos. erit quadratum* L G, *rectæ* AC, *quadruplum quadrati* P Q, *rectæ* CD, *ex scholio propos. 4. lib. 2. Est autem & gnomon* R S T, *eiusdem quadrati* P Q, *quadruplus. (cum enim quadratum* D O, *rectæ* BD, *quintuplum ponatur quadrati* P Q, *ex recta* C D; *dempto quadrato* P Q, *relinquetur gnomon* RST, *eiusdem quadrati* P Q, *quadruplus.) Igitur gnomon* RST, *æqualis erit quadrato* LG: *At gnomoni* RST, *æquale est rectangulum* C E, *vt supra ostensum est. Ergo & quadrato* LG, *rectæ* AC, *æquale erit idẽ rectangulum* CE, *sub* AB, BC, *comprehensum:* [a] *Ac proinde erit, vt* AB, *ad* AC, *ita* AC, *ad* CB. *Quocirca, ex definitione, secta erit* AB, *in* C, *extrema ac media ratione. Quod est propositum.*

[a] 17. *sexti*

ALITER. Cum AC, *diuisa sit bifariam in* D; *& ei*

[a] 6. secundi

addita CB; [a] *erit rectangulum sub AB, BC, vna cum quadrato rectæ CD, æqualæ quadrato rectæ BD; Ac propterea cum quadratum ex recta linea BD, descriptum quintuplum ponatur quadrati ex recta CD, descripti; erit & rectãgulum sub rectis lineis AB, BC, descriptum, vna cum quadrato rectæ CD, quintuplum eiusdem quadrati rectæ CD. Quare ablato quadrato rectæ CD; rectangulum sub AB, BC, quadruplum erit quadrati rectæ CD: Est autem eiusdem quadrati rectæ CD, quadruplum quadratum rectæ AC, ex scholio propos. 4. lib. 2. Igitur quadrato rectæ AC, æquale est rectangulũ sub AB, BC.* [b] *Quamobrẽ erit, vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; Ac proinde secta AB, in C, extrema ac media ratione, ex definitione.*

[b] 17. sexti

5. THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI recta linea secundnm extremam & mediam rationem secetur; Quod a tota, quodq; a minore segmento, simul vtraque quadrata, tripla sunt eius, quod a maiore segmento describitur quadrati.

SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, sitq; segmentũ maius AC, & minus CB. Dico quadrata rectarum AB, BC, simul tripla esse quadrati rectæ AC. Describatur enim super AB, quadratũ AD, in quo ducta diametro BE, ducatur ex C, ipsi BD, parallela CF, secans diametrum in puncto G, per quod agatur HI, parallela ipsi AB. Eruntq; CH, IF, quadrata rectarum BC, AC, ex coroll. propos. 4. lib. 2. Quoniam igitur est, vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; [c] erit rectangulum sub AB, BC, nempe AH, æquale ipsi IF, quadrato rectæ AC. Cum ergo AH, æquale sit ipsi CD; erit gnomon KLM,

[c] 17. sexti

KLM, vna cum quadrato CH, duplus quadrati IF; Ac proinde, addito quadrato IF, erit quadratum AD, rectæ AB, vna cum quadrato CH, rectę BC, eiusdem quadrati IF, rectæ AC, triplum.

ALITER. Quoniam est, vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; [a] erit rectangulum sub AB, BC, æquale quadrato rectæ AC; Atq; adeo rectangulum sub AB, BC, bis, vna cum quadrato rectæ AC, triplum quadrati rectæ AC. [b] Sunt autem quadrata rectarum AB, BC, simul æqualia quadrato rectæ AC, vna cum rectangulo sub AB, BC, bis. Igitur & quadrata rectarũ AB, BC, tripla sunt quadrati rectæ AC. Quocirca si recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur; Quod a tota, quodq; a minore segmento, simul vtraque quadrata, tripla sunt eius, quod a maiori segmento describitur, quadrati. Quod erat demonstrandum.

[a] 17. sexti

[b] 7. secundi

SCHOLIVM.

CONVERSVM *etiam huius verum est, videlicet.*

SI recta linea inæqualiter secetur, sitque quadratum totius, vna cum quadrato minoris segmenti, triplum quadrati ex maiore segmento descripti; Recta illa linea extrema ac media ratione secabitur.

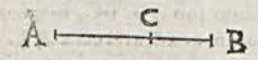
SECTA sit recta AB, inæqualiter in C, ita vt quadratum totius AB, & quadratum minoris segmenti BC, vtraq; simul tripla sint quadrati maioris segmenti AC. Dico rectã AB, sectam esse extrema ac media ratione. Constructa enim figura, vt prius; cum quadrata AD, CH, tripla sint quaadrati IF; dempto quadrato IF, erit gnomon KLM, vna cum quadrato CH, duplus eiusdem quadrati IF: Est autem gnomon KLM, vna cum quadrato CH, æqualis duobus rectangulis AH, CD. Igitur & rectangula AH, CD, dupla sunt quadrati IF; Ac propterea cum æqualia sint AH, & CD; erit AH, ipsi IF, æquale. Quapropter cum rectangulum AH, sub AB, BC, æquale sit quadrato IF, rectæ AC; [c] *erit vt AB,*

[c] 17. sexti

vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; Ac proinde AB, diuisa erit in C, extrema & media ratione.

ALITER. Cum quadrata rectarum AB, BC, tripla sint quadrati rectæ AC; [a] Sint vero quadrata rectarũ AB, BC, æqualia quadrato rectæ AC, & rectãgulo sub AB, BC, bis; erit & quadratum rectæ AC, vna cum rectangulo sub AB, BC, bis, triplũ quadrati rectæ AC. Dempto ergo quadrato rectæ AC, relinquetur rectãgulum sub AB, BC, bis duplum quadrati rectæ AC; Et proinde rectangulum sub AB, BC, semel, æquale quadrato rectæ AC. [b] Quare vt prius erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; ideoque AB, in C, secta erit extrema ac media ratione.

[a] 7. secun.



[b] 17. sexti.

EX Francisco Maurolyco demonstrauimus quoque theorema, quod sequitur.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur, tota linea assumens minus segmentum, quintuplum potest eius, quod à maiori segmento describitur quadrati. Et si recta linea inæqualiter secetur, totaque assumẽs minus segmentum possit quintuplũ eius, quod a maiori segmento describitur, quadrati: Recta illa linea secundum extremam & mediam rationem secta est.

SIT primum recta AB, secta in C, extrema ac media ratione, cui adiatur recta BD, minori segmento BC, æqualis. Dico quadratum ex AD, quintuplum esse quadrati ex AC, maiore segmento. [c] Quoniam enim quadratum ex AD, æquale est rectangulo sub AB, BC, quater contento, vna cum quadrato ex AC: [d] Rectangulum autem sub AB, BC, æquale est quadrato ex AC; (quod AB, AC, CB, sint continue proportionales.) erit rectangulum sub AB, BC, quater, quadruplum quadrati ex AC; atque adeo rectangulum sub AB, BC, quater vna cum quadrato ex AC, quintuplum quadrati ex AC. Igitur & quadratum ex AD, (quod æquale ostensum est rectangulo sub AB, BC, quater, vna cum quadrato ex AC,) eiusdem quadrati ex AC, quintuplum erit. quod est propositum.

[c] 8. secundi

[d] 17. sexti.

SIT deinde recta AB, secta inæqualiter in C, cui adiatur recta BD, minori segmento BC, æqualis, sitque quadratũ ex AD, quadrati ex AC, maiori segmento quintuplum. Dico AB, in C, sectã esse extrema ac media ratione. [a] Quoniã. n. quadratum ex AD, æquale est rectangulo sub AB, BC, quater, vna cum quadrato ex AC; erit quoque rectangulum sub AC, BC, quater, vna cũ quadrato ex AC, quintuplũ quadrati ex AC; ac propterea rectangulum sub AB, BC, quater, quadruplũ quadrati ex AC: hoc est, rectangulum sub AB, BC, æquale quadrato ex AC. [b] Igitur erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB: Ac proinde AB, in C, secta est extrema & media ratione, Quod est propositum.

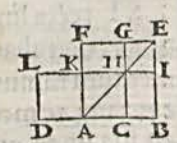
[a] 8. secundi

[b] 17 sexti.

THEOR. 5. PROPOS. 5. 4.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur; apponaturque ei æqualis maiori segmento: Tota recta linea secũdum extremam & mediam rationem secatur, & maius segmentum est, quæ a principio recta linea.

SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, sitque maius segmentum AC, & adiiciatur ei in rectum AD, æqualis maiori segmento AC. Dico rectam BD, secari in A, extrema ac media ratione, essequc maius segmentum AB. Describatur enim super AB, quadratum BF, in quo ducta diametro AE, ducatur ex C, ipsi BE, parallela CG, secans diametrum



metrum in H, puncto, per quod agatur ipsi BD, parallela IK, & ex D, ducatur ipsi AF, parallela DL, occurrens ipsi IK, productæ in L. Eruntque ex coroll. propos. 4. lib. 2. CK, IG, quadrata rectarum AC, BC. Quoniam igitur est vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; [a] Erit rectangulum IF, contentum sub AB, BC, æquale quadrato CK, rectæ AC. [b] Est autem CK, ipsi AL, æquale. Igitur IF, æquale erit ipsi AL; additoque communi BK, erit rectangulum BL, contentum sub BD, DA, æquale quadrato BF, rectæ AB; [c] Ac proinde erit vt BD, ad AB, ita AB, ad DA. Quare BD, secatur in A, extrema ac media ratione, estque maius segmentum AB.

[a] 17. sexti.
[b] 36. primi
[c] 17. sexti

ALITER. Quoniam est vt AB, ad AC, hoc est, ad AD, ita AC, ad CB; Erit conuertendo vt DA, ad AB, ita BC, ad CA; & componendo vt DB, ad AB, ita AB ad CA, hoc est, ad AD. Secta igitur est BD, in A, extrema ac media ratione. Itaque si recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur, apponaturque ei æqualis maiori segmento: tota recta linea, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

SIMILITER cum Campano & hoc demonstrabimus.

SI recta linea secetur extrema ac media ratione, detrahaturque ex maiori segmento segmentum minus; erit maius segmentum sectum extrema ac media ratione, & maius segmẽtum est illa linea, quæ prioris lineæ minus segmentum erat.

RE-

RECTA enim linea BD, extrema ac media ratione secetur in A, cuius maius segmentum AB, minus autem segmẽtum AD; & ex maiori segmẽto AB, detrahatur recta AC, æqualis minori segmento AD. Dico maius segmentum AB, diuisum esse in C, extrema ac media ratione, et maius segmẽtum esse rectam AC, quæ æqualis est minori segmento AD. Facta enim prioris figuræ constructione, cũ sit vt BD, ad AB, ita AB, ad AD; [a] erit rectangulum BL, contentum sub BD, AD, æquale quadrato BF, rectæ AB; & ablato cõmuni BK, erit AL, æquale ipsi IF; [b] Est autem AL, ipsi CK, æquale. Æquale igitur est IF, contentum sub AB, CB, quadrato CK, rectæ AC; [c] Ac proinde erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB. Quare AB, secta est in C, extrema ac media ratione, cuius segmentum maius est AC, minus vero segmentum recta CB. Quod est propositum.

[a] 17. sexti.
[b] 36. primi
[c] 17. sexti.

ALITER. Quoniam est vt tota BD, ad totam AB, ita AB, detracta ex BD, ad AD, hoc est, ad AC, detractam ex AB; [d] erit quoque ita AD, reliqua ipsius BD, hoc est, AC, ad CB, reliquam ipsius AB, vt tota DB, ad totam AB, hoc est, vt AB, ad AC; Ac propterea diuisa erit AB, in C, extrema & media ratione.

[d] 19. quin.

RVRSVS & hoc demonstrabimus, quod sequitur.

SI linea secetur extrema ac media ratione, atque ex dimidio illius auferatur dimidia maioris segmenti: Erit quoque dimidia totius diuisa extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit dimidium maioris segmenti totius lineæ.

DIVIDATVR enim AB, extrema ac media ratione in C, sitq; DE, dimidium totius, & DF, dimidium maioris segmenti AC. Dico DE, in F, secari extrema ac media ratione, maiusq; segmentum esse DF. Cum enim sit vt AB, tota ad DE totam, ita AC, ablata ad DF, ablatam, cum vtrobique sit proportio dupla; [e] erit quoque reliqua CB, ad reliquam FE, vt tota ad totam:

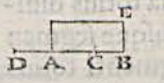
[e] 19. quin.

[a] 15.quin. *tam; Ac proinde & CB, dupla erit ipsius FE. a Quoniam vero est, vt AB, ad AC, ita DE, dimidia illius, ad DF, dimidiam huius: Item vt AC, ad CB, ita DF, dimidia illius, ad FE, dimidiam huius; Est autem ex defin. linea secta extrema ac media ratione, AB, ad AC, vt AC, ad CB; erit quoque DE, ad DF, vt DF, ad FE; Ac proinde ex eadem defin. DE, secta erit in F, extrema ac media ratione. Quod est propositum.*

6. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI recta linea Rationalis extrema ac media ratione secetur; Vtrumque segmentorum Irrationalis linea est, quæ vocatur Apotome.

SECETVR recta Rationalis AB, in C, extrema & media ratione. Dico vtrumque segmentum AC, CB, esse lineam Irrationalem, quæ Apotome dicitur. Addatur enim maiori segmento AC, recta AD, æqualis dimidiæ totius AB. [b] Quoniam igitur quadratum rectæ CD, quintuplum est quadrati rectæ AD; habebit quadratum rectæ CD, ad quadratum rectæ AD, proportionem, quam numerus ad numerum. [c] Quare commẽsurabilia erunt quadrata rectarum CD, AD; propterea quæ ipsæ rectæ CD, AD, commensurabiles quoque existent, saltem potentia: Est autem AD, Rationalis, cum sit dimidia lineæ Rationalis AB. Igitur & CD, Rationalis erit. Quia vero quadrata rectarũ CD, AD, non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, (vt constat ex coroll. propos. 24. lib. 8. Habent enim proportionem quam 5. ad 1. vel 25. ad 5.) [d] erunt rectæ CD, AD, longitudine incommensurabiles; Ac proinde Rationales potentia tantum commensurabiles. Quare si ex CD, Rationali detrahatur



[b] 1.tertij dec.

[c] 6. deci.

[d] 9.decimi

tur AD, Rationalis potentia tantum commensurabilis; erit reliqua AC, Irrationalis, quæ appellatur Apotome.

[a] 74. deci.

RVRSVS applicato ad AB, rectangulo AE, contento sub AB, CB; cum sit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; [b] erit rectangulum AE, æquale quadrato rectæ AC. Quã ob rem quadratum Apotomæ AC, nimirum rectangulum AE, applicatum secundum lineam Rationalem AB, [c] facit alterum latus BE, hoc est, rectam CB, illi æqualem, Apotomen primam. Si recta ergo linea Rationalis extrema ac media ratione secetur, &c. Quod erat demonstrandum.

[b] 17.sexti.

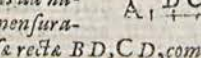
[c] 98. deci.

SCHOLIVM.

SED & hoc theorema cum Campano ostendemus.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur, sitque maius segmentum linea Rationalis; erit minus segmentum, Apotome.

SIT recta AB, extrema ac media ratione diuisa in C, sitque maius segmentum AC, linea Rationalis. Dico minus segmentum CB, esse Apotomen. Diuisa enim AC, bifariam in D; erit CD, dimidia ipsius Rationalis AC, Rationalis, cum sit ipsi AC, commensurabilis. [d] Quoniam autem quadratum rectæ BD, quintuplum est quadrati rectæ CD; habebunt quadrata rectarum BD, CD, proportionem, quam numerus ad numerum; [e] ac propterea commensurabilia existent. Quare & ipsæ rectæ BD, CD, commensurabiles erunt, saltem potentia. Cum igitur CD, sit rationalis, erit quoque BD, Rationalis. Quia vero quadrata rectarum BD, CD, non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; (vt constat ex coroll. propos. 24. lib. 8. Habent enim proportionem, quam 5. ad 1. vel 25. ad 5.) erũt rectæ BD, CD, longitudine incommensurabiles; Ac proinde



[d] 3.tertij dec.

[e] 6.deci.

Ratio-

Rationali detrahatur CD, *Rationalis potentia tantum communensurabilis;* [a] *erit reliqua* C B, *Irrationalis, quæ vocatur Apotome.*

[a] 74. deci.

7. THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI pentagoni æquilateri tres anguli, siue qui deinceps, siue qui nõ deinceps sint, æquales fuerint : AEquiangulum erit ipsum pentagonum.

SINT in pentagono æquilatero ABCDE, tres anguli, qui primum deinceps sint, æquales A, B, C. Dico ipsum pentagonum esse æquiangulum. Subtendantur enim dictis angulis æqualibus rectæ BE, AC, BD; & ex puncto F, vbi se intersecant rectæ BE, AC, recta ducatur FD.

Quoniam igitur latera AB, AE, trianguli ABE, æqualia sunt lateribus CB, CD, trianguli CBD; & anguli quoque ipsis contenti æquales, ex hypothesi; erunt & bases BE, BD, & anguli AEB, CDB, æquales; [c] Sunt autẽ & anguli BED, BDE, æquales, cum æqualia sint ostensa latera BE, BD; Toti igitur anguli AED, CDE, æquales erunt. Rursus quia latera AB, AE, trianguli ABE, æqualia sunt lateribus BA, BC, trianguli BAC; & anguli quoq; ipsis contenti æquales, ex hypothesi: [d] Erit & basis BE, basi AC, æqualis, & anguli ABE, AEB, angulis BAC, BCA, æquales. Cum ergo æquales sint anguli ABE, BAC, trianguli ABF; [e] erunt quoque latera BF, AF, æqualia; Ac propterea si ipsa demantur ex rectis æqualibus BE, AC, erunt reliquæ lineæ FE, FC, æquales. Itaque cum latera FE, ED, trianguli FED, æqualia sint lateribus FC, CD, triãguli FCD; & basis communis FD; erunt & anguli dictis lateribus contenti FED, FCD, æquales: Sunt autem & anguli AEB, BCA, ostensi æquales. Aequales igitur sunt toti anguli AED, BCD; Ac proinde cum angulo AED, ostensus sit æqualis angulus CDE, & angulo BCD, æquales ponantur anguli ABC, BAE; erunt omnes anguli pentagoni æquales, ideoque æquiangulum erit ipsum pentagonum.

[b] 4. primi
[c] 5. primi
[d] 4. primi
[e] 6. primi
[f] 8. primi

SINT secundo tres anguli non deinceps æquales A, C, D. Quoniam igitur latera AB, AE, triãguli ABE, æqualia sunt lateribus CB, CD, trianguli CBD; & anguli quoque ipsis contenti, æquales, ex hypothesi; [a] Erunt & bases BE, BD, & anguli AEB, CDB, æquales; [b] Sunt autem & anguli BED, BDE, æquales, quod æqualia ostensa sint latera BE, BD. Igitur toti anguli AED, CDE, æquales erunt. Quare cum æquales ponantur anguli BAE, CDE; erunt tres anguli deinceps æquales A, E, D; Ac proinde, vt iam demonstratum est, pentagonum æquiangulum erit. Si pentagoni igitur æquilateri tres anguli, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 4. primi.
[b] 5. primi.

THEOR. 8. PROPOS. 8. 11.

SI pentagoni æquilateri, & æquiãguli duos angulos, qui deinceps sint, subtendant rectæ lineæ: hæ extrema & media ratione se mutuo secant, & maiora ipsarum segmenta æqualia sunt pentagoni lateri.

SVBTENDANTVR in pentagono æquilatero & æquiangulo ABCDE, duobus angulis, qui sunt deinceps C, D, rectæ DB, CE, se mutuo secantes in F. Dico ipsas secari extrema ac media ratione, maioraque earum segmenta FB, FE, æqualia esse lateri cuilibet pẽtagoni. [c] De-

[c] 14. quar.

[a] 28 tertij.

scripto enim circulo circa pentagonum;[a] erunt quinque arcus AB, BC, CD, DE, EA, æquales. Quia vero latera CD, CB, trianguli CDB, æqualia sunt lateribus DC, DE, trianguli DCE; & anguli quoque ipsis contenti æquales, ex hypothesi; [b] Erunt & bases DB, CE, & anguli CDB, DCE, æquales; Ac proinde cum in triangulo CDF, duo anguli FCD, FDC, sint æquales, [c] & ipsis æqualis sit externus angulus BFC: erit angulus BFC, duplus anguli DCE: [d] Est autem & angulus BCE, eiusdē anguli DCE, duplus, quod & arcus BAE, arcus DE, sit duplus. Igitur anguli BFC, BCF, æquales sunt; [e] Ideoque recta BF, lateri pentagoni BC, æqualis. [f] Quoniā autem anguli DBC, ECD, arcubus æqualibus insistētes æquales sunt; erunt duo anguli DBC, CDB, trianguli BCD, æquales duobus angulis DCF, FDC, trianguli CFD: [g] Ac proinde æquiangula erunt triangula BCD, CFD. [h] Quare erit vt BD, ad DC, hoc est, ad BF, æqualem ipsi DC, ita CD, hoc est, sibi æqualis BF, ad FD; Ac propterea BD, secta est in F, extrema ac media ratione, estque maius segmentum BF, lateri pentagoni æquale, vt ostensum est. Simili ratione ostendemus, rectam CE, secari in F, extrema ac media ratione, maiusque illius segmentum EF, æquale esse lateri pentagoni DE. Itaque si pentagoni æquilateri & æquianguli duos angulos, &c. Quod erat ostendendum.

[b] 4. primi

[c] 32. primi

[d] 33. sexti.

[e] 6. primi

[f] 27. tertij.

[g] 32. primi

[h] 4. sexti.

SCHOLIVM.

FACILE etiam demonstrabimus, rectam, quæ anguli pentagoni æquilateri & æquianguli subtendit, parallelā esse oppositi lateri: hoc est, BD, parallelam esse lateri AE; et CE, lateri AE. Descripto enim circulo circa pentagonum, [i] *Quoniam tam duo anguli A, & BCE, quam duo ABC, AEC, duobus rectis æquales sunt: Sunt autem A, & ABC, inter se æquales in pentagono æquiangulo; erunt & reliqui anguli BCE, AEC, æquales. Cum ergo A, & BCE, duobus sint rectis æquales; erunt etiā A, & AEC, duobus rectis æquales:* [k] *ac proinde AB, CE, parallelæ erunt. Quod est propositū.*

[i] 22. tertij.

[k] 28. primi

THEOR.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

9.

SI hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo descriptorum, cōponantur: Tota recta linea extrema ac media ratione secatur, & maius eius segmentum est hexagoni latus.

IN circulo ABC, sit latus decagoni AB, cui in rectū addatur BE, æqualis semidiametro circuli, ac proinde lateri hexagoni eidē circulo inscripti. Dico EA, rectā secari esse in B, extrema ac media ratione, maiusq; segmentū esse EB, latus hexagoni. Ducatur. n. ex A, per centrū D, diameter AC, coniungantur; rectę DB, DE. Quoniam igitur AB, arcus, est decima pars totius peripherię circuli; continebit arcus semicirculi arcum AB, quinquies; Ac proinde arcus BC, quadruplus erit arcus AB. [a] Quare & angulus BDC, anguli ADB, quadruplus erit. Rursus quia latera BD, BE, sunt æqualia, nempe latera hexagonis (est enim BE, latus hexagoni semidiametro BD, æquale, ex coroll. propos. 15. lib. 4.) erūt & anguli BDE, BED, æquales: [b] quibus cum æqualis sit externus ABD; erit angulus ABD, duplus anguli BED: [c] Est autem angulo ABD, æqualis angulus BAD, ob æqualitatem laterum DA, DB. Igitur & angulus BAD, duplus erit anguli BED: ac proinde duo anguli DAB, DBA, simul quadrupli erunt anguli BED. [d] Cum ergo angulis DAB, DBA, æqualis sit externus BDC; erit angulus BDC, quadruplus eiusdem anguli BED: Atqui idem angulus BDC, ostensus fuit quadruplus anguli ADB. Igitur æquales sunt anguli AED, ADB. Quocirca cum duo anguli AED, DAE, trianguli ADE, æquales sint

[a] 33. sexti.

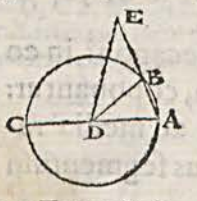
[b] 5. primi

[c] 32. primi

[d] 5. primi

[e] 32. primi

duobus angulis ADB, BAD, trianguli ABD; [a] erũt triangula ADE, ABD, æquiangula. [b] Igitur erit vt EA, ad AD, hoc est, ad EB, ipsi AD, æqualem, ita AD, hoc est, EB, sibi æqualis ad BA; Atq; idcirco recta EA, secta est in B, extrema & media ratione, estque maius segmentum EB, latus hexagoni. Itaque si hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo descriptorum, componantur: Tota recta linea extrema ac media ratione secatur, & maius eius segmentum est hexagoni latus. Quod erat demonstrandum,



a 32. primi.
b 4. sexti.

SCHOLIVM.

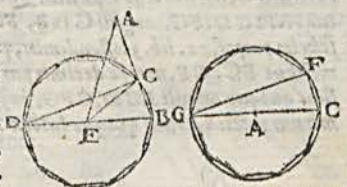
QVIA vero demonstrauimus ad propos. 5. huius lib. si minus segmentum linea diuisæ extrema ac media ratione ex maiori segmento detrahatur; maius segmentum secari quoque extrema et media ratione, eiusque segmentum maius esse minus segmentum detractum. Hic autem ostensum est, latus hexagoni compositum cum latere decagoni, secari extrema ac media ratione: Fit, si latus hexagoni secetur extrema & media ratione, maius illius segmentum esse latus decagoni. Nam si hoc detrahatur ex latere hexagoni, quod est maius segmentum, diuisum erit hexagoni latus extrema ac media ratione, vt ad propos. 5. huius lib. ostendimus. Hoc tamen aliter demonstrabimus lib. 14. propos. 4.

CONVERSVM quoque huius theorematis facile eum Campano demonstrabimus. Videlicet.

SI lineæ diuisæ extrema ac media ratione maius segmentum fuerit latus hexagoni alicuius circuli; Erit minus segmentum latus decagoni eiusdem circuli. Quod si minus segmentum fuerit latus decagoni alicuius circuli; Erit maius segmentum latus hexagoni eiusdem circuli.

SIT enim AB, diuisa in C, extrema & media ratione sitque,

sitque primũ AC, latus hexagoni circuli ECD. Dico minus segmentum CB, esse eiusdẽ circuli latus decagoni. Coaptetur enim BC, in circulo, ita vt CA, extra circulũ cadat. Et ducta ex B, per centrum E, diametro BED, connectantur rectæ EA, EC. Quia ergo est, vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; & est AC, latus hexagoni æquale semidiametro EB, ex coroll. propos. 15. lib. 4. Erit quoque vt AB, ad BE, ita EB, ad BC, [a] ideoque triangula ABE, EBC, æquiangula erunt, eũ habeant latera circa communem angulum B, proportionalia; eritque angulus A, angulo BEC, æqualis. Rursus quia latera CA, CE, æqualia sunt, nempe latera hexagoni; [b] erunt anguli CAE, CEA, æquales; [c] quibus cum æqualis sit externus BCE, erit BCE, duplus anguli A: [d] Est autem angulo BCE, angulus CBE, ob æqualitatem laterum EB, EC, æqualis. Igitur & CBE, duplus erit anguli A; Ac proinde duo anguli BCE, CBE, simul quadrupli erunt eiusdẽ anguli A. [e] Cum ergo angulis BCE, CBE, æqualis sit externus CED; erit quoque angulus CED, eiusdem anguli A, & propterea anguli BEC, qui æqualis ostensus est angulo A, quadruplus. [f] Quare & arcus CD, quadruplus erit arcus BC; Ac proinde arcus semicirculi BCD, eiusdem arcus BC, quintuplus existet, ideoque tota peripheria circuli decupla erit arcus BC. Quapropter recta BC, latus est decagoni.

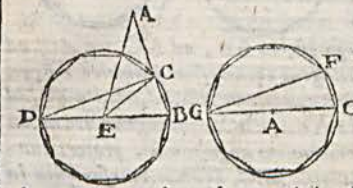


a 6. sexti.
b 5. primi.
c 32. primi.
d 5. primi.
e 32. primi
f 33. sexti.

SIT deinde CB, minus segmentum, latus decagoni circuli BCD. Dico maius segmentum AC, esse eiusdem circuli latus hexagoni. Coaptetur enim rursus BC, in circulo BCD, ducaturque diameter BED. Deinde interuallo AC, describatur circulus CFG, cuius diameter CAG; eritq; ex coroll. propos. 14. lib. 4. AC, latus hexagoni circuli CF. Quoniã igitur AB, secta est in C, extrema ac media ratione, estq; maius segmentum AC, latus hexagoni circuli CFG; erit, vt iam ostensum est, minus segmentum CB, latus decagoni eiusdem circuli CFG. Describatur ergo in circulo CFG, decagonum æquilaterũ & æquiangulum CFG; Item in circulo BCD,

decagonum æquilaterum, & æquiangulum BCD; eruntque latera BC, CF, inter se æqualia. Quoniam vero, si connectantur rectæ CD, FG, anguli CDB, FGC, sunt æquales, vt in scholio propos. 22. lib. 3. ostendimus, quod insistant arcubus similibus BC, CF, nempe decimis partibus peripheriarum; & sunt quoque anguli BCD, CFG, in semicirculis æquales, [a] *nimirum recti:* [b] *Erunt quoque latera BD, CG, inter se æqualia. Quam ob rem cũ iametri BD, CG, sint æquales, æquales quoque erunt circuli BCD, CFG. Ac proinde, cũ recta AC, sit latus hexagoni circuli CFG, erit quoq; eadem recta AC, latus hexagoni circuli BCD. Quod est propositum.*

a 31. tertij.
b 16. primi.



10. THEOR. 10. PROPOS. 10.

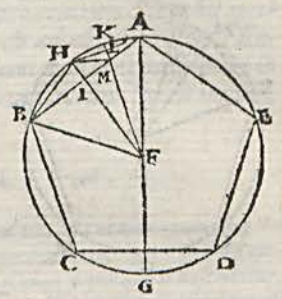
SI in circulo pentagonum æquilaterũ describatur; Pentagoni latus potest & latus hexagoni, & latus decagoni, in eodem circulo descriptorum.

IN circulo ABCDE, cuius centrum F, descriptum sit pentagonum æquilaterum. Dico quadratum lateris AB, æquale esse quadrato lateris hexagoni, vna cũ quadrato lateris decagoni eiusdem circuli. Ducatur. n. diameter AFG, & connectatur recta FB. Diuiso deinde arcu AB, bifariam in H, connectantur rectæ AH, BH, & FH, secans rectam AB, in I; eritque recta AH, latus decagoni, & BF, latus hexagoni. Rursus diuiso arcu AH, bifariam in K, adiungatur recta FK, secans rectam AH, in L, & rectam AB, in M, puncto, ad quod recta ducatur HM. Qm igitur arcus AH, BH, æquales sunt; [c] erũt & anguli ipsis insistentes AFH, BFH, æquales. Quare cum

c 27. tertij.

cum latera AF, FI, trianguli AFI, æqualia sint lateribus BF, FI, trianguli BFI, & anguli ipsis contenti æquales quoque; [a] erunt & bases AI, BI, æquales, & anguli AIF, BIF, ideoque recti: Eademque ratione æquales erunt rectæ AL, HL, & anguli ALF, HLF, recti. Deinde si ex semicirculis æqualibus ABCG, AEDG, demantur æquales arcus ABC, AED; relinquentur arcus CG, DG, inter sese æquales, ideoq; erit arcus CG, dimidiũ arcus CD. Est aũt & arcus AH, dimidium dimidium arcus AB. Igitur cum arcus AB, CD, æquales sint; erunt quoque eorum dimidij arcus CG, AH, æquales; Ac proinde cum arcus AH, duplus sit arcus HK, erit & arcus CG, duplus eiusdem arcus HK. Eodem modo, quia arcus AB, BC, æquales sunt, & est arcus AB, duplus arcus BH, erit etiã arcus BC, eiusdem arcus BH, duplus. Quare arcus CG, BC, æquemultiplices sunt, nempe dupli, arcuum HK, BH; [b] Ac propterea totus arcus EG, duplus quoq; erit totius arcus BK; [c] & idcirco angulus quoque BFG, duplus anguli BFK: [d] Sed quia idem angulus BFG, ad centrum duplus est quoque anguli FAB; erunt idcirco anguli BFM, FAB, æquales; [e] Ac propterea triangula ABF, FBM, cum habeant angulos FAB, MFB, æquales, & angulum ABF, communem, æquiangula erunt. [f] Quocirca erit vt AB, ad BF, ita BF, ad BM; [g] ideoque rectangulum sub AB, BM, æquale erit quadrato rectæ BF.

a 4. primi.



RVRSVS quia latera AL, LM, trianguli ALM, æqualia sunt lateribus HL, LM, triãguli HLM, & anguli quoq; ipsis contenti æquales, nẽpe recti: [h] erunt & bases AM, HM, & anguli LAM, LHM, æquales: [i] Est autẽ angulus LAM, angulo HBA, æqualis, quod & latera HA, HB, æqualia sint. Igitur & angulus LHM, eidem angu-

b 2. quin.
c 33. sexti
d 20. tertij.
e 32. primi
f 4. sexti
g 17. sexti
h 4. primi.
i 5. primi.

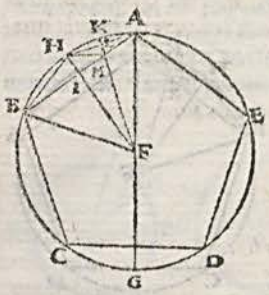
lo HBA, æqualis erit; [a] Ac propterea triangula ABH, AHM, cum habeant angulos ABH, AHM, æquales, & angulum HAM, communem, æquiangula erũt. [b] Quam ob rẽ erit vt AB, ad AH, ita AH, ad AM; [c] ideoque rectãgulum sub AB, AM, æquale erit quadrato rectæ AH: Ostẽsum est autem & rectangulum sub AB, BM, æquale quadrato rectæ BF. Igitur rectangula sub AB, BM, & sub AB, AM, simul æqualia sunt quadratis rectarũ BF, AH: [d] At vero rectangula sub AB, BM, & sub AB, AM, æqualia sunt quadrato rectæ AB. Quadratum ergo rectæ AB, nempe lateris pentagoni, æquale est quadratis rectarum BF, AH, lateris videlicet hexagoni, & lateris decagoni. Si igitur in circulo pentagonum æquilaterum describatur, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 32. primi

[b] 4. sexti.

[c] 17. sexti.

[d] 3. secun.



COROLLARIVM I.

HINC sequitur, lineam rectam, quæ ex centro diuidit arcum quempiam bifariam, diuidere quoque rectam illi arcui subtensam bifariam, & ad angulos rectos. Ostensum enim est, rectam FH, propterea quod arcum AB, diuidit bifariam, diuidere quoque rectam AB, bifariam in I, & ad angulos rectos. Eademque in cæteris est demonstratio.

COROLLARIVM II.

PERSPICVVM quoque est, diametrum circuli ex angulo quouis pẽtagoni ductam diuidere & arcũ, quem latus pentagoni illi angulo oppositum subtẽdit, & latus ipsum oppositum bifariam, & ad angulos rectos. Demonstratum enim est, diametrum AG, ex puncto A, ductam diuidere arcum CD, quem latus oppositum CD, subtendit, bifariam. Quare ex præfato coroll. cum transeat per centrum, secabit quoque latus CD, bifariam, & ad angulos rectos. Eadem demonstratio erit in omni polygono æquilatero in circulo descripto, si numerus laterum fuerit impar, vt constat.

SCHOLIVM.

QVONIAM ad finem lib. 4. praxim quandam ex Ptolemæo tradidimus, qua vna eademque opera in dato circulo & pentagonum, & decagonum æquilaterũ describitur, eiusque demonstrationem in hunc locum distulimus; paucis nunc a nobis ea demonstranda est. Sit igitur datus circulus ABC, cuius centrum D. Ducta autem diametro BC, erigatur DA, perpendicularis ad BC. Deinde diuisa semidiametro CD, bifariam in E, ducatur recta EA, cui æqualis abscindatur EF, adiungaturque recta AF. Dico rectam AF, esse latus pentagoni, & DF, latus decagoni. Cum enim

CD, secta sit bifariam in E, eique addita DF; [a] erit rectangulum sub CF, DF, vna cum quadrato rectæ DE, æquale quadrato rectæ EF, ideoq; quadrato rectæ EA, quæ ipsi EF, est æqualis. [b] Est autem quadratum rectæ EA, æquale quadratis rectarum AD, DE. Igitur rectãgulum sub CF, DF, vna cum quadrato rectæ DE, æquale est quadratis rectarum AD, DE; Ac proinde, dempto communi quadrato rectæ DE, relinquetur rectangulum sub CF, DF, æquale quadrato rectæ AD, hoc est, quadrato rectæ CD. [c] Quam ob rem erit vt CF, ad CD, ita CD, ad DF; propterea quæ recta CF, diuisa erit in D, extrema ac media ratione. Cum igitur maius segmentum CD, sit latus hexagoni circuli ABC, ex coroll. propos. 15. lib. 4. erit minus segmentum DF, latus decagoni eiusdem circuli, vt demonstrauimus ad propos. 9. huius lib. [d] Rursus

[a] 6. secundi

[b] 47. primi

[c] 17. sexti

[d] 10. tertiædecimi

sus quoniam quadrato lateris hexagoni AD, vna cum quadrato lateris decagoni DF, æquale est quadratum lateris [a] *47. primi* *pentagoni eiusdem circuli;* [a] *Est autem eisdem quadratis rectarum AD, DF, æquale quadratum rectæ AF; erit quadratum lateris pentagoni æquale quadrato rectæ AF; ac propterea recta AF, lateri pentagoni æqualis. Quod est propositum.*

12. THEOR. 11. PROPOS. 11.

SI in circulo Rationalem habente diametrum, pentagonum æquilaterum describatur: Pentagoni latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Minor.

IN circulo ABCDE, habente diametrum Rationalem, describatur pentagonum æquilaterum ABCDE. Dico eius latus AB, esse lineam Irrationalem, quæ dicitur Minor. Ducantur enim per centrum F, diametri AG, BH, secetque AG, latus CD, in I, connectanturque rectæ AC, AH, quarum AC, secet diametrum BH, in K. Abscindatur quoque ex semidiametro FH, quarta eius pars FL; Item ex recta AC, quarta eius pars CM. Quia igitur diameter BH, ponitur Rationalis; erunt quoque FL, BF, illi commensurabiles, cum sint eius partes aliquotæ, Rationales; Atque idcirco & tota BL, composita, [b] *16. deci.* cum sit commensurabilis vtrique FL, BF, Rationalis erit.

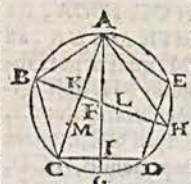
RVRSVS quoniam recta FB, ex centro ducta secat AC, bifariam in B; secabit quoque rectam AC, bifariam in L, & ad angulos rectos, ex coroll. 1. præcedentis propos. Secat autem & recta AG, rectam CD, in I, bifariam, & ad angulos rectos, ex coroll. 2. eiusdem propos. Triangula ergo ACI, AFK, cũ habeant angulos AIC, AKF, rectos, & angulum CAI, communẽ, [c] *32. primi* æquiangula inter

inter se erunt. [a] Quam obrem erit, vt CI, ad CA, ita FK, ad FA; & permutando vt CI, ad FK, ita CA, ad FA; [b] Vt autem CA, ad AF, ita est CM, quarta pars ipsius CA, ad FL, quartam partem ipsius FH. Erit igitur vt CI, ad FK, ita CM, ad FL; & permutando, vt CI, ad CM, hoc est, vt CD, dupla ipsius CI, ad CK, duplam ipsius CM, ita FK, ad, FL; Atque componendo, vt CD, CK, simul ad CK, ita FK, FL, simul, nimirum recta KL, ad FL; [c] Ac propterea erit, vt quadratum rectæ compositæ ex CD, CK, ad quadratum rectæ CK, ita quadratũ rectæ KL, ad quadratum rectæ FL. Quia vero si AC, secetur extrema ac media ratione, (ducta videlicet recta BD,) [d] maius eius segmentum æquale est lateri pentagoni, nimirum ipsi CD; [e] Erit quadratum rectæ compositę ex CD, maiori segmento, & CK, dimidia totius, quintuplum quadrati rectæ CK, dimidiæ scilicet totius. Quare & quadratum rectæ KL, quintuplum erit quadrati rectæ FL, [f] ideoque quadratum rectæ KL, commensurabile erit quadrato rectæ FL; Ac proinde rectæ KL, FL, commensurabiles quoque erunt, saltem potentia: Est autem FL, ostensa Rationalis. Igitur & KL, Rationalis erit.

[a] *4. sexti.*
[b] *15. quin.*
[c] *22. sexti*
[d] *8. tertij decimi.*
[e] *1. tertij decimi*
[f] *6. decimi*

DEINDE quia qualium partium 4. est BF, talium 1. est FL; ac propterea qualium 5. est BL, talium 1. est FL; ac propterea qualium 5. est BL, talium 1. est FL; erit quadratum rectæ BL, talium partium 25. qualium 1. est quadratũ rectæ FL, (vt in his numeris patet 1. 5. 25. habent enim quadrata proportionẽ laterum duplicatam.) Qualium uero partium 1. est quadratũ rectæ FL, taliũ 5. ostensum est quadratũ rectæ KL. Qualiũ igitur 25. est quadratũ rectæ BL, talium 5. est quadratũ rectæ KL; ac proinde quadratum rectæ BL, quintuplum erit quadrati rectæ KL. Quia ergo quadrata rectarum BL, KL, proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, sut patet ex coroll. propos. 24. lib. 8. Est enim eorum proportio, quæ 25. ad 5. vel 5. ad 1.) [h] Erunt rectæ BL, KL, longitudine incõmensurabiles; ideoq;, cũ ostensæ sint Rationales, erunt Rõnales potentia tantum commensurabiles. Quare si ex Rõnali BL,

[g] *20. sexti*
[h] *9. deci.*



BL, demat Rationalis KL, potétia tantum commensurabilis; [a] erit reliqua BK, Irrationalis, quæ dicitur Apotome, ei uero congrues erit KL.

IAM vero recta BL, posit plus, quam recta KL, quadrato rectæ N. Quoniam igitur quadratũ rectæ BL, æquale est quadratis rectarum KL, & N; Qualiũ autem partiũ 5. fuit quadratũ rectæ BL, taliũ 1 fuit quadratũ rectæ KL; Erit reliquum quadratũ rectę N, talium partium 4. qualium 5. est quadratũ rectæ BL; Ac propterea quadrata rectarum BL, & N, proportionẽ habebunt, quam numerus ad numerum. [b] Quare commẽsurabilia erunt; proptereaque rectæ ipsæ BL, & N, commensurabiles, saltem potentia: Est autem BL, ostensa Rationalis. Rationalis igitur erit & N. Quia vero quadrata rectarum BL, & N, proportionẽ non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; (vt perspicuum est ex coroll. propos. 24. lib. 8. quod proportio eorum sit, quę 5. ad 4.) [c] Erunt rectæ BL, & N, longitudine incommensurabiles; Ac proinde Rationales potentia tantum commensurabiles. Quapropter cum tota recta BL, Rationalis, longitudine sit commẽsurabilis Rationali BH: (Qualium enim partium 8. est BH, talium 5. est BL,) posit que plus, quam congruens KL, quadrato rectæ N, sibi longitudine incommensurabilis, vt ostensum est; Erit BK, Apotome quarta, ex definitione.

POSTREMO quia recta AB, est media proportionalis inter BH, BK, ex coroll. propos. 8. lib. 6.) quod triangulum ABH, [d] habeat angulum BAH, rectum, a quo ducta est AK, ad basin perpendicularis; [e] erit quadratum rectæ AB, æquale rectangulo sub BH, BK. Quocirca cum superficiem cõtentam sub Rationali BH, & Apotoma quarta BK, posit recta linea AB, [f] Erit AB, linea Minor. Si igitur in circulo Rationalem habente diametrum, &c Quod erat demonstrandum.

[a] 74. deci.
[b] 6. decimi
[c] 9. decimi
[d] 31. tertij.
[e] 17. sexti
[f] 95. deci.

8.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

SI in circulo triangulum æquilaterum

rum describatur; Trianguli latus, potentia triplum est eius lineæ, quæ ex centro circuli ducitur.

IN circulo ABC, cuius centrum D, triangulum æquilaterum inscribatur ABC. *Dico* quadratum lateris AB, triplum esse quadrati ex semidiametro. Ducta enim diametro AE, quæ secet, ex coroll. 2. propos. 10. huius lib. arcum BC, bifariam in E, & rectam BC, bifariã quoque & ad angulos rectos in puncto F; cum arcus BC, sit tertia pars totius peripheriæ; erit arcus BE, eiusdem peripheriæ sexta pars, ideoque coniuncta recta BE, latus erit hexagoni, & æqualis semidiametro circuli, ex coroll. propos. 15. lib. 4. Quod etiam ita probabitur. Semicirculus ABE, continet tres sextas partes totius circuli; arcus vero AB, cum sit tertia pars totius circuli, duas sextas comprehendit eiusdem circuli. Igitur arcus BE, sexta pars est eiusdem, ac proinde recta BE, latus est hexagoni, & æqualis semidiametro DE, ex coroll. propos. 15. lib. 4. [a] Quoniam igitur quadratum rectæ AE, æquale est quadratis rectarum AB, BE, [b] quod angulus ABE, in semicirculo rectus sit; Est autem quadratum rectæ AE, quadruplum quadrati rectæ BE, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod linea AE, dupla sit lineæ BE; erunt quadrata rectarum AB, BE, simul, quadrupla quoque quadrati eiusdem rectæ BE; Ac propterea qualium partium 4. sunt quadrata rectarum AB, BE, talium partium 1. erit quadratum rectæ BE; & idcirco talium partium 3. erit quadratum rectæ AB. Quare quadratum rectæ AB, triplum est quadrati rectæ BE, quæ æqualis est semidiametro. Si igitur in circulo triangulum æquilaterum describatur, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 47. primi
[b] 31. tertij.

SE-

COROLLARIVM I.

SEQVITVR ex his, diametrum circuli potentia esse sesquitertiam lateris trianguli æquilateri in eo circulo descripti. Nam cum latus AB, ostensum sit potentia triplum semidiametri AD; posito quadrato ex AB, 3. erit quadratum ex AD, 1. atq; adeo quadratum ex AE, quod ex scholio propos. 4. lib. 2. quadruplum est quadrati ex AD, erit 4. Quare quadratum ex AE, quadrati ex AB, sesquitertium est, hoc est, proportionem habet, quam 4. ad 3.

ET quia ex coroll. propos. 8. lib. 6. vt est AE, ad AB, ita se habet AB, ad AF; erit quoque latus trianguli æquilateri AB, perpendicularis AF, ex vno angulo ad basim demissæ potentia sesquitertium: quod tamen aliter demonstrabitur ab Euclide lib. 14. propos. 12.

COROLLARIVM II.

HINC facile etiam colligi potest, semidiametrum DE, bifariam secari in F, a latere trianguli BC. Cum enim quadratum rectæ AB, triplum sit quadrati rectæ BE; si ponatur quadratum rectæ AB, partium 12. erit quadratum rectæ BE, talium partium 4. [a] Est autem quadratum rectæ BE, æquale quadratis rectarum BF, FE. Igitur & talium partium 4. erunt quadrata rectarum BF, FE. Est autem talium partium 3. quadratum rectæ BF, (quod quadratum rectæ AB, quadruplum sit quadrati rectæ BF, ex scholio propos. 4. lib. 2. Est enim AB, dupla ipsius BF.) Igitur talium 1. erit quadratum rectæ FE; Ac proinde quadratum rectæ BE, hoc est, quadra-

[a] 47. primi

quadratum rectæ DE, sibi æquale, quadruplum erit quadrati rectæ FE. Cum igitur, ex scholio propos. 4. lib. 2. idem quadratum rectæ DE, quadruplum sit quadrati dimidiæ lineæ ipsius DE; erit FE, dimidia ipsius DE. Quocirca DE, bifariam secatur in F.

SCHOLIVM.

HOC tamen corollarium aliter demonstrabitur hoc theoremate proposito.

SI in circulo triangulum æquilaterum describatur; Diameter ex vno angulo ducta diuidet & angulum bifariam, & latus oppositum, ac insuper ad angulos rectos; Semidiameter quoque vicissim bifariam, & ad angulos rectos secabitur a latere opposito.

IN circulo ABC, cuius centrum D, triangulum æquilaterum inscribatur ABC. Dico rectam AE, per centrum D, ductam, hoc est, diametrum, secare bifariam & angulum BAC, & latus BC, necnon ad angulos rectos; Semidiametrum quoque DE, secari a latere BC, bifariam, & ad angulos rectos. Ductis enim rectis BD, CD, BE; eũ latera AB, AD, æqualia sint lateribus AC, AD, triangulicAD, & basi BD, CD, æquales quoq; : [a] Erunt anguli BAD, CAD, æquales. Quod est primum.

[a] 8. primi

DEINDE, cum latera AB, AF, trianguli BAF, æqualia sint lateribus AC, AF, trianguli CAF, & anguli ipsis contenti æquales ostensi: [b] Erunt & bases BF, CF, & anguli ad F, æquales, ideoque recti. Quod est secundum.

[b] 4. primi

POSTREMO, cum anguli BAE, CAE, demonstrati sint esse æquales; [c] erunt & arcus BE, CE, æquales. Quare cum BEC, arcus sit tertia pars circumferentiæ, erit BE, sexta

[c] 28. tertij

pars

pars eiusdem; Ac propterea recta BE, latus hexagoni, aequat semidiametro proinde BD, aequalis, ex coroll. propos. 15. lib. 4. Igitur anguli BDE, BED, aequales erunt. Quoniam ergo anguli BDF, BFD, trianguli DBF, aequales sunt angulis BEF, BFE, trianguli EBF, & latus BF, communes, Erunt & latera DF, EF, aequalia.

a 5. primi

b 26. primi

13. PROBL. 1. PROPOS. 13.

PYRAMIDEM constituere; & data sphæra complecti; & demonstrare, quod sphæræ diameter potentia sit sesquialtera lateris ipsius pyramidis.

SIT datę sphæræ diameter AB, circa quâ semicirculus describatur ABC; & ex AB, auferatur tertia pars BD, vt sit AD, ipsius DB, dupla; at vero AB, eiusdem DB, tripla; & ipsius AD, sesquialtera. Deinde ducta DC, perpendiculari ad AB, cũnectantur rectę AC, BC. Ad interuallum rectæ HE, quæ æqualis sit ipsi DC, describatur circulus EFG, cuius centrũ H, in quo triangulũ æquilaterum inscribatur EFG, adiũganturq; rectæ HF, HG, quæ singulæ æquales erunt ipsi DC, cum æquales sint ipsi HE, ad cuius interuallum descriptus est circulus. Erigatur deinde ex H, ad planum circuli perpendicularis HI, quæ æqualis ponatur rectæ AD, & ex I, demittantur rectæ IE, IF, IG. Dico solidum contentum quatuor triangulis FEC, IEF, IFG, IEG, esse Pyramidẽ, siue Tetraedrum. Quoniam.n. latera DA, DC, trianguli ADC, æqualia sunt lateribus HI, HE, trianguli IHE, & anguli ipsis contenti, recti, ex hypothesi, & 3. defin. lib. 11. erit basis AC, basi IE, æqualis. Non aliter ostendemus eandem rectam AC, æqualem esse rectis IF, IG. Rursus quia tres lineæ AD, DC, DB, proportionales sunt

c 4. primi

sunt ex coroll. propos. 8. lib. 6. erit, ex coroll. propos. 20. lib. 6. vt AD, ad DB, ita quadratum rectæ AD, ad quadratum rectæ DC; & componendo, vt AB, ad DB, ita quadrata rectarum AD, DC, simul ad quadratum rectæ DC: Sunt autem quadrata rectarum AD, DC, æqualia quadrato rectę AB. Igitur erit quoque vt AB, ad DB, ita quadratum rectæ AC, ad quadratũ rectæ DC; Ac proinde cum AB, sit ipsius DB, tripla, erit quoque quadratum rectæ AC, triplum quadrati rectæ HE, cum HE, æqualis sit ipsi DC: Atqui & quadratum rectæ EF, triplum quoque est eiusdem quadrati rectæ HE. Quadratum ergo rectæ AC, quadrato rectæ EF, æquale erit; & propterea recta AC, rectæ EF. Quare cum recta AC, ostensa quoque sit æqualis rectis IE, IF, IG; erunt quatuor triangula EFG, EFI, FGI, GEI, æquilatera & æqualia inter se. Constituta igitur iam est pyramis, seu Tetraedrum, cuius basis EFG, vertex vero I. Dico pyramidem hanc comprehendi sphæra data, cuius diameter AB; & diametrum sphæræ AB, potentia sesquialteram esse lateris EF, vel AC.

a 47. primi

b 12. tertij-dec,

EXTENDATVR perpendicularis IH, vsque ad K, vt sit HK, ipsi DB, & tota IK, toti AB, æqualis. Quia ergo tres rectæ AD, DC, DB, proportionales sunt, quibus æquales existunt tres IH, HE, HK; erunt quoque IH, HE, HK, proportionales. Quare cũ HE, sit ad IK, perpendicularis, & media proportionalis inter IH, HK, semicirculus circa IK, descriptus in plano rectarum IK, HE, transibit per E, vt mox ostendetur; Eodemque argumento tam semicirculus circa eandem rectam IK, descriptus in plano rectarum IK, HF, transibit per F, quam semicirculus circa eandem IK, descriptus in plano rectarum IK, HG, per G. Igitur quilibet horum semicirculorum circumductus, manente fixa diametro, sphæram describet, quæ constitutum Tetraedrum complectitur, cũ per omnes illius angulos E, F, G, I, incedat. Cum ergo hæc sphęra descripta æqualis sit sphæræ datæ, quod dia

meter IK, æqualis ponatur diametro AB, comprehendetur idem Tetraedrum sphæra data.

QVONIAM vero tres rectæ AB, AC, AD, proportionales sunt, ex coroll. propos. 8. lib. 6. erit vt AB, ad AD, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ AC, ex coroll. propos. 20. lib. 6. Est autem recta AB, sesquialtera rectæ AD, quod qualium partium 3. est AB, taliũ 2. sit AD. Igitur & quadratũ rectę AB, sesquialterum erit quadrati rectę AC; Ac propterea cum AB, sit diameter sphęrę, & AC, recta lateri pyramidis EF, æqualis; perspicuũ est, diametrũ sphęrę potẽtia sesquialterã esse lateris Tetraedri, seu pyramidis. Pyramidem ergo cõstituimus, & data sphęra cõplexi sumus, &c. Quod erat faciendum.

LEMMA.

QVOD autem semicirculus circa IK, in plano rectarum IK, HE, descriptus, transeat per E, facile demonstrabitur hoc proposito theoremate.

SI ad lineam rectam perpendicularis ducatur, quæ sit media proportionalis inter segmenta lineæ; semicirculus circa illam lineam rectã descriptus transibit per extremum punctum lineæ perpendicularis.

SIT enim ad AB, perpendicularis CD, & media proportionalis inter AC, & CB. Dico semicirculum circa AB, descriptum transire per D. Nam si transeat citra D, vel vltra, nimirum per punctum E; erit quoque CE, media proportionalis inter AC, & CB, ex coroll. propos. 13. lib. 6. Quare tam quadratum rectæ CD, quam quadratum rectæ CE, [a] *æquale erit rectangulo sub AC, CB; Ac proinde quadrata rectarum CD, CE, inter se æqualia, & ipsæ*

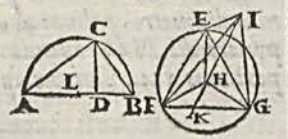
[a] 17. sexti

ipsæ rectæ CD, CE, æquales erunt, pars & totum. Quod est absurdũ. Transibit ergo semicirculus per D.

HINC manifestum est, semicirculum in superiori figura descriptum circa IK, in plano rectarum IK, HE, transire per E, cum HE, sit ad IK, perpendicularis, & media proportionalis inter IH, HK.

COROLLARIVM I.

HINC facile colligemus, diametrum sphæræ esse potentia quadruplam sesquialteram semidiametri circuli circa basim pyramidis descripti. Cum enim diameter sphæræ AB, ostensa sit potentia sesquialtera lateris pyramidis EF, erit quadratum rectæ EF, talium partium 6. qualiũ 9. est quadratum rectæ AB: At qualium partiũ 6. est quadratum rectæ EF, taliũ partium 2. est quadratum rectæ HE,



quod quadratum rectæ EF, triplum sit quadrati rectæ HE. Qualium igitur partium 9. est quadratum rectæ AB, talium partium 2. erit quadratum rectæ HE; Ac propterea diameter sphæræ AB, potentia est quadrupla sesquialtera semidiametri HE, cum proportio quadratorum sit, quæ 9. ad 2. [a] 12. tertij decimi.

COROLLARIVM II.

RVRSVS perpendicularis ex centro sphæræ ad planum basis pyramidis demissa, sexta pars erit diametri sphæræ, & tertia pars semidiametri. Sit enim L, centrum semicirculi ACB, eritque L, centrum quoq; sphæræ. Dico rectã LD, (quæ nimirũ ex centro sphæræ ad basin EFG, ducitur perpendicularis; cum AD, æqualis sit ipsi IH, & ideo punctum D,

idem quod H, quemadmodum & L, idem est, quod centrum sphæræ) esse sextam partem diametri sphæræ, nempe rectæ AB, & tertiã partẽ semidiametri AL. Quoniã.n. AD, dupla est ipsius DB; Qualium partium 4. est AD, talium 2. erit DB; ac proinde talium 6. tota AB, & semidiameter AL, talium 3. Quare si AD, est 4. & AL, 3. erit LD, 1. & idcirco LD, sexta pars erit rectæ AB, quæ fuit partium earundem 6. & tertia pars rectæ AL, quæ fuit earundem partium 3.

SIMILITER, altitudo pyramidis HI, duas tertias partes continebit ipsius diametri. Est enim HI, eadem, quæ AD, continens duas tertias diametri, ex constructione.

RVRSVS, qualium partium 9. ponetur quadratum diametri, talium 4. erit quadratum altitudinis pyramidis. Nã proportio 9. ad 4. est duplicata proportionis 3. ad 2. vt hic apparet 9. 6. 4.

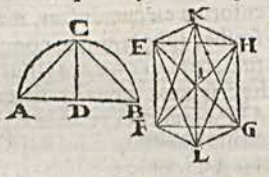
SCHOLIVM.

QVOD si ex materia aliqua conficiantur quatuor triangula æquilatera æqualia, disponanturque, vt hac figura indicat, facile ex ipsis rite inter se complicatis componetur Tetraedrum, secundum totã soliditatem. Hanc vero praxim, & sequentes quatuor, quibus reliqua quatuor solida regularia in materia quauis sensibili conficiuntur, desumpsimus ex Alberto Durero non ignobili scriptore.

15. PROBL. 2. PROPOS. 14.

OCTAEDRVM constituere, & sphęra complecti, qua & pyramidem; & demonstrare, quod sphæræ diameter potentia sit dupla lateris ipsius octaedri.

SIT sphæræ, quæ constitutam pyramidem comprehendit, diameter AB, circa quam semicirculus describatur ACB, & ex centro D, ad AB, perpendicularis ducatur DC, connectanturque rectæ AC, BC, [a] quæ æquales inter se erunt. Sumpta iam recta EF, quæ æqualis sit ipsi AC, vel BC, describatur super eam quadratũ EFGH, in quo ducantur diametri EG, FH, se mutuo secantes in I: eruntque rectæ IE, IF, IG, IH, æquales, cum sint semidiametri circuli circa quadratum descripti, vt in 4. lib. demonstratũ est. Deinde ex I, in vtramq; partem ad planum quadrati erigatur perpendicularis KL, ponanturque IK, IL, æquales ipsi IE: Et denique ex K, & L, deducantur ad angulos quadrati rectæ KE, KF, KG, KH, LF, LE, LH, LG. Dico solidum contentum octo triangulis KEF, KFG, KGH, KEH; LFE, LEH, LHG, LFG, esse octoaedrum, quod quæritur. Quoniã.n. latera EI, IK, trianguli EIK, æqualia sunt lateribus EI, IH, trianguli EIH; & anguli ipsis contenti, recti; (ipse quidem EIK, ex defin. 3. lib. 11. At vero EIG, [b] eo quod sit æqualis angulo GIH, sibi deinceps, ob æqualitatem laterum EI, IH, GI, IH, & basium EH, GH.) [c] Erit & basis EK, basi EH, æqualis; Eodemq; modo eidem EH, æqualis erit KH; ideoque triangulum æquilaterum erit KEH. Simili argumento concludemus, reliqua triangula esse æquilatera; atque adeo æqualia triangulo KEH, cum illorum latera æqualia sint lateribus quadrati EFGH, singula singulis. Constitutum igitur iam est octaedrum ex octo triangulis æquilateris & æqualibus. Quod octaedrum dico comprehendi sphęra diametri AB, qua nimirum & pyramis cõstructa comprehenditur; & diametrum sphærę AB, potentia duplam esse lateris EF, vel AC.



[a] 4. primi

[b] 8. primi

[c] 4. primi

QVONIAM.n.IE,perpẽdicularis eſt ad KL,ex 3. defin. lib. 11. & media proportionalis inter ſegmenta KI, IL;(quod tres rectę KI, IE, IL, ęquales ſint, ideoque eandem habeãt proportionem.) Semicirculus circa KL, in plano rectarum KL,IE, deſcriptus tranſibit per punctum E,ex lemmate prȩcedentis propoſ. Eadem ratione ſemicirculus deſcriptus circa eandem KL, in plano rectarum KL, IF, incedet per punctum F. Idemque dicendum eſt de punctis G,H.Igitur quilibet horum ſemicirculorum circumductus, manente fixa diametro KL, deſcribet ſphęram,quę complectitur octaedrum conſtitutum, cum per omnes illius angulos incedat. Cum ergo hęc ſphæra æqualis ſit datæ ſphæræ, cuius diameter AB;(Nam cum rectæ AC,EF,æquales ſint, ideoque ipſarum quadrata æqualia; Sit autem tam quadratum rectæ AC,duplum quadrati rectæ AD, quam quadratum rectæ EF,quadrati rectę EI;Erunt & rectæ AD, EI,hoc eſt, KI, ſemidiametri æquales. Quare & totæ diametri AB, KL, æquales erunt; ac proinde ſphæræ ipſarum æquales exiſtent.) comprehendetur idem octaedrum data ſphęra.

[a] 47. primi

QVIA vero quadratum rectæ AB,[a] æquale eſt quadratis rectarũ AC, BC,quæ æqualia ſunt; erit quadratũ rectæ AB, duplum quadrati rectæ AC. Quamobrem cũ AB, ſit diameter ſphæræ, & AC, recta æqualis lateri octaedri EF; manifeſtum eſt, diametrum ſphæræ potentia duplam eſſe lateris octaedri. Itaque octaedrum conſtituimus, & ſphæra complexi ſumus, qua & pyramidem, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM I.

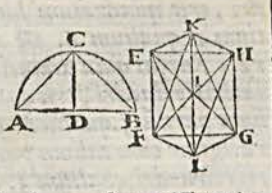
EX dictis manifeſtum eſt, in octaedro tres diametros ſe mutuo ad angulos rectos ſecare in centro ſphæræ: quales ſunt KL,EG,FH,ſecãtes ſeſe in I. Omnes enim anguli ad I, oſtenſi ſunt recti. Atque proinde, cum KI, recta ſit ad lineas EG, HF;

[b] 4. vndec.

b recta quoque erit ad planum EFGH, per ipſas ductũ;

[a] 18. vnde.

a Ideoque & plana KFLH, ELGK, per KI, ducta, recta erunt ad planum EFGH. Immo eadem ratione, vt paucis rem comprehendam, tria plana EFGH, KFLH, ELGK, ſe mutuo ad angulos rectos ſecabunt; Quæ quidem plana ſunt quadrata, cum omnia eorum latera ſint ipſius octaedri latera, ac proinde æqualia exiſtant inter ſe, comprehendantque angulos rectos; eo quod (cum quadratum diametri ſphæræ duplum ſit quadrati lateris octaedri, vt oſtendimus,) quadratum diametri HF, æquale exiſtit quadratis laterũ octaedri FK, KH.[b] Ita enim efficitur, vt angulus FKH, rectus ſit. Eademque eſt ratio de cæteris angulis.



[b] 48. primi

COROLLARIVM II.

OCTAEDRVM diuiditur in duas pyramides ſimiles & æquales, quarum baſis communis, eſt quadratum EFGH, vertices vero K, & L; altitudines denique, ſemidiametri IK, IL: cuiuſmodi ſunt pyramides EFGHK, EFGHL. Nam plana vnius ſunt ſimilia & æqualia planis alterius, vt conſtat, cum ſint triangula æquilatera, & æqualia, præter baſin communem, quæ eſt quadratum ſubduplum quadrati diametri ſphæræ, vt eſt demonſtratum.

COROLLARIVM III.

SI tetraedrum, & octaedrum in eadẽ ſphæra deſcribantur, erit tetraedri latus potentia ſeſquitertiũ

lateris octaedri. Ponatur enim quadratum diametri sphæræ diuisum in sex partes. [a] Quoniam igitur diameter sphæræ est potẽtia sesquialtera lateris tetraedri, erit quadratum lateris tetraedri talium partium 4. qualium 6. est quadratum diametri sphæræ. [b] Rursus quia diameter sphæræ est potentia dupla lateris octaedri, erit quadratum lateris octaedri talium partiũ 3. qualiũ 6. est quadratũ diametri sphæræ. Igitur cum talium partium 4. sit quadratum lateris tetraedri, qualium 3. est quadratum lateris octaedri; perspicuum est, latus tetraedri potentia sesquitertium esse lateris octaedri.

[a] 13. tertij decimi

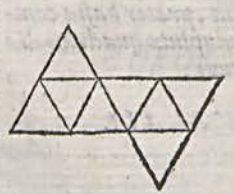
[b] 14. tertij decimi

COROLLARIVM IIII.

DENIQVE, quia in quadrato EFGH, recta EH, parallela est rectæ FG; & in quadrato ELGK, recta EK, rectæ GL: [c] Erit planum EHK, per EH, EK, ductum plano FGL, per FG, GL, ducto parallelum. Cum igitur eadem sit ratio de cæteris basibus octaedri, efficitur, bases octaedri oppositas inter se parallelas esse.

[c] 15. vnde.

SCHOLIVM.



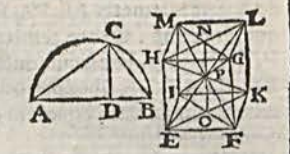
QVOD si ex materia aliqua conficiantur octo triangula æquilatera inter se æqualia, disponanturque, vt hæc figura indicat, facile ex ipsis rite inter sese complicatis componetur octaedrum secundum totam soliditatem, vt ait Albertus Durerus.

CVBVM

PROBL. 3. PROPOS. 15. 14.

CVBVM constituere; & sphæra cõplecti, qua & priores figuras; & demonstrare, quod sphæræ diameter potentia sit tripla lateris ipsius cubi.

SIT sphæræ, quæ prædictas figuras comprehendit, diameter AB, circa quã semicirculus describatur ACB: & ex AB, auferatur tertia pars BD, vt sit AB, ipsius BD, tripla. Deinde ducta DC, perpendiculari ad AB, cõnectantur rectæ AC, BC. Super rectã EF, quæ rectæ BC, sit æqualis, quadratum constituatur EFGH, super quod erigantur perpendiculares EI, FK, GL, HM, æquales quoque ipsi BC, quarum extrema coniungantur rectis IK, KL, LM, MI. Quoniam ergo rectæ EI, FK, ad planũ EFGH, rectæ sunt; [a] erunt rectæ EI, FK, parallelæ: Sunt autem & æquales, quod vtraque æqualis posita sit ipsi BC, hoc est, ipsi EF. [b] Igitur & EF, IK, parallelæ sunt & æquales; & ideo parallelogrammũ est EFKI; In quo, cum lineæ EI, IK, KF, æquales sint ipsi EF, omnes quatuor lineæ æquales existunt: [c] Sũt autem & omnes quatuor anguli recti, cum EIK, FKI, æquales sint oppositis rectis KFE, IEF. Igitur EFKI, quadratum est. Eadem ratione quadrata erunt FKLG, GLMH, HMIE; Atque idcirco & IKLM, quadratum erit, [d] cũ simile sit & æquale quadrato opposito EFGH. Est enim EL, solidum parallelepipedum, [e] quod eius plana opposita sint parallela, nimirum per lineas parallelas se mutuo tangentes ducta. Quare cubus erit EL. Quem dico comprehendi sphæra diametri AB. Sint enim planorum oppositorum EFKI, GHML, diametri EK, FI, GM,



[a] 6. vnde.

[b] 33. primi

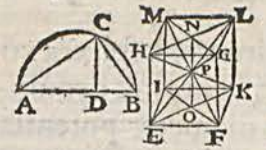
[c] 34. primi

[d] 24. vnde.

[e] 15. vnde.

GM, *H* L, per quæ ducantur plana E *K* L H, F I M G.

[a] 28. vnde.



[a] Quia igitur tam planum E *K* L H, quam F I M G, cubũ bifariam secat; vtrumque per centrum cubi trãsibit, ex scholio propos. 39. lib. 11. per punctum videlicet P, in quo ex coroll. eiusdẽ propos. se mutuo quoque bifariam diuident omnes diametri cubi; Ac propterea communis planorum sectio, recta scilicet NO, per idem punctum P, incedet. Quia vero plana E *K* L H, F I M G, rectãgula sunt, (Cũ.n. HE, perpẽdicularis sit duabus rectis

[b] 4. vnde.

EI, EF, ob quadrata E *M*, E *K*; [b] perpẽdicularis quoq; erit ad planũ E *K*, ideoq; & ad rectã E *K*, ex defi. 3. lib. 11. Rectus ergo angulus est H E K. Eadem ratione recti erunt reliqui anguli in plano E *K* L H, necnon & anguli in plano F I M G. Rectangula ergo sunt plana E K L *H*, F I *M* G, & æqualia, quod latera vnius æqualia sint lateribus alterius; erunt quoque eorum diametri EL, HK, FM, GI, æquales, vt constat ex scholio propos. 34. lib. 1. Ac proinde & semidiametri *P*E, P*L*, PH, PK; PF, PM, PG, PI, æquales erunt. Quare semicirculus circa E L, ex centro P, descriptus, & circumductus, fixa manente diametro E *L*, sphęrã describet per omnes cubi angulos transeuntem; quam quidem æqualem esse sphęrę diametri AB, ita demonstrabitur.

[c] 47. primi

CVM quadratũ rectæ EK, [c] æquale sit quadratis æqualibus rectarũ æqualiũ EF, FK, ac proinde duplũ quadrati rectę EF, hoc est, quadrati rectæ *K* L: Erũt quadrata rectarum E K, K L, tripla quadrati rectæ K L: [d] Est autem

[d] 47. primi

quadratis rectarum E *K*, K L, æquale quadratum rectæ EL, qd angulus E K L, sit rectus in rectangulo E K L H. Igitur & quadratum rectæ E L, triplum erit quadrati rectæ K *L*, hoc est, quadrati rectæ BC: At vero eiusdem quadrati rectæ B C, triplum est quadratum rectæ A B. (Nam tres rectæ *A*B, B C, BD, proportionales sunt, ex coroll. propos. 8. lib. 6. Ac proinde ex coroll. propos. 20. lib. 6. vt est AB, ad B *D*, ita erit quadratũ rectæ *A* B, ad quadratum rectæ BC. Cum ergo *A* B, ipsius B D, sit tripla; erit quoque quadratum rectæ AB, quadrati rectæ BC, triplum.) Igitur quadrata rectarum E*L*, AB, æqualia sunt; ac propterea ipsæ rectæ EL, *A*B, diametri nimirum sphærarum, ideoque & ipsarũ sphæræ æquales existunt.

QVIA vero ostensum est quadratum diametri E*L*, triplum esse quadrati lateris cubi *K* L; manifestum est, diametrum sphæræ potentia triplam esse lateris cubi. Quocirca cubum constituimus, & sphæra complexi sumus, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM I.

EX demonstratione huius problematis manifestum est, omnes diametros cubi inter se esse æquales, seseque mutuo bifariam in centro sphæræ secare. Atque eadem ratione rectas lineas, quæ centra quadratorum oppositorum coniungunt, bifariam diuidi in eodem centro. Demonstratum enim est, diametros cubi EL, HK, FM, GI, æquales esse, seseque mutuo bifariam secare in centro P. Quod vero & recta NO, coniungens centra N, & O, quadratorum oppositorum GHML, EFKI, in eodem centro P, bifariam diuidatur, hac ratione ostendetur. Duo anguli OFP, OPF, trianguli OFP, æquales sunt duobus angulis N M P, N P M, trianguli NMP: ([a] Nam angulus OFP, æqualis est alterno NMP, inter lineas FI, GM, [b] quæ parallelæ sunt, cum sint communes sectiones planorũ parallelorum EFKI, GHML; [c] & angulus O P F, æqualis est oppositio ad verticem NPM.) Sunt autem & latera PF, PM, quibus adiacent, æqualia, cum sint semidiametri. Igitur & latera PO, PN, æqualia erũt; ac proinde recta NO, bifariam secabitur in P. Eademque est ratio de cæteris lineis coniungentibus centra aliorum quadratorum oppositorum.

[a] 29. primi
[b] 16. vnde.
[c] 15. primi

CO-

COROLLARIVM II.

RVRSVS potentia diametri sphæræ, seu cubi, æqualis est potentiis laterum tetraedri & cubi simul sumptis. [a] *Nam qualium partium 9. est quadratum diametri, talium 6. est quadratum lateris tetraedri:* [b] *Qualium vero partium 9. est idem quadratum diametri, talium 3. est quadratum lateris cubi. Igitur quadratum lateris tetraedri, & quadratum lateris cubi simul sunt partium 9. quemadmodum & quadratum diametri; Ac proinde quadratum diametri æquale est quadratis dictorum laterum. Hoc etiam manifestum est ex semicirculo circa diametrũ sphæræ descripto, in quo latus tetraedri est AC, cubi vero BC.* [c] *Perspicuum autem est, diametrũ sphæræ AB, posse & rectam AC, & rectam BC, cum angulus ACB, sit rectus.*

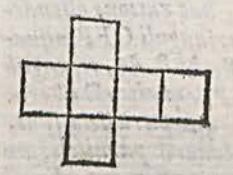
[a] 13. tertij dec.

[b] 15. tertij dec.

[c] 47. primi

SCHOLIVM.

QVOD si ex aliqua materia conficiantur sex quadrata inter se æqualia, disponanturque, vt hæc figura indicat, facile componetur cubus secundum totam soliditatem, si dicta quadrata rite complicentur inter se. Efficietur enim ex illis figura quædam solida octo angulos solidos continens instar tessaræ cuiuspiam, vt constat.



16. PROBL. 4. PROPOS. 16.

ICOSAEDRVM constituere; & sphæra complecti, qua & ante dictas figuras;

guras: & demonstrare, quod Icosaedri latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Minor.

SIT sphæræ, quæ prædictas figuras cõprehẽdit, diameter AB, circa quã semicirculus describatur ACB: Et ex AB, abscindatur quinta pars BD, vt AB, ipsius BD, sit quintupla: & ipsius AD, sesquiquarta; At vero AD, ipsius BD, quadrupla. Deinde ducta DC, perpendiculari ad AB, connectantur rectæ AC, BC. Ad interuallum rectæ EF, quæ ipsi BC, sit æqualis, circulus describatur ex centro E; [a] in quo pentagonum æquilaterum inscribatur FGHIK. Post hæc diuisis arcubus FG, GH, HI, IK, KF, bifariam in punctis L, M, N, O, P, cõnectantur rectę FL, LG, GM, MH, &c. nempe latera decagoni. Deinde ex cẽtro E, & punctis L, M, N, O, P, ad planum circuli FGHIK, perpendiculares erigantur EQ, LR, MS, NT, OV, PX, quę æquales ponantur semidiametro EF, seu rectæ BC. Eruntq; omnes inter se æquales; [b] sed & parallelæ sunt. Igitur rectæ, quæ illas cõiungunt, nempe EL, QR; EM, QS; EN, QT; EO, QV; EP, QX. (quas tamen omnes, vt vitaremus confusionem, non duximus.) binæ inter se æquales erunt: Ac proinde cum æquales sint EL, EM, &c. semidiametro EF; æquales quoque erunt QR, QS, QT, QV, QX, & inter se, & semidiametro EF, seu rectę BC. [d] Quia vero planum per rectas QR, QS, ductum parallelum est plano FGHIK, per rectas EL, EM, ducto: eademq; ratione planum p rectas QS, QT, ductum parallelum est plano eidem FGHIK, per rectas EM, EN, ducto, conuenit autem planum per rectas QR, QS, cum plano per QS, QT, in recta QS. Igitur efficient hæc duo plana vnum planum per ea, quę ad propos. 16. lib. 11. ostendimus. Non aliter ostendemus planũ per QT, QV, cum hoc plano efficere vnum planum; necnon planum per QV, QX; & planum per QX, QR. Sunt ergo quinque lineę QR, QS, QT, QV, QX, in eodem plano; Ac proinde si ex Q, ad interuallum QR, in eo plano circulus describatur, is per reliqua puncta S, T, V, X, transibit, eritque

[a] 11. quar.

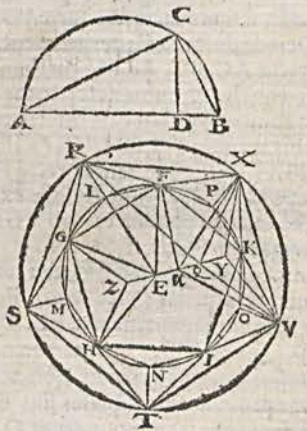
[b] 6. vndec.

[c] 33. primi.

[d] 15. vnde.

æqualis

æqualis circulo FGHIK. Coniungantur puncta R,S,T, V,X,rectis RS,ST,TV,VX,XR. [a] Quia igitur LR, PX, æquales sunt,& parallelæ; si concipiatur duci recta LP; [b] erunt quoque LP,RX, æquales & parallelæ; [c] Ac proinde ex circulis æqualibus æquales arcus auferent: Aufert autem LP,quintam partem circuli FGHIK,nempe duas decimas partes FL,FP. Igitur & RX,quintam partem auferet circuli RSTVX. Simili prorsus argumento concludemus, reliquas rectas RS,ST,TV, VX, quintas partes auferre. Quamobrem pẽtagonum æquilaterũ est RSTVX, omnia latera æqualia habẽs lateribus pẽtagoni FGHIK. Demittantur ex angulis pentagoni RSTVX, ad angulos pẽtagoni FGHIK, rectæ RF, RG, SG, SH, TH, TI, VI, VK, XK, XF. Quia igitur perpendicularis LR, æqualis ponitur semidiametro EF, hoc est, lateri hexagoni circuli FGHIK; & est LF, latus decagoni; [d] erit quadratum lateris pẽtagoni eiusdem circuli æquale quadratis rectarum LR, LF: [e] Est autem eisdẽ quadratis æquale quadratum rectæ FR; quod angulus FLR, rectus sit ex 3. defin. lib. 11. Igitur quadratum rectæ FR, æquale est quadrato lateris pentagoni, ideoque recta FR, lateri pẽtagoni LP, seu FG, hoc est, ipsi RX, æqualis erit. Eademq; rõne erunt reliquæ lineæ RG, SG, SH, &c. reliquis lateribus vtriusq; pentagoni æquales; Ac propterea decem triãgula RFX, RFG, RGS, SGH, SHT, THI, TIV, VIK VKX, XKF, æquilatera erunt, & inter se æqualia; cum eorum omnia latera æqualia sint lateribus pentagoni æqui-



[a] 6. vndec.
[b] 33. primi
[c] 28. tertij.
[d] 10. tertij. dec.
[e] 47. primi

lateri. Post hæc, perpendicularis EQ, in vtramq; partẽ extendatur, sintq; rectæ QY, EZ, æquales singulæ, lateri decagoni circuli FGHIK, vel RSTVX; & connectantur rectæ VQ, VY, XQ, XY, GE, GZ, HE, HZ. Qm̃ ergo QX, semidiameter est circuli RSTVX, hoc est, latus hexagoni, & QY, latus est decagoni eiusdem circuli; [a] erit quadratũ lateris pentagoni XV, æquale quadratis rectarũ QX, QY; [b] Est autẽ eisdem quadratis æquale quadratum rectæ XY, quod angulus XQY, rectus sit ex defin. 3. lib. 11. (Nam cum plana circulorum FGHIK, RSTVX, parallela sint ostensa, sitque EQ, ad illius planum recta, ex constructione, erit quoque EQ, ad huius planum recta, ex scholio propos. 14. lib. 11. ideoque perpendicularis ad rectam QX, in eodem plano.) Igitur quadratum rectæ XY, æquale est quadrato rectæ XV, propterea que recta XY, rectæ XV, æqualis. Eodemque modo eidem XV, æqualis ostendetur VY; Ac proinde triangulum VYX, æquilaterum est. Non aliter demonstrabimus, si ducantur rectæ RY, SY, TY, (quas tamen, vt vitaremus confusionem linearum, non duximus.) quatuor triangula RYX, RYS, SYT, TYV, æquilatera esse, & æqualia triangulo VYX, hoc est, prioribus decem, cum omnium latera æqualia sint lateribus pentagoni. Simili argumento æquilaterum erit triangulum GZH, (cum EG, sit latus hexagoni, nempe semidiamer, & EZ, latus decagoni, angulusque GEZ, rectus, ex 3. defin. lib. 11.) nec non quatuor triangula HZI, IZK, KZF, FZG, (quorum tamen lineas, ne pareremus confusionem, non duximus,) quę omnia prioribus quindecim æqualia erunt, eandem ob causam. Cum igitur omnia hæc triangula viginti æquilatera sint, & æqualia, copulenturque singula singulis per lineas rectas, nempe per eorum latera; constitutum erit ex ipsis Icosaedrum. Quod dico comprehendi sphæra diametri AB.

DIVISA enim recta EQ, bifariã in α, ducantur rectæ αF, αX, αV. Quoniam igitur latera αQ, QV, trianguli αQV, æqualia sunt lateribus αQ, QX, trianguli αQX, cum QV, QX, sint semidiametri circuli RST, VX;

[a] 10 tertij. dec.
[b] 47. primi.

VX: Sunt autem & anguli αQV, αQX, æquales, nempe recti, ex defin. 3. lib. 11. [a] Erunt & bases αV, αX, æquales. Eademque ratione, si ducãtur rectæ ex α, Q, ad R, S, T, ostendentur rectæ αR, αS, αT, æquales & inter se, & ipsis αV, αX. Rursus quia latera αQ, QX, trianguli αQX, æqualia sunt lateribus αE, EF, trianguli αEF, cum QX, EF, sint semidiametri circulorum æqualium, & EQ, dimidia sit bifariam in α: Sunt autem & anguli αQX, αEF, æquales, ni mirum recti, ex defin. 3. lib. 11. [b] Erunt quoque bases αX, αF, æquales: eodemq; modo si ex α, E, ad G, H, I, K, rectæ ducnatur, ostendentur αG, αH, αI, αK, æquales ipsi αX; Ac proinde decem lineæ ductæ ad decem angulos F, G, H, I, K; R, S, T, V, X, æquales sunt. Quoniam vero QE, semidiameter est, hoc est, latus hexagoni circuli FGHIK; & EZ, latus decagoni eiusdẽ circuli; [c] erit QZ, diuisa in E, extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit QE. Quare minus segmentum ZE, assumens E α, dimidium maioris segmenti, hoc est, recta αZ, quintuplum potest eius, quod ex $E\alpha$, describitur, quadrati: Potest autem & recta αF, quintuplum eiusdem quadrati rectæ $E\alpha$. (Nam cum quadratum rectæ EF, quadruplum sit quadrati rectæ αE, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod recta EF, dupla sit ipsius $E\alpha$; erunt quadrata rectarum EF, $E\alpha$, semel quintupla quadrati rectæ $E\alpha$. [c] Cum ergo quadratis rectarum EF, $E\alpha$, æquale sit quadratum rectæ AF; erit quoq; quadratum rectæ αF, quintuplum quadrati rectæ $E\alpha$.) Igitur æqualia sunt quadrata rectarum, αZ, αF, ac proinde rectæ ipsæ αZ, αF, æquales erunt. Cum igitur ZY, bifariam secetur in α, (propterea quod si æqualibus αE, αQ, æquales rectæ addantur EZ, QY, totæ $Z\alpha$, $Y\alpha$, æquales fiant.) Erunt omnes rectæ ductæ ex α, ad omnes angulos Icosaedri æquales. Quocirca sphæra descripta circa diametrum ZY, ex centro α, per omnes angulos Icosaedri constituti transibit. Hanc ergo sphæram dico æqualem esse sphęrę diametri AB.

[a] CVM. n. sit vt αZ, ad αE, ita YZ, dupla ipsius αZ, ad QE, duplam ipsius αE; [b] Ac propterea vt quadratum rectę αZ, ad quadratum rectę αE, ita quadratũ rectæ YZ, ad quadratum rectæ QE; sit autem quadratũ rectæ αZ, ostensum quintuplum quadrati rectæ αE: Erit quoque quadratum rectæ YZ, quintuplum quadrati rectæ QE, hoc est, quadrati rectæ BC; quod recta QE, æqualis sit posita semidiametro EF, hoc est, rectę BC: Est autem & eiusdem quadrati rectæ BC, quintuplum quadratum rectæ AB; (Nam cum, ex coroll. propos. 8. lib. 6. sit vt AB, ad BC, ita BC, ad BD; erit vt AB, ad BD, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectę BC, ex coroll. propos. 20. lib. 6. Ac proinde existẽte AB, quintupla ipsius B D, erit etiam quadratum rectæ AB, quintuplum quadrati rectæ BC.) Quadrata igitur rectarum YZ, AB, æqualia sunt, ideoque & rectæ YZ, AB; Ac propterea & sphæræ circa ipsas, æquales erunt.

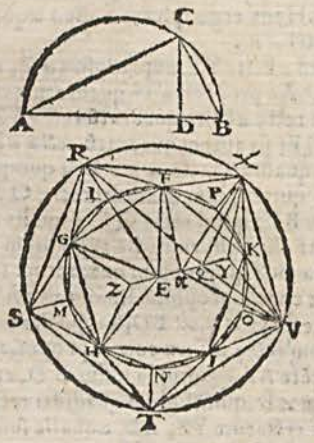
QVONIAM denique diameter sphæræ AB, Rationalis ponitur; (Nam comparatione ipsius ostendendũ est, latus Icosaedri esse lineam Irrationalem, quæ Minor vocatur.) põtq; quintuplũ quadrati rectæ BC, hoc est, rectę illi æqualis EF; erit quoque semidiameter E F, circuli FGHIK, Rationalis. (Nam quadrata rectarum AB, EF, cum habeant proportionem, quam numerus ad numerum, nempe quam 5. ad 1. vel 10. ad 2. [c] erunt commensurabilia; Ac propterea & rectæ AB, EF, commensurabiles erunt, saltem potentia. Cum ergo AB. sit Rationalis, erit & EF, Rationalis.) Quare & tota diameter circuli FGHIK, Rationalis erit; Ac propterea F G,

a 4. primi. — b 4. primi. — c 9. tertij dec. — 3. tertij dec. — c 47. primi

a 15. quin. — b 22. sexti — c 6. deci.

latus pentagoni, hoc est, latus Icosaedri, Irrationalis erit linea, quæ vocatur Minor. Icosaedrum igitur cõstituimus, & sphæra sumus complexi, qua & antedictas figuras; & demonstrauimus, quod Icosaedri latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Minor. quod erat facien.

COROLLARIVM I.



EX dictis infertur, sphæræ diametrum esse potẽtia quintuplam semidiametri circuli quinque latera Icosaedri ambientis, ex quo scilicet Icosaedrum constitutũ est, & quip quinque Icosaedri angulos incedit. Ostensum. n. est quadratum diametri AB, quintuplum esse quadrati rectæ BC, hoc est, semidiametri EF.

COROLLARIVM II.

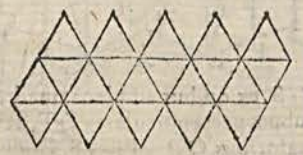
ITEM manifestum est, sphæræ diametrum esse compositam ex latere hexagoni, hoc est, ex semidiametro, & duobus lateribus decagoni eiusdem circuli: Nam YZ, diameter sphæræ componitur ex EQ, latere hexagoni, & ex QY, EZ, lateribus decagoni circuli FGHIK.

COROL-

COROLLARIVM III.

CONSTAT denique latera Icosaedri opposita, qualia sunt RX, HI, esse parallela. Nam recta RX, ostensa est parallela rectæ, quæ ex L, in P, duceretur. Cum igitur eidẽ rectæ LP, sit quoq; parallela recta HI, vt in scholio propos. 27. lib. 3. demonstrauimus; (eo quod æquales sunt arcus HL, IP; continet enim vterque tres decimas partes totius circumferentiæ,) perspicuum est, rectas RX, HI, esse parallelas. Eademque est ratio de cæteris lateribus oppositis.

SCHOLIVM.



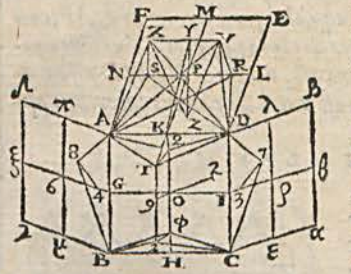
QVOD si ex aliqua materia conficiantur viginti triangula æquilatera inter se æqualia, disponanturque, vt hæc figura indicat, componetur Icosaedrum secundum totam soliditatem, si rite inter sese aptentur.

PROBL. 5. PROPOS. 17. 17.

DODECAEDRVM constituere; & sphæra cõplecti, qua & prędictas figuras; & demõstrare, quod Dodecaedri latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Apotome.

SIT vna basis cubi data sphæra comprehensi, quadratũ ABCD, cui insistat aliud æquale ad rectos angulos ADEF, vt sit cõmunis horum sectio recta AD, (Insistunt

ſtunt enim omnes baſes cubi ſibi mutuo ad angulos rectos. Nam in præcedentibus, vt cubus conſtitueretur, erectæ ſunt ex angulis baſis EFGH, quatuor lineæ EI, FK, GL, HM, ipſi baſi EFGH, perpendiculares. Id quod facile apparere poteſt ex figura propoſitionis 15. huius lib. [a] Quare & baſes cubi per ipſas ductę, rectæ erunt ad eandem baſin EFGH.) Diuiſis itaque cunctis lateribus bifariam in punctis G, H, I, K, L, M, N, quę rectis cõnectantur ſecãtibus ſeſe in O, P, centris quadratorum, vt cõſtat ex demonſtratione octaui problematis lib. 4. Secentur OK, PL, PN, extrema ac media ratione in pũctis Q, R, S, ex quibus ad plana quadratorum educantur extra cubum perpendiculares QT, RV, SX, æquales ſegmẽtis maioribus OQ, PR, PS. Coniunctis deinde rectis AT, AX, DT, DV, VX; Dico ATDVX, eſſe vnum ex duodecim pentagonis æquilateris, & æquiangulis Dodecaedri conſtituendi. Quod enim pentagonum ATDVX, ſit in vno plano, ita oſtendetur. Cum RV, SX, ſint ad quadratum ADEF, rectę, [b] ipſę erunt parallelę; Ac proinde, cũ ſint æquales, (quia ſegmenta maiora PR, PS, quibus æquales ſunt poſitæ, æqualia ſunt, cum & lineæ ſectę PL, PN, æquales ſint.) [c] erunt quoque coniungentes rectę RS, VX, æquales & parallelę: [d] Eſt autem & AD, eidem RS, ſiue LN, parallela, eo quod AN, DL, parallelę ſunt & æquales. [e] Igitur & AD, VX, parallelę ſunt; [f] Ac propterea rectæ coniungentes AX, DV, in eodem cum ipſis erunt plano; ideoque trapezium ADVX, in vno exiſtet plano: Eſt autem & triangulum ATD, in vno plano, Di co quod & in eodẽ plano cum trapezio ADVX. Ex Pn. ducatur PY, parallela ipſi RV, [g] quæ erit recta ad quadratum ADEF, quod ad idem recta ſit RV: Et conectantur re-



[a] 18. vnde.
[b] 6. vndec.
[c] 33. primi
[d] 33. primi
[e] 9. vndec.
[f] 7. vndec.
[g] 8. vndec.

ctæ KT, KY. Qm igitur eſt vt OK, ad OQ, ita OQ, ad QK, ob ſectionem rectæ OK: Eſt autem KP, ipſi OK, æqualis; (ſunt enim dimidia latera cubi;) & PY, ipſi OQ, (cum æqualis ſit ipſi RV, quæ poſita fuit æqualis ipſi OQ, maiori ſegmento;) Erit quoque vt KP, ad PY, ita OQ, hoc eſt, QT, illi æqualis, ad QK. Quare cum triangula PKY, QTK, duo latera habeant duobus lateribus proportionalia, ſintque ad vnum angulum K, compoſita, [a] ita vt homologa latera ſint parallela, nempe PK, & QT, inter ſe, quod vtrumque rectum ſit ad quadratum ABCD; & PY, QK, inter ſe, quod vtrumque rectum ſit ad quadratum ADEF: [b] Erunt reliqua latera KY, KT, in rectam lineam collocata; [c] Ac propterea recta TY, in vno erit plano, ideoque planum ATD, & planum ADVX, vnum planum conſtituent, per rectas TY, AD, ductum. Quocirca pentagonum ATDVX, in vno exiſtit plano.

[a] 6. vndec.
[b] 32. ſexti
[c] 1. vndec.

QVOD vero ſit æquilaterum, ita docebitur. Cum latera AN, NS, trianguli ANS, æqualia ſint lateribus AK, KQ, trianguli AKQ; (Sunt.n. AN, AK, dimidia latera cubi, & NS, KQ, ſegmenta minora rectarum æqualium ſectarũ.) & anguli ANS. AKQ, recti; ſi ducatur recta AQ, [d] erunt baſes AS, AQ, æquales. Rurſus cum latera AS, SX, trianguli ASX, ſint æqualia lateribus AQ, QT, trianguli AQT; (Nã rectæ AS, AQ, oſtenſæ ſunt æquales, & SX, QT, ſunt ſegmenta maiora rectarum æqualium ſectarum) & anguli ASX, AQT, recti, ex defin. 3. lib. 11. [e] Erunt quoque baſes AX, AT, æquales. Quod ſi ducatur recta DQ, oſtendemus eodem argumento, rectam DT, rectæ AT; ſi vero ducatur recta DR, rectam DV, rectæ DT, eſſe æqualem. Sunt igitur pentagoni quatuor latera XA, AT, TD, DV; æqualia; quibus etiam æquale oſtendemus reliquum VX, hac ratione. [f] Quadrata rectarum PN, NS, ſimul tripla ſunt quadrati rectæ PS, hoc eſt, quadrati rectæ SX: Eſt autem quadrato rectæ PN, æquale quadratum rectæ AN. Igitur & quadrata rectarũ AN, NS, ſimul tripla ſunt quadrati rectæ SX. [g] Cum ergo quadratis rectarũ AN, NS, æquale ſit quadratum rectæ AS; erit quoque quadratum

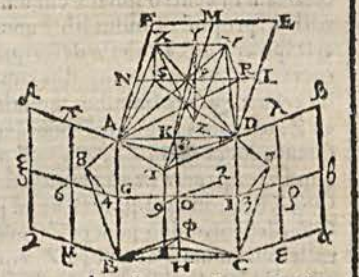
[d] 4. primi.
[e] 4. primi.
[f] 4. tertij decimi.
[g] 47. primi

rectæ AS, triplum quadraxi rectæ SX; Ac proinde quadrata rectarũ *AS*, SX, simul, quadrupla eiusdẽ quadrati
[a] *47. primi.* rectæ SX. [a] Est autem quadratis rectarum AS, SX, æquale quadratum rectæ *AX*. Quadratũ ergo rectę AX quadruplum quoque erit quadrati rectę SX, hoc est, quadra
[b] *34. primi* ti rectæ PS, hoc est, quadrati rectę XY; [b] Sunt enim rectæ P S, X Y, æquales. Cum igitur & quadratum rectę VX, quadruplum sit eiusdem quadrati rectę XY, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod VX, dupla sit ipsius XY; Erunt quadrata rectarũ AX, VX, æqualia; Ac proinde rectæ ipsę æquales. Quare cum & XA, AT, TD, DV, ostensæ sint esse æquales; æquilaterum est pẽtagonum ATDVX.

QVOD autem & æquiangulum sit, ita perspicuum fiet. Ductis rectis AR, AV; cum PN, secta sit in S, extre-
[c] *5. tertij de.* ma ac media ratione, eique addita PR, æqualis maiori
[d] *4. tertij d.* segmento PS; [c] erit quoque N*R*, secta in P, extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit NP. [d] Quadrata igitur rectarum N*R*, R P, simul tripla sunt quadrati rectę NP, hoc est, quadrati rectæ A N: Est autem quadratum rectæ RV, æquale quadrato rectæ RP. Ergo & quadrata rectarum NR, RV, tripla sunt quadrati rectæ AN; Ac proinde quadrata rectarum NR, RV, AN, quá-
[c] *47. primi* drupla sunt eiusdem quadrati rectæ A N. [c] Sunt autem quadrata rectarum N R, A N, æqualia quadrato rectæ AR. Igitur & quadrata rectarũ RV, AR, quadrupla sunt
[f] *47. primi* quadrati rectæ AN. [f] Cum ergo quadratis rectarũ *AR*, RV, æquale sit quadratum rectæ A V; Erit quoque quadratum rectæ *A* V, eiusdem quadrati rectę *A* N, quadruplum. At vero eiusdem quadrati rectæ AN, quadruplum est quadratum rectæ AD, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod A *D*, dupla sit ipsius A N. *A*equalia igitur sunt quadrata rectarum AV, AD, ideoq; & rectę AV, AD, æquales. Simili argumento, ductis rectis *D*S, DX, ostendemus D X, *D* A, æquales esse; ac propterea tres rectas AD, AV, DX, inter se esse æquales. Quoniã igitur latera T*A*, TD, trianguli T A D, æqualia sunt lateribus D V, VX, trianguli D XV; & bases *A*D, DX, æquales quoque:
[g] *8. primi* [g] Erunt & anguli *A*TD, DVX, æquales. Non secus ostendetur angulus DVX, æqualis angulo AXV, Ac proinde, cum

cũ in pentagono æquilatero *A*TDVX, tres habeãtur anguli æquales ATD, *D*VX, AXV, [a] ipsum erit æqangulũ. [a] *7. tertij de.*

QVOD si sumantur alia duo cubi quadrata Cαβ D, Bγδ A, recta ad quadratum ABCD, in communibus sectionibus CD, AB, quorum singula latera bifariam secentur in ε, θ, λ, I, μ, ξ. π, G, punctis, quæ rectis iungantur se mutuo secantibus in quadratorũ centris ρ, σ. Secẽtur deinde O*H*, OK, ρ I. σ G, extrema ac media ratione in punctis φ, Q; 3, 4, ex quibus ad plana quadratorum educãtur ad partes cubi exteriores, perpendiculares φ 2, Q T, 37, 48, æquales segmentis maioribus φO, QO, 3 ρ, 46, coniunganturq; rectæ T 2, 2C, C 7, 7D, DT, T*A*, A 8, 8B, B 2, demonstrabimus eadem ratione, pẽtagona T 2 C 7 D, T 2 B 8 A, æquilatera esse & æquiangula, & æqualia priori *A* T DV X, ob communia latera T*D*, T A. Constructa igitur iã sunt tria pentagona tangẽtia cubi tria latera *A*D, DC, AB, & sibi mutuo cohærẽtia lateribus communibus T*D*, TA. Si igitur eadem methodo fabricentur alia nouem similia pentagona tãgentia reliqua nouem cubi latera; cõstitutum erit Dodecaedrum. Quod quidem sphęra comprehendi, qua & cubus, & præcedentes figuræ, hac arte demonstrabimus.



INTELLIGANTVR plana cubi oppositа secari planis, quæ per rectas planorum latera bifariam secantes ducuntur, nempe planum ADEF, & eius oppositum, planis ductis per rectas K M, L N. Item planum ABCD, & eius oppositum, planis per rectas GI, HK, ductis, &c. Quoniã igitur plana secantia recta sunt ad directa plana cubi, qđ parallela sint basibus cubi, quæ rectæ sunt ad plana ADEF, ABCD, [b] Erũt & cõmunes eorũ sectiones ad eadẽ cubi plana rectæ. Quare cũ YP, recta sit ad planũ ADEF, ipsa producta versus Z, erit cõis sectio [b] *19. unde.*

planorum per rectas KM, LN, ductorum. Eodem pacto si ex O, ad planum A B C D, erigatur perpendicularis OZ; erit ipsa, communis sectio planorũ, quę per rectas
[a] 39. vnde. GI, HK, ducuntur. [a] Quia vero dictæ communes sectiones & diametri cubi se mutuo bifariam secant; secent se mutuo bifariam in Z: Secant autem sese diametri cubi bifariam in centro sphęræ cubum complectentis, ex coroll. 1. propos. 15. huius lib Punctum igitur Z, centrum erit sphæræ circa cubum descriptæ; Ac proinde omnes rectæ ex Z, ad omnes angulos cubi ductæ inter se æquales erunt: Quibus ômnibus æquales quoq; esse oês rectas ex Z, ad omnes angulos Dodecaedri ductas, sic fiet perspicuũ, ducta recta ZX. [b] Quoniã parallelæ sunt KP, OZ,
[b] 6. vnde. quod vtraq; recta sit ad planũ ABCD; Itẽ parallelæ sunt KO, ZP, quod vtraq; recta sit ad planũ ADEF; erit PK-
[c] 34. primi OZ, (debent. n. duo puncta Z, intelligi esse cõiuncta) parallelogrãmum; [c] ac ppea PZ, æqualis erit ipsi KO, hoc est, ipsi NP, dimidio lateri cubi: Est autẽ & PY, ipsi PR,
[d] 4. tertij dec. æqualis. Tota ergo ZY, toti NR, æqualis erit. [d] Quare cum quadrata rectarum NR, PR, simul tripla sint quadrati rectæ NP, quod NR, in P, secta sit extrema & media ratione; erũt quoq; quadrata rectarum ZY, PY, hoc
[e] 47. primi est, quadrata rectarum ZY, YX, simul tripla quadrati rectæ PZ: (Est n. YX, æqualis ipsi PS, hoc est, ipsi PY:) [e] Est autẽ quadratis rectarum ZY, YX, æquale quadratum rectæ ZX. Igitur & quadratũ rectæ ZX, triplum erit quadrati rectæ ZP, hoc est, quadrati dimidij lateris cubi. At quia eiusdem quadrati dimidij lateris cubi triplum est quoq; quadratũ semidiametri sphæræ cubũ comprehen-
[f] 15. primi dẽtis. ([f] Nã vt diameter ad latus cubi, ita est semidiame-
[g] 22. sexti. ter ad dimidiũ lateris; [g] Ac proinde vt quadratũ diametri ad quadratũ lateris, ita quadratum semidiametri ad
[h] 15. tertij dec. quadratũ dimidij lateris. [h] Cũ ergo quadratũ diametri triplũ sit quadrati lateris, erit quoq; quadratũ semidiametri triplũ quadrati dimidij lateris.) Aequale igit est quadratũ rectæ ZX, quadrato semidiametri sphrę, seu cubi; Ac ppea ZX, æqualis semidiametro. Eadẽ rõne erit ducta recta ZV, semidiametro æqualis. Vel certe qa cũ latera ZY, YX, triãguli ZYX, æqualia sint lateribus ZY, YV,

YV, trianguli ZYV, & anguli cõtenti recti. (cũ enim PY, sit perpendicularis ad LN, erit quoque eadem ad sibi parallelã VX, perpẽdicularis.) [a] Erunt bases ZX, ZV, æquales: Sunt aũt & ZA, ZD, ad angulos cubi, semidiametro sphæræ æquales, vt dictũ est. Sunt ergo iã quatuor rectæ ductæ ex Z, centro sphærę ad quatuor angulos pentagoni A, D, V, X, æquales semidiametro sphæræ. Vt autem ostendatur & recta ducta Z T, ad quintum angulum T, semidiametro æqualis, describatur circa pentagonum, cum sit æquilaterum & æquiangulum, circulus ATDVX, & in planum ipsius ex Z, centro sphæræ perpendicularis demittatur Z ω, connectanturque rectæ ω A, ω T, ω D, ωV, ωX. [b] Quoniam igitur quadratũ rectę ZA, æquale est quadratis rectarum Zω, ωA; & quadratum rectæ ZX, quadratis rectarum Zω, ωX: Sunt autem quadrata rectarum ZA, ZX, æqualia, quod rectę ZA, ZX, ostensæ sint æquales; Igitur & quadrata rectarũ Zω, ωA, quadratis rectarũ Zω, ωX, æqualia; Ac proinde dempto communi quadrato rectę Zω, æqualia relinquentur quadrata rectarũ ωA, ωX, ideoq; rectę ipsę ωA, ωX, æquales erunt. Non aliter ostendentur rectę ωV, ω D, & inter se, & ipsis ω A, ωX, æquales, quod & rectę ZV, Z D, æquales sint ostensę rectis ZA, ZX. Quare cum ex ω, cadant in circumferentiam plures rectę lineę æquales, quam duę, [c] punctum ω, centrum erit circuli; Ac proinde ω T, reliquis ex centro ductis æqualis; ideoque quadrata rectarũ Zω, ωA, æqualia erunt quadratis rectarum Zω, ωT. [d] Cũ ergo illis duobus æquale sit quadratum rectæ Z A; his vero quadratũ rectæ ZT; Erũt æqualia quadrata rectarũ ZA, ZT; ppeaq; & rectæ ZA, ZT, æquales. Quare sphæra complectens cubum ex centro Z, descripta comprehendet pentagonum quoque ATDVX; Eodemque modo & reliqua pentagona Dodecaedri; Ac propterea eadem sphæra comprehendetur Dodecaedrum, qua cubus.

[a] 4. primi.

[b] 47. primi

[c] 9. tertij

[d] 47. primi

POSTREMO cum sit vt NP, ad PS, ita PS, ad SN: erit

[a] 15. quin. erit quoque vt NL, dupla ipsius NP, ad RS, duplam ipsius PS, ita RS, dupla ipsius PS, ad rectam compositam ex SN, RL, nimirum ad duplam ipsius SN. Si igitur cubi latus NL, secetur extrema ac media ratione, maius segmentum erit SR: Sed NL, tota ita secta, Rationalis est. (Nam eius quadratum commensurabile est quadrato diametri sphæræ, quæ Rationalis ponitur; cum sit illud tertia pars huius.) [b] Igitur maius segmentum SR, hoc est, dodecaedri latus XV, illi æquale, Irrationalis est linea, quæ uocatur Apotome. Dodecaedrum ergo constituimus, & sphæra complexi sumus, qua & prædictas figuras; & demonstrauimus, quòd Dodecaedri latus Irrationalis est linea, quæ uocatur Apotome. Quod erat faciendum.

[b] 6. tertij d.

COROLLARIVM. I.

CVM ergo demonstratum sit; recta LN, extrema ac media ratione secta, maius segmentum esse rectam RS: Sit autem LN, æqualis lateri cubi, & RS, lateri Dodecaedri; Perspicuum est, si latus cubi secetur extrema ac media ratione, maius segmentum esse latus Dodecaedri in eadẽ sphæra descripti.

COROLLARIVM II.

SIC quoque latus cubi æquale est lineæ rectæ subtendenti angulum pẽtagoni Dodecaedri eadem sphæra comprehensi. Nam AD, latus cubi subtendit angulum T, pentagoni, estque ostensum æquale rectis AV, DX, subtendentibus angulos X, & V, eiusdem pentagoni.

QVONIAM vero recta subtendens dictum angulum pentagoni secta extrema ac media ratione, [c] facit maius segmentum latus pentagoni; [d] ac propterea recta composita ex dicta recta subtendente angulum pentagoni, hoc est, ex latere cubi, & ex maiori segmento, id est, ex latere Dodecaedri, similiter diuiditur, facitque minus segmentum latus Dodecaedri, & maius segmentum latus cubi: Efficitur, si recta linea secetur extrema ac media ratione, cuius minus segmentum sit latus Dodecaedri, maius segmentum esse latus cubi eiusdem sphæræ.

[c] 8. tertij decimi.

[d] 5. tertij de.

COROLLARIVM III.

CONSTAT etiam ex dictis, in Dodecaedro esse sex latera, quorum bina opposita sunt parallela, bifariamque secantur, & ad angulos rectos a tribus lineis rectis æqualibus sese in centro Dodecaedri bifariam quoque, & ad angulos rectos secantibus. Nam duo ex dictis lateribus sunt VX, T2, quæ videlicet parallela sunt lateribus cubi EF, AB; aliaque quatuor reperiuntur super reliquas quatuor bases cubi, quorum, quæ super bases cubi oppositas existunt, parallela sunt, cum parallela sint cubi lateribus parallelis & oppositis, secanturque, ex demonstratis, bifariã & ad rectos angulos, a lineis rectis, quæ centra basiũ cubi oppositarum coniungunt; quales sunt rectæ YZ, 9Z, &c. quæ vt demonstratum est, se mutuo intersecant in centro Z. Dico se mutuo secare bifariam & ad angulos rectos: bifariam quidem, quoniam cum rectæ PZ, OZ, æquales sint dimidio lateri cubi; et YP, 9O, æquales maioribus segmentis æqualibus PS, OQ; Erunt totæ YZ, 9Z, æquales; Eademq; ratione reliquæ lineæ ex Z, ad sectiones oppositorum laterum ductæ æquales erunt. Quare totæ tres lineæ æquales sunt, seque bifariam in centro Z, mutuo secant: Ad angulos rectos vero, quia in parallelogrammo KOZP, angulus OZP, rectus est, cum opponatur recto OKP. Non aliter ostendentur reliquæ lineæ rectæ centra basium coniungentes efficere angulos rectos.

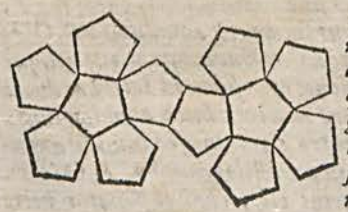
ctos. Omnes enim parallelæ sunt lateribus cubi parallelis rectos angulos constituentibus, vt perspicuum est.

COROLLARIVM IIII.

DENIQVE constat, si recta diuidens opposita latera Dodecaedri bifariam, & ad angulos rectos, vt dictum est, secetur extrema ac media ratione, maius segmentum esse latus cubi, minus vero, latus Dodecaedri eadem sphæra comprehensi. Cum enim quadrata rectarum ZY, YP, tripla ostensa sint quadrati rectæ PZ; erit ZY, secta in P, extrema ac media ratione, maiusque segmẽtum erit PZ, ex scholio propos. 4. huius lib. Ac proinde erit vt ZY, ad ZP, ita ZP, ad PY; [a] ideoque vt dupla ipsius ZY, nempe recta diuidens latera opposita Dodecaedri bifariam, ad duplam ipsius ZP, nimirum ad latus cubi, ita eadem dupla ipsius ZP, ad duplam ipsius PY, hoc est, ad latus Dodecaedri. Quare recta diuidens latera opposita Dodecaedri bifariam, secta extrema ac media ratione, facit maius segmentum, latus cubi, minus vero, latus Dodecaedri eiusdem sphæræ.

[a] 15. quin.

SCHOLIVM.



QVOD si ex aliqua materia conficiantur duodecim pẽtagona æquilatera, & æquiangula, inter se æqualia, disponaturque, vt hæc figura indicat, componetur Dodecaedrũ sphæræ secundum totam soliditatem, si rite inter se complicentur.

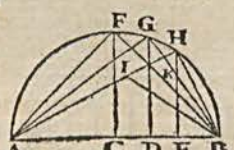
LATE-

PROBL. 6. PROPOS. 18.

18.

LATERA quinque figurarum exponere, & inter se comparare.

SIT sphæræ diameter AB, quæ in C, secetur bifariam; In D, vero ita, vt BD, sit ipsius pars tertia; In E, denique ita, vt BE sit quinta pars eiusdem. Descripto dein de circa AB, semicirculo, ducantur ad eius circumferentiam ex C, D, E, ipsi AB, perpendiculares CF, DG, EH; connectanturque rectæ AF, BF, AG, BG, AH, BH. Post hæc ex HA, abscindatur HI, æqualis lateri Decagoni in eo circulo descripti, cuius semidiameter, seu latus Hexagoni est BH: connectaturque recta BI. Postremo BG, secetur extrema ac media ratione in K, sitque maius segmentum BK.



QVOD igitur attinet ad expositionem laterum prædictarum figurarum, dico AG, esse latus Pyramidis, seu Tetraedri; AF, latus Octaedri; BG, latus cubi; BI, latus Icosaedri; BK, denique; latus Dodecaedri. Quoniã. n. AG, media proportionalis est inter BA, AD, ex coroll. propos. 8. lib. 6. Erit ex coroll. propos. 20. eiusdem lib. vt BA, ad AD, ita quadratum rectæ BA, ad quadratum rectæ AG: Est autem BA, ipsius AD, sesquialtera; cum talium partium 2. sit AD, qualium 3. est BA. Igitur & quadratum rectæ BA, sesquialterum est quadrati rectæ AG; Ac proinde cum diameter sphæræ sit potentia sesquialtera lateris Tetraedri; erit AG, latus Tetraedri.

[a] 13. tertij dec.

RVRSVS quoniam AF, est media proportionalis inter BA, AC, ex eodem coroll. propos. 8. lib. 6. Ac proinde vt BA, ad AC, ita quadratum rectæ BA, ad quadratũ rectæ AF, ex adducto coroll. propos. 20. lib. 6. Est autem BA, ipsius AC, dupla: Erit quadratum rectæ BA, duplum quadrati rectæ AF. [b] Quare cum diameter sphæræ potentia sit dupla lateris Octaedri; erit AF, latus Octaedri. Eodem modo erit BF, latus Octaedri.

[b] 14. tertij dec.

DEIN-

DEINDE cum BG, sit media proportionalis inter AB, BD, ideoque vt A B, ad B D, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BG, ex præfatis duobus corollariis lib. 6. Sit autem AB, ipsius BD, tripla, ex constructione: Erit quadratum rectæ A B, triplum quadrati rectæ B G. [a] Quocirca cum sphæræ diameter potentia sit tripla lateris cubi; Erit BG, latus cubi.

[a] 15. tertij dec.

PRAETEREA quia, ex eisdem corollariis, B H, est media proportionalis inter A B, B E, atque idcirco vt AB, ad BE, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BH: Est autem, ex cõstructione AB, ipsius BE, quintupla: Erit quadratum rectę A B, quintuplum quadrati rectæ B H. Cum igitur diameter sphæræ potentia sit quintupla semidiametri circuli quinque latera Icosaedri ambientis, ex coroll. 1. propos. 16. huius lib. Erit B H, semidiameter, hoc est, latus hexagoni dicti circuli: Est autem H I, latus decagoni eiusdem circuli, ex constructione. [b] Igitur latus pentagoni poterit & BH, & HI, simul; Ac proinde [c] cum quadratum rectæ B I, æquale sit quadratis rectarũ B H, HI; erit BI, latus pentagoni circuli eiusdem. [d] Quam ob rem B I, latus est Icosaedri.

[b] 10. tertij dec.
[c] 47. primi
[d] 16. tertij dec.

DENIQVE, cum BG, latus cubi sectum sit in K, extrema & media ratione, erit BK, maius segmentum, latus Dedecaedri in eadem sphæra descripti, ex coroll. 1. propos. 17. huius lib. Exposita ergo sunt latera quinque figurarum regularium in eadem sphæra descriptarum.

QVOD uero ad comparationem laterum iam inuentorum spectat; cum demonstratum sit, diametrum sphæræ esse potentia sesquialteram lateris pyramidis; potentia vero duplam lateris Octaedri, & potentia triplam lateris cubi; perspicuum est, qualiũ partium 6. fuerit quadratum diametri, talium 4: esse quadratum lateris Tetraedri; talium 3. quadratũ lateris Octaedri, & denique quadratum lateris cubi, talium 2. Ac propterea latus pyramidis, seu Tetraedri, esse potentia sesquitertiũ lateris Octaedri, potẽtia uero duplũ latęris cubi. Item latus Octaedri potentia esse sesquialterũ lateris cubi. Quapropter quadrata ex lateribus harum trium figurarum, Tetraedri nimirum, Octaedri, & cubi, nec non ex sphæræ diametro descripta, proportionẽ inter se habent, quam numerus ad numerum, [a] Ac propterea diameter sphæræ, & latera dictarum figurarum lineę sunt commensurabiles; atque adeo cum diameter sphæræ ponatur esse Rationalis, erunt quoque prædicta latera Rationalia. Quia uero dicta quadrata non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, vt constat ex coroll. propos. 24. lib 8. [b] Erũt huiusmodi lineæ, nimirũ diameter sphæræ, latus Tetraedri, latus Octaedri, & latus cubi, lõgitudine incommensurabiles, ac proinde Rationales potentia tantum commensurabiles.

[a] 6. decimi
[b] 9. deci.

AT vero latera Icosaedri, & Dodecaedri, quoniam sunt lineæ Irrationales, illud quidem, Minor; hoc verò Apotome, vt demonstratum est, nullo modo, hoc est, nec longitudine, nec potentia commensurabilia sunt lateribus prædictis. Si enim commensurabilia essent latera harum posteriorum figurarum lateribus priorum, cum latera priorum sint diametro sphæræ commensurabilia; essent quoque latera posteriorum eidem diametro commensurabilia; Ac proinde, existente diametro Rationali, forent quoque ipsa latera Rationalia. Quod est absurdum. ostensum enim est, ipsa esse Irrationalia.

SED neque inter se ullo pacto cõmensurabilia sũt dicta latera Icosaedri, & Dodecaedri. Si namque credãtur esse commensurabilia longitudine inter se, cum latus Dodecaedri sit Apotome, [c] erit quoque latus Icosaedri, Apotome. Item cum latus Icosaedri sit linea Minor, [d] erit & latus Dodecaedri linea Minor. Quod si dicantur commensurabilia esse potentia tantum, sequetur eodem modo, latus Dodecaedri esse lineam Minorem, ex eo, [e] quod latus Icosaedri Minor est. Quod est absurdum. Nam ex scholio propos. 112. lib. 10. Apotome, & Minor

[c] 104. deci.
[d] 106. dec.
[e] 16. tertij dec.

& Minor sunt lineæ *I*rrationales prorsus inter se differentes, ita vt neutra sit eadem alteri.

ITAQVE quamuis ex lateribus expositis quinque figurarum regularium, tria quidem priora sint commensurabilia & inter se,& diametro sphęræ,ideoque Rationalia existant, duo vero posteriora incommensurabilia & inter se, & diametro,reliquisque lateribus; ac proinde Irrationalia sint: Cernitur tamen inter omnia latera prædicta hic ordo, vt latus Tetraedri maius sit latere Octaedri; Octaedri latus maius latere cubi; Latus cubi maius latere Icosaedri; Latus denique Icosaedri maius latere *D*odecaedri; Hoc est, eo ordine se mutuo excedunt dicta latera, quo præfatas figuras construximus. Quæ forte causa fuit, cur Euclides non eodem ordine huiusmodi figuras fuerit fabricatus, quo eas definiuit.

NAM latus Tetraedri maius esse latere Octaedri, perspicuum est. Cum enim *A*G,latus Tetraedri subtendat maiorem arcum,quã AF,latus Octaedri; maior erit recta AG,quam AF,ex scholio propos.28. lib.3.

EODEM modo ostendemus latus Octaedri maius esse latere cubi.Nam BF, latus Octaedri maiorem arcum subtendit,quam *B*G,cubi latus.

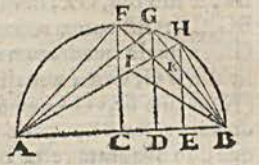
LATVS autem cubi BG, maius esse latere Icosaedri BI, hac arte demonstrabimus. Quoniam AB, tripla ponitur ipsius BD; [a] & quadrata habent proportionem laterum duplicatam; erit quadratum rectę *AB*, noncuplum quadrati rectę *BD*, cũ noncupla proportio sit duplicata proportionis triplæ, vt hic apparet 1. 3. 9. Ac propterea qualium partium 9. ponetur quadratum rectæ AB, talium 1.erit quadratum rectæ BD. Qualium autem partium 9.est quadratum rectæ *A*B, talium 3. est quadratum rectæ BG; [b] quod illud huius triplum sit; Ac proinde talium quoque 3. sunt quadrata rectarum GD, BD,cum æqualia sint quadrato rectæ BG. *I*gitur si auferatur quadratum rectæ B*D*,talium partium 1.relinquetur talium partium 2. quadratum rectæ G D. Quoniam vero quadratum rectæ A*B*, quintuplum est quadrati rectæ BH, erit quadratum rectæ B H, minus quam talium partium 2. [c] Nam cum 9.ad 2.minorem habeant proportionem quintupla,quod 10. ad 2.quintuplam proportionem habeant; [a] erit numerus, ad quem 9.habent proportionem quintuplam, minor quam 2. Quare quadratum rectę GD,maius est quadrato rectæ BH, ideoq; recta GP,maior quã recta BH.Rursus quia diameter sphęrę *A*B cõponitur ex BH,semidiametro circuli, ex quo Icosaedrũ cõstituitur, & ex linea dupla lateris decagoni HI eiusdẽ circuli,per coroll.2.propos.16.huius lib.cõstat latus decagoni H I, minus esse tertia parte rectæ AB, hoc est, minus recta BD. Nam si HI, recta æqualis credatur tertiæ parti rectæ A B; erit dupla illius, æqualis duabus tertijs partibus,nẽpe ipsi AD; *A*c propterea BH,reliquæ tertiæ parti erit æqualis,nimirum ipsi B D; Atque adeo, cum quadratum rectę A B, noncuplum sit ostensum quadrati rectę B D, erit idem quadratum rectæ AB,noncuplum quadrati rectæ BH.Quod est absurdum.quintuplum enim est demõstratum. Non ergo HI, tertia pars est ipsius A B: Sed neque maior tertia parte. Si enim recta H I, dicatur maior tertia parte rectę A B, & proinde dupla ipsius HI, maior quam duę tertiæ, hoc est,quam AD,erit BH, minor quã tertia pars BD.Quare quadratũ rectę *A*B,maius erit,quam nõcuplum quadrati rectæ BD.Quod magis est absurdum. Non igitur maior est *HI*, tertia parte ipsius AB:Sed neque æqualis tertię parti,vt ostendimus.*M*inor ergo est quã tertia pars, hoc est,quam *B*D. Itaque cum rectę G*D*, *D*B, maiores sint rectis BH, HI, vt demonstratum est, erunt quoque quadrata illarum quadratis harum maiora: [b] Est autem quadratum rectæ B G, æquale quadratis rectarum G D, DB;& quadratum rectę BI, quadratis rectarũ *B* H, HI. Quadratum ergo rectæ BG,maius quoque erit quadrato rectæ BI;Ac proinde recta BG,nempe latus cubi, maior erit quam recta BI,latus scilicet *I*cosaedri.

MAIVS denique esse latus Icosaedri BI,latere Dodecaedri B*K*, hac ratione patebit. Cum rectæ BG, diuisæ

[a] 20. sexti.

[b] 15. tertij decimi.

[a] 10. quin.



[b] 47. primi.

extrema ac media ratione, maius segmentum sit BK, & minus GK; erit rectangulum sub BG, BK, maius rectangulo sub BG, GK; atque adeo rectangula sub BG, BK, & sub BG, GK, simul maiora duplo rectanguli sub BG, GK:[a] Est autem rectangulis sub BG, BK, & sub BG, GK, æquale quadratum rectæ BG; Et duobus rectangulis sub BG, GK, æqualia sunt duo quadrata rectæ BK. (Nam cum sit, vt BG, ad BK, ita BK, ad GK;[b] erit quadratum rectæ BK, æquale rectangulo sub BG, GK, ideoque duo quadrata rectæ BK, æqualia duobus rectangulis sub BG, GK.) Maius igitur quoque est quadratum rectæ BG, duobus quadratis rectæ BK; Atque idcirco maiora erunt tria quadrata rectæ BG, sex quadratis rectæ BK: Atqui tribus quadratis rectæ BG, æqualia sunt quinque quadrata rectæ BH, (Cum enim quadratum rectæ AB, triplum sit quadrati rectæ BG. & quintuplum quadrati rectæ BH; erunt tam tria quadrata rectæ BG, quam quinque quadrata rectæ BH, æqualia eidem quadrato rectæ AB, ideoque tria illa his quinque æqualia.) Igitur & quinq; quadrata rectæ BH, maiora erunt sex quadratis rectæ BK; Ac proinde vnũ quadratum rectæ BH, maius erit vno quadrato rectæ BK. (Si namque æquale esset quadratum rectæ BH, quadrato rectæ BK, vel minus; forent quinque quadrata rectæ BH, minora sex quadratis rectæ BK. quod est absurdum, cum illa quinque hisce sex maiora sint demonstrata.) Quam ob rem & recta BH, maior erit quam recta BK; Ac propterea cum BI, maior sit quam BH, multo maior erit BI, latus uidelicet Icosaedri, quam BK; latus Dodecaedri. Latera igitur quinq; figurarũ exposuimus, & inter se comparauimus. Quod erat faciendum.

[a] 2. secundi

[b] 17 sexti.

SCHOLIVM.

INTERPRETES hoc loco demonstrant, præter dictas quinque figuras, non posse aliam constitui figuram solidam, quæ planis & æquilateris & æquiangulis contineatur, inter se æqualibus, hac fere ratione.

EX duobus triangulis, vel ex duabus figuris alijs, solidus angulus constitui non potest, cum saltem tres anguli plani requirantur ad solidi anguli constitutionem.

EX tribus autem triangulis æquilateris, constat pyramidis angulus.

EX quatuor, Octaedri angulus;

EX quinque, angulus Icosaedri;

EX sex autem huiusmodi triangulis ad idem punctũ coeuntibus fieri non potest angulus solidus. Cum enim trianguli æquilateri angulus contineat duas tertias partes vnius recti, ex coroll. 3. propos. 32. lib. 1. Erunt eiusmodi anguli sex, duodecim tertiæ partes vnius recti, hoc est, quatuor rectis æquales. Quare ex ipsis nullus angulus solidus constituetur.[a] *Nam solidus omnis angulus, minoribus quam quatuor rectis angulis continetur. Multo ergo minus ex pluribus, quam sex planis eiusmodi angulis, solidus angulus constabit.*

[a] 20. unde.

EX tribus deinde quadratis, cubi angulus cõficitur. Ex quatuor autem quadratis nullus angulus solidus constitui potest. Rursus enim recti quatuor erũt. Multo ergo minus ex pluribus, quã quatuor eiusmodi angulis, solidus angulus cõstabit.

EX tribus denique pentagonis æquilateris, & æquiangulis, Dodecaedri angulus componitur. Cũ enim quinque anguli pentagoni æquales sint sex rectis, vt ostendimus ad propos. 32. lib. 1. Ac proinde vnus angulus contineat vnũ rectũ, ac præterea quintam partem vnius recti; continebunt tres eiusmodi anguli tres rectos, & insuper tres quintas partes vnius recti. Quare minores erũt quatuor rectis. ideoq; ex ipsis angulus solidus cõstituetur. Sed ex quatuor huiusmodi angulis, nullus solidus angulus cõfici potest. Cum enim vnus, vt dictum est, maior sit recto, eo quod continet vnũ rectum, & insuper recti quintam partem; erunt quatuor maiores quatuor rectis. Quare nullus angulus solidus ex ipsis constituetur; Ac propterea multo minus ex pluribus, quã quatuor eiusmodi anguli, solidus angulus constabit. Nec sane ex alijs figuris æquilateris, & æquiangulis cõstitui poterit angulus solidus. Nam cũ sex anguli hexagoni æquales sint octo rectis, vt ad propos. 32. lib. 1. est demonstratum; Ac proinde vnus angulus contineat unum rectũ, ac præterea duas partes sextas vnius recti; continebunt tres anguli eiusmodi tres rectos, & sex sextas partes recti, hoc est, quatuor rectos. Quare ex ipsis nullo modo cõponetur angulus solidus; Atque idcirco multo minus ex pluribus

bus eiusmodi angulis, quam tribus, angulus solidus conficietur; neque propterea ex alijs polygonis. Quilibet enim tres maiores sunt quatuor rectis. Quam ob rem perspicuum est, prater dictas quinque figuras, aliam figuram solidam non posse constitui, quæ planis æquilateris, & æquiangulis inter se æqualibus contineatur.

NAM si tria triangula æquilatera & æqualia coeant in vnum punctum ad constitutionem anguli solidi, constituetur Pyramidis contenta quatuor huiusmodi triangulis.

SI vero quatuor eiusmodi triangula conueniant ad angulum solidum componendum, efficietur Octaedrum octo triangulis eiusmodi comprehensum.

SI denique assumantur quinque talia triaangula ad efformandum angulum solidum, conficietur Icosaedrũ viginti triangulis eiusmodi contentum.

QVOD si tria quadrata æqualia coeant in vnum punctum, vt constituant angulum solidum, fabricabitur cubus ex sex huiusmodi quadratis.

POSTREMO, si tria pentagona æquilatera, & æquiangula, inter se æqualia, conueniant ad constitutionem anguli solidi, componetur Dodecaedrum duodecim eiusmodi pentagona continens.

HOC etiam loco apponere libet modum quendam ex Hypsicle Alexandrino, quo expedite numerus laterum, & angulorum cuiuslibet figuræ regularis habeatur.

SI enim quis interrogauerit, quotnam latera quoduis Regularium Solidorum habeat; Multiplicandæ sunt omnes bases in unius basis latera, vt habeantur omnium basium latera: Quia vero bina semper latera basium in vnum conueniunt, ad constitutionem vnius lateris Regularis solidi, sumendum est dimidium omnium laterum, vt numerus laterum Regularis solidi appareat.

EXEMPLVM. Si quatuor triangula Pyramidis, siue Tetraedri, multiplicentur in numerum laterum vnius trianguli, vt in 3. fiunt 12. quorum dimidium est 6. numerus scilicet laterum Pyramidis. Ad eundem modum & in reliquis. Si enim sex quadrata cubum componentia multiplicentur in vnius quadrati latera, nempe in 4 fiunt 24. quorum dimidiũ est 12. numerus videlicet laterum cubi. Si autem octo trianguli Octaedri multiplicentur in 3. numerum laterum vnius trianguli, fiunt 24. quorum dimidium est rursus 12. numerus laterum Octaedri. Si rursus 20. triangula Icosaedri multiplicentur in 3. numerum laterum vnius trianguli, fiũt 60. quorum dimidium est 30. numerus laterum Icosaedri. Si denique 12. pentagona Dodecaedrum constituentia multiplicentur in 5. numerum laterum vnius pentagoni, fiunt 60. quorum dimidium est rursus 30. numerus laterum Dodecaedri.

QVOD si quis rursus interrogauerit, quotnam angulos solidos quoduis Regularium Solidorum habeat; Multiplicandæ sunt omnes bases in vnius basis angulos, vt habeantur omnium basium anguli: Quia vero tres, quatuor, vel quinque semper anguli basium in vnum conueniũt, ad constitutionem vnius anguli solidi, diuidendi sunt omnes anguli in numerum vnius anguli solidi, diuidendi sunt omnes anguli in numerum angulorũ, qui simul coeunt ad angulũ solidum constituendũ, vt numerus angulorum solidorum Regularis solidi appareat.

EXEMPLVM. Si quatuor triangula Pyramidis multiplicentur in 3. numerum angulorum vnius trianguli, fiunt 12. anguli, qui si diuidantur in 3. (Tot enim anguli constituunt vnum solidum angulum Pyramidis) faciunt 4. angulos solidos Pyramidis. Si vero 6. quadrata cubi multiplicentur in 4. numerum angulorum vnius quadrati, fiunt 24. anguli, qui diuisi in 3 (Tot enim anguli conficiunt vnum angulum solidum cubi) faciunt 8. angulos solidos cubi. Si quoque octo triangula Octaedri multiplicentur in 3. numerum angulorũ vnius trianguli, fiunt 24. anguli, qui diuisi in 4. (Tot enim anguli componunt solidũ angulum Octaedri.) conficiũt 6. angulos solidos Octaedri. Si rursus 20. triangula Icosaedri multiplicẽtur in 3. numerũ angulorũ vnius trianguli, fiũt 60. anguli, qui diuisi in 5. (Tot enim anguli constituũt angulum solidum Icosaedri) producunt 12. angulos solidos Icosaedri. Si deniq; 12. pentagona Dodecaedri multiplicentur in 5. numerum angulorum vnius pentagoni, fiunt 60. anguli, qui diuisi in 3. (Tot. n. anguli conueniunt ad constituendum angulũ solidũ Dodecaedri.) efficiunt 20. angulos solidos Dodecaedri.

DENIQVE consideratione etiam diguum est, cubum & octaedrum reciproca esse, quod ad bases attinet, & ad angulos solidos. Nam quot bases in vno continentur, tot anguli solidi in altero reperiuntur, & contra. Vt cubus habet sex bases,

& octo angulos solidos, octaedrum vero octo continet bases, & sex angulos solidos. Sic etiam reciproca sunt Icosaedrum, & Dodecaedrum. Nam Icosaedrum habet viginti bases, & duodecim solidos angulos, at Dodecaedrum duodecim bases possidet, & viginti angulos solidos. Solum Tetraedrum, (hoc est Pyramis) cum nullo reciprocatur, nisi cum seipso. Habet enim quatuor bases totidēq; solidos angulos.

FINIS ELEMENTI DECIMITERTII.

EVCLI-

EVCLIDIS

ELEMENTVM QVARTVMDECIMVM.

Et Solidorum quartum,

Vt quidam arbitrantur: vt alij vero, Hypsiclis Alexandrini de quinque corporibus.

LIBER PRIMVS.

PROOEMIVM HYPSICLIS ALEXANDRINI ad Protarchum.

BASILIDES Tyrius, Protarche, Alexandriam profectus, patrique nostro ob disciplinę societatem commendatus, longissimo peregrinationis tempore cum eo versatus est. Cumque dissererent aliquando de scripta ab Apollonio comparatione Dodecaedri & Icosaedri eidem sphæræ inscriptorū, quam hæc inter se habeant rationem, censuerunt ea non recte tradidisse Apollonium; quæ a se emendata, vt pater meus dicebat, literis prodiderūt. Ego autē postea incidi

in alterum librum ab Apollonio editum, qui demonstrationem accurate complectebatur de re proposita, ex eiusque problematis indagatione magnam equidē cœpi voluptatem. Illud certe ab omnibus perspici potest, quod scripsit Apollonius, cum sit in omnium manibus. Quod autem diligenti, quantum conijcere licet, studio nos postea scripsisse videmur, id monimentis cōsignatum tibi dedicandum duximus; vt qui feliciter cum in omnibus disciplinis, tum vel maxime in Geometria versatus, scite ac prudenter iudices ea, quæ dicturi sumus: Ob eam vero, quæ tibi cum patre fuit, vitæ consuetudinem, quaque nos complecteris beneuolentiam, tractationem ipsam libenter audias. Sed iam tempus est, vt prooemio finem imponentes id, quod propositum est, aggrediamur.

TREDECIM libri hactenus expositi ab omnibus Euclidi ascribuntur: Duo vero subsequentes a plerisque Hypsicli Alexandrino & recte, meo iudicio, tribui solent; in quorū quidem priori inter se comparantur Icosaedrū, & Dodecaedrū, tam secundum superfictes, quam soliditates: In posteriori vero exponuntur descriptiones aliquot figurarū regularium vnius intra aliam; vt hi duo libri sint instar appendicis cuiusdam elementorum Euclidis. Verum quia plurima omittuntur ab Hypsicle scitu non iniucunda, quæ spectant ad comparationes dictorum quinque corporum regularium, eorumque mutuas inscriptiones unius in alio; quatuor enim propositionibus duntaxat liber hic quartusdecimus, quinque vero problematibus decimusquintus absoluitur: Visum est, vt aliquam lucem huic tractationi afferremus, paulo vberius de dictis figuris regularibus in vniuersum disserere, proponendo varia theoremata, atq; problemata, quibus & prædicta corpora regularia inter se comparantur, & sibi mutuo inscribūtur. Qua in re maximo nobis adiumento fuisse Campanū, & Franciscum Flussatem Candallam, qui diligentem operā, & sedulam in hoc negotio collocauit, non negamus. Hic enim nō solum insequentes duos libros quamplurimis theorematibus, problematibusque locupletauit; verumetiam integrum librū, qui ordine decimus sextus est, adiūxit, in quo proprietates illustres de dictis corporibus proponit. Cæterum præcipuum fuisse Hypsiclis institutum, in hoc lib. 14. disputare de comparatione mutua Icosaedri & dodecaedri, facile intelligi potest ex eius prooemio ad Protarchum, quod superius est positum.

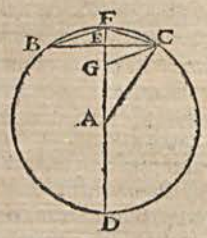
QVONIAM vero in hisce duobus libris Hypsicles, & Campanus tam in numero propositionum, quam in earundem ordine, & inter se, & a Francisco Flussate, ideoque a nobis discrepant; annotauimus in margine ordinem vtriusque duobus numeris, quorum superior ordinem Hypsiclis, inferior vero Campani seriem indicat. Quando autem in margine vnicus tantum numerus reperitur, nullam esse tunc differentiam inter Campanum & Hypsiclem, significatur; Quod si aliquando loco superioris numeri apponatur hæc nota O, intelligendum est, in Hypsicle dictam propositionem desiderari. Idemque in Campano intellige, si forte loco numeri inferioris eadem nota posita fuerit. Quando denique nihil in margine deprehenditur, indicio est, tam apud Hypsiclem, quam apud Campanum, illam propositionem deesse.

THEOR. 1. PROPOS. 1. 1.

QVAE ex centro circuli cuiuspiam in pentagoni eidem circulo inscripti latus perpendicularis ducitur, dimidia est vtriusque lineæ simul, & lateris hexagoni, & lateris decagoni eidem circulo inscripti.

EX centro A, circuli BCD, ducatur AE, perpendicularis ad BC, latus pentagoni in dicto circulo descripti. Dico AE, dimidium esse lineæ compositæ ex latere hexagoni & decagoni eiusdem circuli. Extensa enim AE, in vtram-

vtramque partem, vt perficiatur tota diameter DF, sumptaque EG, æquali ipsi EF; connectantur rectæ AC, CG, CF, BF. [a] Quoniam igitur perpendicularis AE, secat rectam BC, bifariam; erunt latera BE, EF, trianguli BEF, æqualia lateribus CE, EF, trianguli CEF; Cum igitur & anguli contenti sint æquales, nempe recti; [b] erunt bases CF, BF, æquales; [c] ideoque & arcus CF, BF, æquales; Ac proinde existente arcu BC, quinta parte totius circumferentiæ, erit CF, eiusdem pars decima; atque adeo recta CF, latus erit decagoni. Rursus quia latera CE, EF, triāguli CEF, æqualia sunt lateribus CE, EG, trianguli CEG, suntque anguli contenti recti; [d] erunt & bases CF, CG, & anguli CFG, CGF, æquales. Quia vero arcus CF, quinta pars est semicircumferētiæ DCF, cum sit totius circumferentiæ decima pars; Erit talium partium 1. arcus CF, qualiū 4. est arcus DC, hoc est, arcus DC, quadruplus erit arcus CF. [e] Quare & angulus DAC, quadruplus erit anguli CAF: [f] Est autem angulus CFD, dimidium anguli DAC, cum illius ad circumferentiam, & huius ad centrum eadem sit basis DC. Igitur angulus CFD, atque adeo illi æqualis ostensus CGF, duplus erit anguli CAF: [g] Atqui angulus CGF, externus, æqualis est internis GAC, GCA, in triangulo GAC. Cum igitur GAC, sit dimidium anguli CGF, vt ostensum est, erit GCA, reliquum dimidium eiusdem anguli CGF, ideoque æquales erunt anguli GAC, GCA; [h] ac proinde & latera AG, CG, æqualia: Est autem CG, recta ostensa æqualis rectæ CF. Igitur & AG, recta æqualis erit eidem CF. Quare additis æqualibus GE, EF, fiet AE, æqualis duabus EF, FC, simul: Ac proinde tres simul AE, EF, FC, hoc est, duæ simul AF, FC, duplæ erunt ipsius AE, atq; idcirco e contrario erit AE, ducta videlicet perpedicularis in pētagoni latus, dimidia duarū simul AF, FC, nēpe lateris hexagoni, & decagoni. Quæ ergo ex centro circuli cuiuspiam in pentagoni



[a] 3. tertij.
[b] 4. primi.
[c] 28. tertij.
[d] 4. primi
[e] 33. sexti
[f] 20. tertij
[g] 32. primi
[h] 6. primi.

goni eidem circulo inscripti latus, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

EX his sequitur, lineam perpendicularem ductā ex centro circuli ad lineam rectam in eodem circulo aptatam, secare arcum, quem dicta hæc linea recta subtendit, bifariam. Demonstratum enim est rectam AE, quæ ex centro perpendicularis est ad BC, diuidere arcum BC, bifariam in F.

COROLLARIVM II.

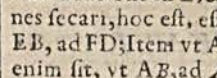
HINC quoque fit, perpendicularē ex centro ad latus pētagoni ductā, æqualē esse utriq; lineæ simul, et ei, quæ ex centro ad latus trianguli æquilateri eidem circulo inscripti ducitur, perpendiculari, & dimidiæ lateris decagoni. Quoniam. n. vt in hac propos. ostensum est, perpendicularis ad latus pentagoni æqualis est dimidio lateris hexagoni, & dimidio lateris decagoni simul; Est autem perpendicularis ad latus trianguli æquilateri, ex coroll. propo. 12. lib. 13. æqualis dimidio semidiametri, seu lateris hexagoni: perspicuum est, eandem perpendicularem ad latus pentagoni esse æqualem perpendiculari ad latus trianguli, & dimidio lateris decagoni simul.

THEOR. 2. PROPOS. 2. 4. 2.

SI binæ rectæ lineæ extrema ac media ratione secentur; ipsæ similiter secabuntur, in easdem scilicet proportiones.

SECEN-

SECENTVR binæ rectæ *AB*, *CD*, extrema ac media ratione in *E*, & *F*. Dico ipsas in easdem proportiones secari, hoc est, esse vt *AB*, ad *CD*, ita *AE*, ad *CF*, & *EB*, ad *FD*; Item vt *AE*, ad *EB*, ita *CF*, ad *FD*, &c. Cum enim sit, vt *AB*, ad *AE*, ita *AE*, ad *EB*; & vt *CD*, ad *CF*, ita *CF*, ad *FD*; [a] erit rectangulũ sub *AB*, *EB*, æquale quadrato rectæ *AE*; & rectangulum sub *CD*, *FD*, æquale quadrato rectæ *CF*. Quamobrem erit vt rectangulum sub *AB*, *EB*, ad quadratum rectæ *AE*, ita rectangulum sub *CD*, *FD*, ad quadratum rectæ *CF*; (est enim vtrobique æqualitatis proportio) Ac propterea, per ea, quæ demonstrauimus in scholio propos. 22. lib. 5. vt quadruplum rectãguli sub *AB*, *EB*, ad quadratum rectæ *AE*, ita quadruplum rectanguli sub *CD*, *FD*, ad quadratum rectę *CF*: & componẽdo, vt quadruplũ rectanguli sub *AB*, *EB*, & quadratum rectę *AE*, ad quadratum rectę *AE*, ita quadruplum rectanguli sub *CD*, *FD*, & quadratum rectę *CF*, ad quadratum rectę *CF*: [b] Sed quod quater continetur sub *AB*, *EB*, vna cum quadrato rectę *AE*, æquale est quadrato lineę compositę ex *AB*, *EB*; Et quod quater continetur sub *CD*, *FD*, vna cum quadrato rectę *CF*, æquale est quadrato lineę compositę ex *CD*, *FD*. Igitur erit quoque, vt quadratum lineæ compositæ ex *AB*, *EB*, ad quadratũ rectæ *AE*, ita quadratum lineæ compositæ ex *CD*, *FD*, ad quadratum rectæ *CF*; [c] Ac proinde, vt recta composita ex *AB*, *EB*, ad rectam *AE*, ita recta composita ex *CD*, *FD*, ad rectam *CF*: Et componendo vt composita recta ex *AB*, *EB*, & recta *AE*, hoc est, dupla ipsius *AB*, ad rectam *AE*, ita recta composita ex *CD*, *FD*, & recta *CF*, id est, dupla ipsius *CD*, ad rectam *CF*; Et permutãdo, vt dupla ipsius *AB*, ad duplam ipsius *CD*, ita *AE*, ad *CF*; [d] Vt autem dupla ipsius *AB*, ad duplã ipsius *CD*, ita est *AB*, ad *CD*. Erit ergo vt *AB*, ad *CD*, ita *AE*, ad *CF*; Ac propterea, cum sit vt tota *AB*, ad totam *CD*, ita *AE*, ablata ad *CF*, ablatam; [e] erit quoque reliqua *EB*, ad reliquam *FD*, vt tota ad totam. Quare vt *AE*, ad *CF*, ita erit *EB*, ad *FD*, cum vtraq; proportio eadem sit proportioni *AE*, ad *CD*: Et permutãdo, erit vt *AE*, ad *EB*, sic *CF*, ad *FD*; & sic denique iuxta omnes modos arguendi ex proportionalitate, ostendemus & totas lineas, & earundem partes esse proportionales inter se. Si binæ itaque rectæ lineæ extrema ac media ratione secentur, &c. Quod erat ostendendum.



[a] 17. sexti

[b] 8. secundi

[c] 22. sexti

[d] 15. quin.

[e] 19 quin.

SCHOLIVM.

FACILE hoc loco demonstrabimus hoc sequens theorema.

LATVS hexagoni ad latus decagoni in eodẽ circulo descriptorum eãdem proportionem habet, quam recta subtendens angulum pentagoni æquilateri & æquianguli ad latus ipsius pentagoni.

QVONIAM. n. [a] *latus hexagoni cum latere decagoni efficit lineam media & extrema ratione sectam; & recta subtendens pentagoni angulum secta extrema ac media ratione facit maius segmentum, latus ipsum pentagoni:* [b] *sit vt eadem sit proportio lateris hexagoni ad latus decagoni, maioris segmenti ad minus, quæ maioris segmenti rectæ angulum pentagoni subtendentis ad minus. Cum ergo sit, vt maius segmẽtum ad minus, ita tota ad maius segmentum; erit quoque latus hexagoni ad latus decagoni, vt recta subtendens angulũ pentagoni æquilateri & æquianguli ad latus pentagoni. quod est propositum.*

EX hac quoque propositione & præcedenti inferemus hoc alterum theorema.

[a] 9. tertiidecimi.

[b] 2. quartidecimi.

SI linea perpendicularis ex centro circuli ad latus pentagoni in eodem circulo descripti ducta secetur extrema ac media ratione, maius segmentum æquale est perpẽdiculari ex eodem centro ad latus trianguli æquilateri ductæ, minus

nus vero æquale est dimidio lateris decagoni eidem circulo inscriptorum.

EX centro enim A, circuli B C, ducta perpendicularis A D, ad latus B C, pentagoni eidem circulo inscripti, secetur in E, extrema ac media ratione. Dico maius segmentum A E, esse æquale perpendiculari ex A, ad latus trianguli æquilateri eiusdem circuli ductæ; minus vero segmentum E D, æquale esse dimidio lateris decagoni eiusdem circuli.

Extensa namque recta A D, ad F, & connexa recta F C; erit F C, lateris decagoni, cum ex coroll. 1. propos. 1. lib. arcus B C, nempe quinta pars totius circumferentiæ, bifariam secetur in F; [a] *Ac proinde recta composita ex A F, latere hexagoni, & F C, latere decagoni, secta erit extrema ac media ratione, cuius maius segmentum A F, latus hexagoni, minus vero segmentum F C, latus decagoni. Quare vt in hac propos. ostensum est, erit vt tota A D, diuisa secundum extremam ac mediam rationem, ad totam compositam ex A F, F C, similiter diuisam, ita A E, maius segmentum ad A F, maius segmentum; & E D, minus segmentum ad F C, minus segmentum:* [b] *Est autem tota A D, dimidium totius compositæ ex A F, F C. Igitur & A E, ipsius A F, semidiametri, & E D, ipsius F C, lateris decagoni dimidium erit. Cum ergo, per corollarium propositionis 12. lib. 13. perpendicularis ex centro ad latus trianguli æquilateri ducta, æqualis sit dimidio semidiametri; perspicuum est, maius segmentum A E, æquale esse dictæ perpendiculari, minus vero E D, dimidio lateris decagoni.*

[a] 9. tertiædecimi.

[b] 1 quartædecimi.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI in circulo pentagonum æquilaterum describatur, quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni subtenditur, recta linea, vtraque simul quadrata, quintupla sunt eius, quod ex semidiametro describitur, quadrati.

DESCRIBATVR in circulo A B C D E, cuius centrum F, pentagonum *ABCDE*, subtendatque recta *AC*, bina latera AB, BC. Dico quadrata rectarũ CD, AC, simul quintupla esse quadrati ex semidiametro circuli descripti. Ducta enim ex A, per centrum recta AFG, quæ per coroll. 2. propos. 10. lib. 13. diuidat & arcum CD, & latus CD, bifariam in G, & H; erit arcus CG, decima pars totius circumferentiæ, ideoque recta subtensa CG, latus decagoni. Quoniam igitur recta A G, dupla est rectæ FG; erit ex scholio propos. 4. lib. 2. quadratũ rectæ A G, quadruplum quadrati rectæ FG: [a] Sunt autem quadrato rectæ A G, æqualia quadrata rectarum A C, CG. Igitur & quadrata rectarum *AC*, CG, quadrupla sunt quadrati rectæ FG; *Atq*; adeo tria quadrata rectarum *AC*, CG, FG, quintupla quadrati eiusdẽ rectæ FG; [b] Cum ergo quadratis rectarum FG, CG, nempe lateris hexagoni, & lateris decagoni, æquale sit quadratum rectæ C D, lateris videlicet pentagoni; Erunt quoque quadrata rectarum AC, C*D*, quintupla quadrati rectæ FG, nimirũ semidiametri. Si in circulo igitur pentagonum æquilaterum describatur; quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni subtenditur, recta linea, vtraque simul quadrata, quintupla sunt eius, quod ex semidiametro describitur, quadrati. Quod erat demonstrandum.

[a] 47. primi

[b] 10. tertiædec.

COROL-

COROLLARIVM.

INFERTVR ex his theorema huiusmodi.

SI in sphæra eadem cubus, & dodecaedrum inscribantur; quadratum lateris cubi & quadratum lateris Dodecaedri, vtraque simul, quintupla sunt quadrati semidiametri circuli pentagonum Dodecaedri circumscribentis.

CIRCVMSCRIBAT enim circulus ABCDE, pentagonum vnum Dodecaedri in quapiã sphæra descripti; eritque ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. recta AC, subtendens pentagoni angulum B, lati tus cubi in eadẽ sphæra descripti.

[a] *3. quarti decimi.*

[a] Perspicuum est autem, quadrata rectarum AC, CD, lateris scilicet cubi, & lateris Dodecaedri, quintupla esse quadrati semidiametri F G, &c.

PROBL. 4. PROPOS. 4.

SI latus hexagoni alicuius circuli secetur extrema ac media ratione; maius illius segmentum erit latus decagoni eiusdem circuli.

SECETVR. n. *AB*, latus hexagoni alicuius circuli extrema ac media ratione in C, sitque maius segmentũ AC. Dico AC, esse latus decagoni eiusdẽ circuli. Sit. n. *AD*, latus decagoni eiusdem circuli, adiungaturque in rectum

rectum ipsi *AB* [a] eritque tota composita BD, ex latere hexagoni, & latere decagoni, diuisa in A, extrema ac media ratione, cuius maius segmentum *BA*: Ponitur autem & A B, secta in C, similiter. [b] Igitur erit vt BD, tota ad maius sui segmentum A*B*, ita *A* B, tota ad maius sui segmentum AC: Sed est quoque vt BD, tota ad maius sui segmentum *AB*, ita AB, maius segmentũ ad *AD*, segmentum minus, per definitionem lineæ sectę extrema ac media ratione. Igitur erit vt A*B*, ad AC, ita eadem AB, ad AD; Ac propterea AC, AD, æquales erũt. Cum ergo AD, ponatur latus decagoni illius circuli, cuius latus hexagoni est *AB*; erit & AC, eiusdem circuli latus decagoni.

[a] *9. tertij decimi.*

[b] *2. quarti decimi.*

ALITER. [c] Adiungatur ipsi AB, in rectũ recta *AD*, æqualis maiori segmento AC; [c] eritque tota recta BD, diuisa in A, extrema ac media ratione. Cum igitur AB, maius segmentum ipsius, ponatur latus hexagoni alicuius circuli, per ea, quę demonstrauimus ad propos. 9. lib. 13. AD, minus segmentum eiusdem circuli latus decagoni; Ac propterea & A C, æqualis ipsi A D, latus erit decagoni in eodẽ circulo descripti, cuius *AB*, latus hexagoni ponitur. Si ergo latus hexagoni alicuius circuli, &c. Quod erat ostendendum.

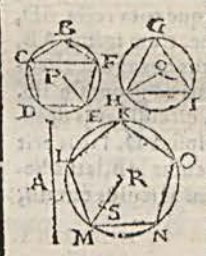
[c] *5. tertij de.*

THEOR. 5. PROPOS. 5.

IDEM circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icosaedri triãgulum, eidem sphæræ inscriptorum.

IN sphæra, cuius diameter A, intelligatur descriptũ & Dodecaedrum, cuius vnum pentagonum BCDEF, & Icosaedrum, cuius vnum triangulum GHI. Dico eundẽ circulũ circumscribere & pentagonum BCDEF, & triãgulũ GHI, hoc est, circulos BCDEF, GHI, ipsa circum

scribentes esse æquales. Circumscribat.n. circulus KLMNO, pentagonum KLMNO, [a] ex quo Icosaedrum sphæræ inscribitur, ita vt quinque latera huius pentagoni sint latera Icosaedri, ideoque quodlibet ipsorũ æquale cuiuis lateri trianguli GHI. Deinde ex centris P, Q, R, ducantur rectæ PE, QH, RM; Secenturque RM, extrema ac media ratione in S; [b] eritque maius segmentum RS, latus decagoni in circulo KLMNO, in quo RM, est latus hexagoni. Subtẽdat quoque recta CF, angulum B, pẽtagoni Dodecaedri, quæ erit per coroll. 2. propos. 17. lib. 13. latus cubi in eadem sphæra descripti. Quoniam igitur ex coroll. 1. eiusdẽ propos. BF, latus Dodecaedri est maius segmentum lateris cubi CF, secti extrema ac media ratione; [c] erit vt tota CF, ad totam RM, ita BF, maius segmentum ad RS, maius segmentum; [d] Ac propterea vt quadratum rectæ CF, ad quadratum rectæ RM, ita quadratũ rectæ BF, ad quadratum rectæ RS. Atque adeo, per ea, quæ demonstrata sunt in scholio ppos. 22. lib. 5. vt triplum quadrati rectæ CF, ad quintuplum quadrati rectæ RM, ita triplum quadrati rectæ BF, ad quintuplum quadrati rectæ RS: Est autem triplum quadrati rectæ CF, æquale quintuplo quadrati rectę RM, (quia tam triplum quadrati lateris cubi CF, ex propos. 15. lib. 13. quam quintuplum quadrati semidiametri RM, ex coroll. 1. propos. 16. lib. 13. æquale est quadrato ex A, diametro sphæræ.) Igitur & triplum quadrati rectæ BF, æquale erit quintuplo quadrati rectæ RS: [e] Quia vero quadratum rectæ MN, lateris pentagoni, æquale est quadrato lateris RM, hexagoni, & quadrato rectæ RS, lateris decagoni; erunt quoq; quinque quadrata rectæ MN, æqualia quinque quadratis rectæ RM, & quinque quadratis rectæ RS. Igitur & quinq; quadrata rectæ MN, æqualia sunt tribus quadratis rectæ CF, (cũ hæc ostensa sint æqualia quinque quadratis rectæ RM,) & tribus quadratis rectæ BF, quæ æqualia fuerunt quinque quadratis rectæ



[a] 16. tertij dec.
[b] 4. quarti dec.
[c] 2. quarti dec.
[d] 22 sexti.
[e] 10. tertij dec.

rectæ RS. Sed qm̃, ([a] cum quadrata rectarum CF, BF, quinque quadratis semidiametri PE, sint æqualia; / tria quadrata rectæ CF, & tria quadrata rectæ BF, æqualia sunt quindecim quadratis rectæ PE, & quinque quadrata rectę MN, æqualia sunt quindecim quadratis semidiametri QH; (Nam cum MN, æqualis sit ostensa ipsi GH, lateri Icosaedri, seu trianguli æquilateri; [b] sit autem quadratum ipsius GH, æquale tribus quadratis semidiametri QH; Erunt quinque quadrata rectæ GH, hoc est, rectę MN, æqualia quindecim quadratis rectę QH.) erunt quoque quindecim quadrata rectę PE, æqualia quindecim quadratis rectę QH; ac propterea vnum quadratum rectę PE, vni quadrato rectę QH, & idcirco semidiameter PE, semidiametro QH, æqualis erit. Quare circuli BCDEF. GHI æquales sunt. Idem ergo circulus comprehendit, &c. Quod erat demonstrãdum.

[a] 3. quarti dec.
[b] 12. tertij decimi.

THEOR. 6. PROPOS. 6. 3. 6.

SI ex centro circuli pentagonũ Dodecaedri circumscribentis, perpendicularis ducatur ad vnum latus pentagoni; Erit, quod sub dicto latere, & perpendiculari comprehenditur, rectangulum trigesies sumptum, Dodecaedri superficiei æquale.

EX centro F, circuli circumscribentis pentagonum Dodecaedri ABCDE, ducatur ad latus CD, perpendicularis FG. Dico rectangulũ sub FG, & CD, trigesies sumptum, esse æquale toti superficiei Dodecaedri. Ductis.n. rectis ex F, ad oẽs angulos pentagoni, resoluetur pẽtagonũ in quinq; triãgula æqualia, ex coroll prop. 8. lib. 1 cũ bina

bina latera vnius æqualia sint binis lateribus aliorum, & basis quoque vnius basibus aliorum æqualis. Ducatur quoque per *F*, recta HI, parallela ipsi CD, occurrēs duabus perpendicularibus CH, DI, ductis ex *C*, *D*, ad CD, in punctis H, & I. Eritque rectangulum *C* I, contentum sub HC, hoc est, sub F *G*, & *C D*.

[a] 41. primi. [a] Quoniam vero rectangulum C I, duplum est trianguli F C D. atque adeo cuiuslibet reliquorum quatuor triangulorum ipsi *F*CD, æqualium; erit rectangulum *C* I, quinquies sumptum, æquale decem huiusmodi triangulis, hoc est, duobus pētagonis Dodecaedri, cum quinque triangula æqualia sint vni pentagono; *A*tque adeo sextuplum rectanguli *C* I, quinquies sumpti, nimirum rectangulum C I, sumptum trigesies, æquale quoque erit sextuplo duorū pentagonorum, id est, duodecim pentagonis, hoc est, toti superficiei Dodecaedri. Si igitur ex centro circuli pentagonum Dodecaedri, &c. Quod erat demonstrandum.

[b] 41. primi. ALITER. Facta eadem figuræ constructione, [b] cū rectangulum CI, duplum sit trianguli *F* C D, hoc est, æquale triangulo FCD, bis sumpto; Erit rectangulū *C*I, trigesies sumptū æquale triangulo FCD, bis sumpto trigesies, hoc est, sumpto sexagesies; ac proinde toti superficiei *D*odecaedri. Cum enim vnum pentagonum *D*odecaedri constet quinque huiusmodi triangulis, constabūt duodecim pentagona, nempe tota superficies Dodecaedri, sexaginta huiusmodi triāgulis. Atq; ideirco triāgulum FCD, sumptum sexagesies æqualis erit superficiei *D*odecaedri.

3. 7. THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI ex centro circuli triangulum Icosaedri circūscribentis, perpendicularis ducatur ad vnum latus trianguli; Erit, quod

quod sub dicto latere, & perpendiculari comprehenditur, rectangulum trigesies sumptum Icosaedri superficiei æquale.

EX centro D, circuli circumscribentis triangulum Icosaedri *A* B C, ducatur ad latus perpendicularis D E. Dico rectangulum contentum sub D E, & B *C*, trigesies sumptum, æquale esse toti superficiei Icosaedri. Ductis nāque rectis ex D, ad omnes trianguli angulos, resoluetur triangulum in tria triangula æqualia, ex coroll. propos. 8. lib. 1. Sunt enim bina latera vnius binis lateribus aliorum æqualia, & basis vnius basibus aliorum æqualis. Ducatur quoque per *D*, recta *F*G, parallela ipsi BC, occurrens in *F*, & G, duabus perpendicularibus *B*F, CG, ex B, C, ductis ad B C; eritque rectangulum B G, contentum sub FB, hoc est, sub *D*E, & B*C*. [a] Quoniā vero rectangulū BG, duplum est trianguli BDC; atque adeo cuiuslibet reliquorum duorum triangulorum ipsi DBC, æqualium: Erit rectangulū BG, ter sumptum æquale sex huiusmodi triangulis, hoc est, duobus triangulis Icosaedri, cum tria talia triangula æqualia sint vni triāgulo Icosaedri; Atq; adeo idē rectangulum trigesies sumptū, nēpe decuplū rectāguli BG, ter sumpti, æquale erit viginti triāgulis Icosaedri, hoc est, toti superficiei Icosaedri, nimirū decuplo duorū triangulorū Icosaedri. Si ergo ex centro circuli triēgulum Icosaedri, &c. Quod erat ostendendū.

[a] 41. primi

[b] 41. primi. ALITER. Facta eadem constructione figuræ, [b] cū rectangulum *B*G, duplum sit trianguli D B C, id est, æquale dicto triangulo bis sumpto; Erit rectāgulum BG, trigesies sumptum, æquale triangulo D*B*C, sumpto sexagesies: Atqui sexaginta huiusmodi triangula conficiunt viginti triangula Icosaedri, eo quod tria cōficiunt vnū.

Igitur rectangulum BG, trigesies sumptum ęqualę est toti superficiei Icosaedri.

COROLLARIVM.

IT AQVE superficies cuiuslibet Dodecaedri ad superficiem cuiuscunque Icosaedri, etiamsi non describantur ambæ figuræ in eadem sphæra, est sicut rectangulum contẽtum sub latere Dodecaedri, & perpendiculari ducta ex centro pẽtagoni Dodecaedri in latus dictũ, ad rectangulum contentum sub latere Icosaedri, & perpendiculari ducta ex centro trianguli Icosaedri in dictum latus.

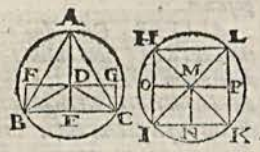
[a] Cum enim superficies Dodecaedri æqualis sit illi rectangulo trigesies sumpto; [b] Item superficies Icosaedri æqualis huic rectangulo trigesies quoque sumpto: Erit tam illud rectangulum trigesima pars superficiei Dodecaedri, quam hoc rectangulum, superficiei Icosaedri. [c] Quare erit superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, vt rectangulum illud, trigesima videlicet pars Dodecaedri, ad rectangulum hoc, trigesimam scilicet partem Icosaedri. Quod est propositum.

[a] 6. quarti dec.
[b] 7. quarti dec.
[c] 15. quinti

SCHOLIVM.

NON dissimili argumento indagabimus superficies reliquorum trium corporum regularium, Tetraedri videlicet, octaedri, & cubi. Nam si ex centro circuli triangulum Tetraedri, vel Octaedri, siue quadratum cubi, circumscribentis perpendicularis ducatur ad vnum aliquod eorum latus; Erit, quod sub dicto latere & perpendiculari continetur, rectangulum, in Tetraedro quidem sumptum sexies, superficiei Te-

Tetraedri; In octaedro vero & cubo duodecies sumptum, superficiei Octaedri, & cubi æquale. Sit enim primo triangulũ Tetraedri ABC, circumscriptũ a circulo, cuius centrum D, a quo perpendicularis ducatur DE, ad latus BC, & reliqua fiant, vt de triangulo Icosaedri dictum est. Dico rectangulum BG, sexies sumptum, æquale esse superficiei Tetraedri. [a] Quoniam enim rectangulum BG, duplum est trianguli DBC, hoc est æquale duobus eiusmodi triangulis; erit ipsum sexies sumptum æquale duodecim talibus triangulis. Cum igitur duodecim talia triangula constituant totã superficiem Tetraedri, nempe quatuor triangula æquilatera ipsi ABC, æqualia, eo quod tria conficiunt vnum; Erit rectangulum BG, sexies sumptum, superficiei Tetraedri, seu Pyramidis æquale.



[a] 41. primi

SIT deinde idem triangulum ABC, Octaedri, &c. Dico rectangulum BG, duodecies sumptum, æquale esse superficiei Octaedri. [b] Cum enim rectangulũ BG, duplum sit trianguli DBC, hoc est, æquale duobus eiusmodi triangulis, erit idem rectangulum duodecies sumptum æquale vigintiquatuor huiusmodi triangulis: Sed vigintiquatuor talia triangula constituunt octo triangula Octaedri, id est, totam superficiem Octaedri, propterea quod tria conficiunt vnum. Igitur rectangulum BG, duodecies sumptum æquale est superficiei Octaedri.

[b] 41. primi

SIT tertio quadratum cubi HIKL, circa quod circulus ex centro M, describatur, & deducta MN, perpendiculari ad IK, ducantur ex M, ad omnes angulos quadrati rectæ lineæ, vt quadratum resoluatur in quatuor triangula æqualia; Atque per M, agatur OP, ipsi IK, parallela. Dico rectangulum IP, contentum sub OI, hoc est, sub MN, & IK, sumptum duodecies, æquale esse superficiei cubi. [c] Quoniam enim rectangulũ IP, duplum est trianguli MIK, hoc est, æquale duobus talibus triangulis; Erit idem duodecies sumptum æquale vigintiquatuor eiusmodi triangulis. Quare cum vigintiquatuor talia triangula constituant sex

[c] 41. primi

quadrata, id est, totam superficiem cubi, quod quatuor talia triangula vnum quadratum conficiant; Erit rectangulum IP, duodecies sumptum æquale superficiei cubi. Quod est propositum.

ALITER. Cum duo rectangula IP, conficiant quadratum HIKL; (sunt enim IP, PH, æqualia, cum recta OI, semidimidium lateris HI, nempe æqualis ipsi MN) constituunt duodecim talia rectangula sex quadrata eiusmodi, hoc est, totam superficiem cubi.

4. 8.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

RECTANGVLVM contentum sub tribus quartis partibus diametri alicuius circuli, & quinque sextis partibus lineæ subtendentis angulum pentagoni æquilateri in eodem circulo descripti; æquale est dicto pentagono.

IN circulo, cuius centrum F, describatur pentagonum æquilaterum ABCDE, & ducta diameter AG, diuidatur in quatuor æquales partes, quarum tres sint AH: Angulum vero A, subtendens recta BE, secetur in sex partes æquales, quarum quinque sint BI, & vna IE, ita vt BI, sit quintupla ipsius IE. Dico rectangulũ cõprehensum sub AH, BI, æquale esse pentagono ABCDE. Ducta enim recta BF; quoniam AH, cõtinet tres quartas partes diametri, & AF, duas, cum sit semidiameter, erit AH, ipsius AF, sesquialtera. Quia vero recta FA, diuidens arcum BAE, bifariam, diuidit quoque rectam BE, bifariam, per coroll. 1. ppos. 10. lib. 13. in puncto K; cõtinebit tã KB, q̃ KE, tres sextas rectæ BE; atq; adeo cũ BI, cõtineat quinq;, cõtinebit KI, duas; Ac proinde & KB, ipsius

ipsius KI, erit sesquialtera. Quamobrem erit vt AH, ad AF, ita KB, ad KI; [a] atque idcirco rectangulum sub extremis AH, KI, æquale erit rectangulo sub medijs AF, KB. [b] Est autem rectangulum sub AF, KB, duplum trianguli ABF, cum rectangulum, & triangulum eandem habeant basin AF, & eâdem altitudinem BK, hoc est, inter easdem sint parallelas constituta. Igitur & rectangulum sub AH, KI, duplum erit eiusdem trianguli ABF: [c] Est autem & rectangulum sub AH, KI, duplum rectanguli sub AH, IE; propterea quod & basis KI, dupla est basis IE, (continet enim KI, duas sextas partes ipsius BE, & IE, vnam.) eademque semper altitudo AH. Igitur æqualia sunt triangulum ABF, & rectangulum sub AH, IE; ideoque & eorum quintupla æqualia erunt. At vero pentagonum ABCDE, quintuplum est triãguli ABF, quod pentagonum in quinque huiusmodi triangula resoluatur, ductis rectis e centro F, vt propos. 6. huius lib. docuimus. [d] Rectangulum vero sub AH, BI, quintuplum est rectanguli sub AH, IE; quod & basis BI, quintupla sit basis IE, eademque semper altitudo AH. Igitur pentagonum ABCDE, & rectangulum sub AH, BI, æqualia sunt. Rectangulum ergo contentum sub tribus, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 16. sexti

[b] 41. primi

[c] 1. sexti

[d] 1. sexti

COROLLARIVM.

QVONIAM vero, si pentagonum ABCDE, statuatur basis Dodecaedri in aliqua sphæra descripti, BE, est latus cubi in eadem sphæra descripti, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. & vnum latus trianguli Icosaedri in eadem sphæra constituti, (comprehensi videlicet eodem circulo, quo & pentagonum Dodecaedri,) secat diametrum AG, in H, (cum ex coroll. propos. 12. lib. 13. secet semidiametrum FG, bifariam, quemadmodum & punctum H, eandem semidiametrum FG, bifariam diuidit) Manifestum est, rectangulum comprehensum sub perpendiculari ab angulo trianguli Icosaedri ad vnum eius latus dutta, nempe sub AH, & sub quinque sextis partibus lateris

[e] 5. quartidecimi.

lateris cubi eidem sphæræ, in qua Icosaedrum, inscripti, nimirum sub BI, æquale esse pentagono Dodecaedri in eadem sphæra constituti.

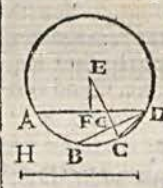
4. 8.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

SVPERFICIES Dodecaedri ad superficiem Icosaedri in eadem sphæra descripti, eandem proportionem habet, quam latus cubi ad latus Icosaedri.

IN circulo ABCD, [a] circunscribente & pentagonū Dodecaedri, & triangulum Icosaedri, sit latus pentagoni BD, & triāguli AD; & ex centro E, ducantur ad AD, BD, perpendiculares EF, EG; Sit deinq; H, latus cubi in eadem sphæra cum Dodecaedro, & Icosaedro descripti. Dico esse vt H, latus cubi, ad AD, latus Icosaedri, ita superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosaedri. Quoniam enim lateris cubi H, secti extrema ac media ratione, maius segmentum est BD, latus Dodecaedri, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. Rectæ autem EG, rectæ quoque extrema ac media ratione maius segmentū est EF, ex coroll propos. 2. huius lib. [b] Erit vt H, tota ad BD, maius sui segmentum, ita EG, tota ad EF, maius sui segmentum; [c] Ac proinde rectangulum sub extremis H, EF, æquale erit rectangulo sub medijs BD, EG. [d] Quare uero est, vt H, ad AD, ita rectangulum sub H, EF, ad rectangulum sub AD, EF, cum bases sint H, AD, altitudo vero semper eadem EF; Erit quoque vt H. ad AD, ita rectangulum sub BD, EG, (quod est æquale rectāgulo sub H, EF,) ad idem rectangulum sub AD, EF. Quare cum, ex coroll. propos 7. huius lib. sit, vt rectāgulum sub BD, EG, ad rectangulum sub AD, EF, ita superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri; Erit quoque, vt H. latus cubi, ad AD, latus Icosaedri, ita superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri. Superficies itaque Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, &c. Quod ostendendum erat.

[a] 5. quarti decimi.



[b] 2. quarti decimi.
[c] 16. sexti
[d] 1. sexti

ALITER. [a] Circumscribat pentagonum Dodecaedri ABCDE, & triangulum Icosaedri AFG, circulus idem, cuius centrum H. Ducatur deinde ex A per centrum H, recta AI, quę per coroll. 2. propos. 10. lib. 13. diuidet latus FG, bifariam, & ad angulos rectos. Connectatur denique recta BE, quę latus erit cubi, ex corol. 2. propos. 17. lib. 13. cuius quinque sextę partes sint BK. Dico rursus esse, vt BE, latus cubi ad FG, latus Icosaedri, ita superficiem Dodecaedri ad superficiē Icosaedri. Quoniam.n. rectāgulum sub AI, BK, æquale est pentagono ABCDE, ex coroll. propos. 8. huius lib. Item rectangulum sub AI, IF, æquale est triangulo AFG, ex scholio propos. 41. lib. 1. cum FG, basis trianguli dupla sit ipsius IF, basis rectanguli: Erit vt rectangulum sub AI, BK, ad rectangulū sub AI, IF, ita pentagonum ABCDE, ad triangulum AFG: [b] Est autem vt rectangulum sub AI, BK, ad rectangulum sub AI, IF, ita BK, ad IF, cum bases sint BK, IF, & altitudo eadem semper AI. Erit igitur quoque vt pentagonum ABCDE, ad triangulum AFG, ita BK, ad IF; Ac proinde, (si primum, & tertium, nimirum pentagonum ABCDE, & recta BK, æquemultiplicētur per numerum 12. Item secundum, & quartum, nempe triangulum AFG; & recta IF, æquemultiplicentur per numerum 20. [c] erit quoque vt pentagonum ABCDE, duodecies sumptum, hoc est, superficies Dodecaedri, ad triangulum AFG, vigesies sumptū, nempe ad superficiem Icosaedri, ita recta BK, duodecies sūpta ad rectā IF, vigesies sumptā: Atqui recta BK, duodecies sumpta æquivalet lateri cubi BE, decies sumpto; (Nam cum BK, contineat quinq; sextas partes ipsius BE; continebit eadē BK, duodecies sumpta sexaginta partes sextas eiusdē BE, quę efficiūt decē integras

[a] 5 quarti decimi.

[b] 1. sexti

[c] schol. 2. quinti.

gras rectas BE.) Recta vero *IF*, vigesies sumpta æqualis est lateri Icosaedri FG, decies sumpto; (eo quod *FG*, est ipsius I F, dupla.) Erit igitur superficies *D*odecaedri ad superficiem Icosaedri, vt latus cubi BE, decies sumptum ad latus *I*cosaedri FG, decies sumptum; Ac propterea, [a] cum eandem proportionem habeant decem latera cubi ad decem latera Icosaedri, quam vnum latus cubi ad vnum latus Icosaedri; perspicuum est, ita esse superficiem *D*odecaedri ad superficiem Icosaedri, vt latus cubi ad latus Icosaedri. Quod est propositum.

[a] 13. quin.

4. 9.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI recta linea secetur extrema ac media ratione; Erit vt recta potens id, quod a tota, & id quod a maiori segmento, ad rectam potentem id, quod a tota, & id, quod a minori segmento, ita latus cubi ad latus Icosaedri eidem sphæræ cum cubo inscripti.

SECETVR recta *AB*, in *C*, extrema ac media ratione, sitque maius segmentum AC. Sit quoque D, latus cubi, & E, latus *I*cosaedri in sphæra eadem cum cubo descripti. Ex *A*, centro, ad interuallum *AB*, circulus describatur, in quo constituatur & pentagonum æquilaterum BFGHI & triangulum æquilaterum BKL. Si igitur BF, ponatur latus Dodecaedri alicuius sphæræ, erit data recta BG, latus cubi in eadem sphæra descripti, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. Quoniam uero AC, maius segmentum semidiametri *AB*, sectę extrema ac media rõne, [b] est latus Decagoni

[b] 4. quarti-deci.

Decagoni in circulo BFGHI, in quo nimirum *AB*, latus est Hexagoni; [a] poterit *BF*, latus pentagoni & totã *AB*, latus videlicet hexagoni, & maius segmentum A C, latus scilicet Decagoni in eodem circulo. Posit iam & recta M, totam *AB*, & minus segmentum *BC*, per ea, quæ ad propos. 47. lib. 1. demonstrauimus. Dico sic esse D, latus propositum cubi ad E, latus propositum Icosaedri, vt est B F, potens totam *A B*, & maius segmentum AC, ad M, potentem totam A *B*, & minus segmentum B C [b]. Quoniam enim quadratum lateris trianguli æquilateri B *K*, triplum est quadrati semidiametri *AB*: [c] Item quadrata rectarum A B, *BC*, tripla sunt quadrati rectæ AC; Erit vt quadratum rectæ B *K*, ad quadratum rectæ A B, ita quadrata rectarum A B, *B C*, hoc est, quadratum rectæ M, ipsis æquale, ad quadratum rectæ AC. Vtrobique enim proportio est tripla. Permutando ergo erit, vt quadratum rectæ BK, ad quadratum rectæ M, ita quadratum rectæ AB, ad quadratũ rectæ AC: Est autem vt quadratum rectæ *AB*, ad quadratum rectæ AC, ita quadratum rectæ *B G*, ad quadratum rectæ B F. Nam cum rectæ B G, sectæ extrema ac media ratione, maius segmentum sit BF, ex coroll. 1. propos. 17. lib. 13. eo quod BG, est latus cubi, & BF, latus *D*odecaedri eiusdem sphæręs; [d] Erit vt tota AB, ad maius segmẽtum AC, ita tota BG, ad maius segmentũ *BF*: Ac proinde vt quadratum rectæ AB, ad quadratum rectę AC, ita quadratũ rectæ BG, ad quadratum rectæ BF.) Igitur erit quoque, vt quadratum rectæ BG, ad quadratũ rectæ B F, ita quadratum rectæ B *K*, ad quadratum rectæ M: Et permutando, vt quadratum rectæ B G, ad quadratum rectæ B *K*, ita quadratum rectæ *BF*, ad quadratũ rectę M; [e] Ac proinde erit vt recta BG, ad rectam B*K*, ita recta *BF*, potens totam *AB*, & maius segmentum A C, ad rectam M, potentem totam AB, & minus segmentum *BC*. Cum igitur proposita latera *D*, E, cubi, & Icosaedri, eandem habeant proportionem, quam rectę BG, B *K*, vt mox ostensum; perspicuum est, vt se habet recta BF, potens totã *AB*, & maius segmentum *AC*, ad rectam M, potentem totam AB, & minus segmentum B C, ita se habere propositum

[a] 10. tertij-dec.
[b] 12. tertij-deci.
[c] 4. tertij d.
[d] 2. quarti-decimi.
[e] 22. sexti
[f] 22. sexti

positum cubi latus D, ad Icosaedri propositum latus E. Si recta itaque linea secetur extrema ac media ratione, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

QVOD vero proposita latera cubi & Icosaedri D, & E, eiusdem sphæræ eandem habeant proportionem, quam rectæ BG, BK, demonstrabimus hoc proposito theoremate.

QVAM proportionem habent latera cubi & Icosaedri eiusdem sphæræ eandem habent latera cubi & Icosaedri in quauis alia sphæra descriptorum.

SIT enim A, latus cubi, & BC, latus Icosaedri eiusdem sphæræ: Item D, latus cubi, & EF, latus Icosaedri in quauis alia sphæra. Dico esse vt A, ad BC, ita D, ad EF. Perficiatur namque triangulus Icosaedrorum BCG, EFH, et circa ipsa descriptis circulis describantur in his circulis pentagona æquilatera BIKLM, ENOPQ, connectantur rectæ BK, CK, EO, FO. Quoniam ergo idem circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icosaedri triangulum eiusdem sphæræ; & ponitur BCG, triangulum Icosaedri in eadem sphæra descripti, in qua cubus latera A: Erit BIKLM, pentagonū Dodecaedri in eadem cū ipsis sphæra descripti; Ac propterea, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. rectæ BK, latus erit cubi eiusdem sphæræ, ideoq; ipsi A, æquali. Simili argumento æqualis erit recta EO, lateri cubi D. Rursus quia arcus BIK, ENO, similes sunt; (Nam vterque continet duas quintas partes suæ circunferentiæ.) Item arcus BG, EHF; (vterque enim duas tertias partes totius circunferentiæ comprehendit.) Erunt tam anguli BCK, EFO, ex definitione segmētorum similium, æquales inter se, quā anguli BKC, EOF; inter se, cum tam illi, quam hi, in segmentis circulorum similibus existant: Ac proinde, ex coroll. 1. propos. 32. lib. 1. reliquus angulus CBK, trianguli BCK, reliquo angulo FEO, trianguli EFO, æqualis erit, & totum triangulū BCK, toti triangulo EFO, æquiangulū. [a] Quare erit, vt BK, hoc est, recta A, illi æqualis, nempe latus cubi, ad BC, latus Icosaedri, ita EO, hoc est, recta D, illi æqualis, latus scilicet alterius cubi, ad EF, latus Icosaedri. Quod est propositum.

[a] 4 sexti.

PERSPICVVM est igitur id, quod in demonstratione assumebatur, nimirum eandem habere proportionem D, & E, latera cubi & Icosaedri in vna sphæra, quam habent BG, BK, latera cubi & Icosaedri in alia sphæra.

EX hoc quoque elicitur, Superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosaedri non solum habere eandem proportionem, quam latus cubi ad latus Icosaedri in eadem sphæra cum ipsis, vt vult propos. 9. huius lib. Sed etiam, quam obtinet latus cubi ad latus Icosaedri in quacunque alia sphæra.

[a] 5. quarti dec.

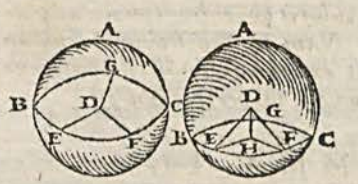
LEMMA I.

SI sphæra plano quopiam secetur, communis sectio circulus erit.

SECETVR sphæra ABC, cuius centrum D, plano aliquo faciente communem sectionem planum BEFCG. Dico BEFCG, esse circulum. Transeat enim primo planum secans per centrum sphęræ, ita vt centrum D, sit in plano, seu communi sectione BEFCG; ducanturque ex D, centro sphæræ ad extremitatem communis sectionis, lineæ rectæ quotcunque DE, DF, DG.

DG. Quoniam igitur omnes hæ lineæ ductæ, quotcumque fuerint, æquales sunt, ex definitione sphæræ, cum ex eius centro ad superficiem cadant; erit figura plana BEFCG, vnica linea contenta, circulus, eiusque centrum D, idem cum centro sphæræ.

TRANSEAT secundo planum secans non per centrum sphæræ: Ducatur autē ex D, centro sphæræ ad planum secans perpendicularis DH; emittāturque ex H, rectæ vtcunque HE, HF, ad extremitatem vsque communis sectionis; & connectantur rectæ DE, DF.



Quoniam igitur anguli DHE, DHF, ex defin. 3. lib. 11. recti sunt; [a] erit tam quadratum rectæ DE, quadratis rectarum DH, HE, quam quadratum rectæ DF, quadratis rectarum DH, HF, æquale: Sunt autem quadrata rectarum DE, DF, æqualium ex centro sphæræ ad eius superficiem cadentium, æqualia. Igitur & quadrata rectarum DH, HE, quadratis rectarum DH, HF, æqualia erunt; & proinde, dempto communi quadrato rectæ DH, reliquum quadratum rectæ HE, reliquo quadrato rectæ HF, æquale erit. Quare & rectæ HE, HF, æquales erunt. Eodem argumento ostendemus, omnes lineas ex H, ad extremitatem communis sectionis cadentes esse æquales & inter se, & dictis duabus HE, HF. Figura igitur plana BEFCG, vnica linea cōtenta, circulus erit; eiusq; centrū, punctū H, in quod perpendicularis DH, cadit. Quod est propositum.

[a] 47. primi

CO-

COROLLARIVM.

ITAQVE si planum secans transierit per centrum sphæræ, efficietur circulus idem centrum habēs, quod sphæra. Si vero planum secans per sphæræ centrum non transierit, efficietur circulus habens aliud centrum, quam sphæra; illud videlicet punctum, in quod cadit perpendicularis ex centro sphæræ ad planum secans ducta. Nam semper demonstrabuntur lineæ rectæ cadentes ex hoc puncto in circumferentiam circuli esse æquales, vt perspicuum est.

LEMMA II.

CIRCVLI in sphæra æquales, æqualiter distant a centro sphæræ: & circuli æqualiter distantes a centro sphęræ, æquales sunt.

IN sphæra ABCD, cuius centrum E, sint circuli æquales AB, DC. Dico ipsos æqualiter a centro E, distare. Ducantur enim ex E, ad eorum plana perpendiculares EF, EG, quæ per coroll. præcedentis lemmatis in ipsorum centra cadent, ex quibus ducantur rectæ FB, GC, ad circumferentias circulorum vtcunque, connectantur quæ rectę EB, EC. Quoniam igitur anguli EFB, EGC, recti sunt, ex defin. 3. lib. 11. [a] erit tam quadratum rectæ EB, quadratis rectarum EF, FB, quam quadratum rectę EC, quadratis

[a] 47. primi.

Ddd dratis

dratis rectarum EG, GC, æquale: Sunt autem quadrata rectarum EB, EC, æqualium, cum cadant ex centro sphæræ ad eius superficiem, æqualia. Igitur & quadrata rectarum EF, FB, quadratis rectarum EG, GC, æqualia erunt. Et proinde demptis quadratis æqualibus rectarum æqualium FB, GC, cum sint semidiametri circulorum æqualium, erit reliquum quadratum rectæ EF, reliquo quadrato rectæ EG, æquale; Atque adeo æquales erunt rectæ perpendiculares EF, EG. Quam ob rem circuli AB, DC, æqualiter distant a centro E.

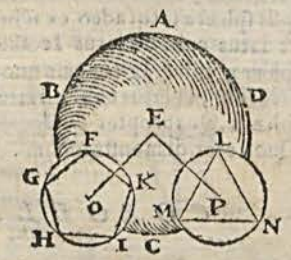
47. primi

SED iam æqualiter distent circuli AB, DC, a centro sphęræ E. Dico ipsos esse æquales. Constructa enim figura vt prius, ostendemus eodem modo, quadrata rectarum EF, FB, æqualia esse quadratis rectarũ EG, GC. Ac proinde, demptis quadratis æqualibus rectarum æqualium EF, EG, cum circuli æqualiter ponantur distare a centro, reliquum quadratum rectæ FB, reliquo quadrato rectæ GC; atque adeo æquales erunt rectæ FB, GC, semidiametri scilicet circulorum AB, DC. Circuli igitur AB, DC, æquales sunt. Quod est propositum.

4. 10. THEOR. 11. PROPOS. 11.

DODECAEDRVM ad Icosaedrum in eadem cum ipso sphæra descriptum, est vt cubi latus ad latus Icosaedri, in vna eademque sphæra.

IN sphæra ABCD, cuius centrum E, inscriptum sit Dodecaedrum, cuius unum pentagonum FGHIK: item Icosaedrum, cuius vnum triangulum LMN. Dico esse Dodecaedrum ad Icosaedrum, vt latus cubi ad latus Icosaedri, in una eademque sphæra, siue hæc eadem sit, quæ sphæra ABCD, siue non. Quoniam omnes anguli tam pentagoni, quam trianguli, superficiem sphæræ tangunt; si per pentagonum, & triangulum plana ducantur, efficientur, per 1. lemma præcedens, duo circuli in sphæra FGHIK, LMN, comprehendentes pentagonum, & triangulum. [a] Quia vero eidem circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icosaedri triangulum; æquales erunt idcirco circuli FGHIK, LMN, ac propterea, per lemma 2. præcedens, æqualiter ab E, centro sphæræ distabũt, ideoque perpendiculares ex E, in plana circulorum deductæ, & in eorum centra, per coroll. lemmatis 1. cadentes, quales sunt EO, EP, æquales erunt. Non aliter ostendentur perpendiculares ex E, ad omnia pentagona Dodecaedri; & ad omnia triangula Icosaedri deductæ æquales. Quare si ex omnibus angulis Dodecaedri ad E, ducantur rectæ lineæ, resoluetur Dodecaedrum in duodecim pyramides æqualium altitudinum; Ac proinde cum & bases ipsarum æquales sint, nempe pentagona Dodecaedri, æquales inter se, ex coroll. propos. 6. lib. 12. Eodemque modo, si ex omnibus angulis Icosaedri ad E, lineæ rectæ ducantur, resoluetur Icosaedrum in 20. pyramides inter se æquales, quarũ altitudines æquales erunt altitudinibus pyramidũ Dodecaedri. [b] Quoniã aũt est, vt basis FGHIK, ad basin IMN,



a 6. quarti decim.

b 6. duodec.

LMN, ita pyramis FGHIKE, ad pyramidem LMNE, cum vtriusque eadem sit altitudo; Erunt quoque, per ea quæ in scholio propos. 22. lib. 5. demõstrauimus, vt duodecim bases Dodecaedri, tota videlicet superficies Dodecaedri, ad basin LMN, ita duodecim pyramides Dodecaedri, hoc est, totum solidum Dodecaedri, ad pyramidem LMNE. Rursus quia est, vt tota superficies Dodecaedri, ad Icosaedri basin LMN, ita Dodecaedrum ad pyramidem LMNE; erit, per idem scholium, vt tota superficies Dodecaedri ad 20. bases Icosaedri, id est, ad totam superficiem Icosaedri, ita Dodecaedrum ad 20. pyramides Icosaedri, nempe ad totum solidum Icosaedri. [a] Atqui ita est Dodecaedri superficies ad Icosaedri superficiem, vt cubi latus ad Icosaedri latus eiusdem cum ipsis sphæræ; atq; adeo, ex scholio propos. 10. huius lib. vt latus cubi ad latus Icosaedri cuiuscunque alterius sphæræ vnius. Igitur erit quoque Dodecaedrum ad Icosaedrum, vt latus cubi ad latus Icosaedri cuiuscunque sphæræ. Quapropter Dodecaedrum ad Icosaedrum, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 9. quartidecimi.

COROLLARIVM.

QVONIAM vero ostensum est quoque, [b] *ita esse superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosaedri eiusdem sphæræ, vt latus cubi ad latus Icosaedri eadem cum ipsis sphæra:* [c] *Item ita esse cubi latus ad latus Icosaedri vnius eiusdemq; sphæræ, vt est linea potens totam diuisam quamcunque extrema ac media ratione, & maius segmentum illius, ad lineam potentem totam diuisam eandem, & minus illius segmentum:* [d] *Item ita esse Dodecaedrũ ad Icosaedrum eiusdem sphæræ, vt latus cubi ad latus Icosaedri vna eademque sphæra; Perspicuum est, has quatuor proportiones, nimirum lateris cubi ad latus Icosaedri; & superficiei Dodecaedri ad superficiem Icosaedri;*

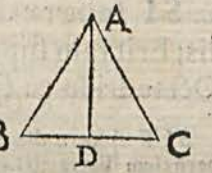
[b] 9. quartidecimi.
[c] 10. quartidec.
[d] 11. quartidec.

& lineæ potentis totam quamcunque sectam extrema ac media ratione, & eius segmentum maius, ad potentem totam eandem, & minus segmentum illius; & Dodecaedri ad Icosaedrum eiusdem sphæræ, esse inter se æquales.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

LATVS trianguli æquilateri potentia sesquitertium est lineę perpendicularis ab uno angulo ad latus oppositum deductæ.

IN triangulo æquilatero *A B C* ducatur ex angulo *A*, ad latus oppositum *B C*, perpendicularis *A D*. Dico quadratum lateris *A B*, sesquitertium esse quadrati perpendicularis *A D*. Quoniã. n. ob æqualitatem laterum *A B*, *A C*, anguli *B*, & *C*, æquales sunt; & anguli ad *D*, recti: Erũt duo anguli *B*, & *D*, trianguli *A D B*, æquales duobus angulis *C*, & *D*, trianguli *A D C*; habent autem & latus *A D*, commune, vel *A B*, *A C*, æqualia. [b] Igitur & reliqua latera *B D*, *C D*, æqualia sunt; ac propterea latus *B C*, hoc est, latus *A B* duplum rectæ *B D*; & idcirco quadratum lateris *A B*, quadruplum quadrati rectæ *B D*, ex scholio propos. 4. lib. 2. [c] Cũ igitur quadrato rectæ *A B*, æqualia sint quadrata rectarum *A D*, *B D*; erunt quoque quadrata rectarum *A D*, *B D*, quadrupla quadrati rectæ *B D*; Ac proinde, qualium partium 4. est quadratum rectæ *A B*, vel quadrata rectarum *A D*, *B D*, talium 1. erit quadratum rectæ *B D*, ideoque talium 3. quadratum reliquum rectæ *A D*. Quare quadratum rectæ *A B*, partiũ 4. sesquitertium est quadrati rectæ *A D*, partium 3. Latus igitur trianguli æquilateri potentia sesquitertium est, &c. Quod ostendendum erat.



[a] 5. primi.
[b] 26. primi
[c] 47. primi

COROLLARIVM.

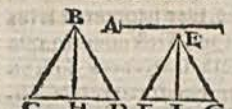
HINC manifestum est, lineam perpendicularem ex vno angulo trianguli æquilateri ad latus oppositum demissam, secare & angulum & latus bifariam. Demonstratum enim est BD, & CD, rectas æquales esse, hoc est, latus BC, secari bifariam a perpendiculari AD. Quare cum latera AB, AD, trianguli ABD, æqualia sint lateribus AC, AD, trianguli ACD; & basis BD, basi CD, æqualis; Erunt & anguli BAD, CAD, æquales, id est, angulus BAC, bifariam secabitur ab eadem perpendiculari AD.

[a] 8. primi.

0. 13. THEOR. 13. PROPOS. 13.

SI sphæræ diameter fuerit Rationalis; Erit tam superficies Tetraedri, quam Octaedri in ea sphæra, Media.

SIT sphærę diameter Rationalis A. *Dico* tam superficiem Tetraedri, quam Octaedri in dicta sphæra, esse Mediam. Sit enim B C D, vnum triangulum Tetraedri, & E F G, Octaedri illius sphęrę, ducanturque ex angulis B, & E, ad latera opposita CD, FG, perpendiculares BH, EI. [b] Quoniã igitur quadrata diametri A, sesquialterum est quadrati lateris Tetraedri BC, [c] & duplum quadrati lateris Octaedri E F; habebunt quadrata rectarum A, BC, EF, proportionem, quam numeri 6.4.3. [d] ideoque commensurabilia erunt. Quare lineę ipsæ A, BC, EF, commensurabiles existent, saltem potentia; Atque adeo, cum A, ponatur Rationalis, erunt quoque Rationales B C, EF, & idcirco & earum dimidiæ Rationales erunt CH, FI.



[b] 13. tertij decimi.
[c] 14. tertij dec.
[d] 6. decimi.

RVRSVS, [a] quia tam quadratum rectæ BC, quadrati rectę BH, quam quadratum rectæ EF, quadrati rectæ EI, sesquitertium est; habebunt tã quadrata rectarum B C, BH, quam quadrata rectarum EF, EI, proportionem inter se, quam numeri 4.3. [b] ideoque tam illa, quam hæc inter se commensurabilia erunt. Quare & tam lineæ ipsæ BC, BH, quam lineæ EF, EI, commensurabiles existent. Est autem & tam CH, ipsi BC, quam FI, ipsi EF, dimidia videlicet toti, commensurabilis. [c] Igitur & tam BH, CH, quam EI, FI, commensurabiles inter se erunt; Ac proinde cum CH, & FI, ostensæ sint Rationales, erunt quoq; BH, EI, Rationales. [d] Quoniã vero tam CH, BH, quam FI, EI, longitudine sunt incommensurabiles, quod earum quadrata non habeant proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; (vt constat ex coroll. propos. 24. lib. 8. Habent enim proportionem, quam 1. ad 3. [e] cum ostensum sit talium partium 1. esse tã CH, quam FI, qualium 3. est tam BH, quam EI,) Erunt tam CH, BH, quam FI, EI, Rationales potentia tantum commensurabiles. [f] Ac proinde tam rectangulum sub CH, BH, Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, quam rectangulum sub FI, EI, Rationalibus potentia tantum commensurabilibus cõtentum, Medium erit: Sunt autem triãgula BCD, EFG, æqualia rectangulis sub CH, BH, & sub FI, EI, ex schol. propos. 41. lib. 1. cum bases triangulorum C D, F G, duplę sint basium rectangulorum CH, FI. Igitur & triangula BCD, EFG, Media erunt. Quocirca cum tota superficies Tetraedri triangulo BCD, sit commensurabilis; (est enim triangulum BCD, totius superficiei quarta pars) Item tota superficies Octaedri triangulo EFG, commensurabilis; (Est enim triangulum E F G, totius superficiei octaua pars.) Erunt quoque, ex coroll. propos. 24. lib. 10. superficies Tetraedri, & Octaedri, Mediæ. Si igitur sphęrę diameter fuerit Rationalis; Erit tam superficies Tetraedri, quã Octaedri in ea sphæra, Media.

Quod erat ostend.

[a] 12. quarti decimi.
[b] 6. decimi.
[c] 12. dec.
[d] 9. decimi.
[e] 12. quarti decimi.
[f] 22. deci.

COROLLARIVM.

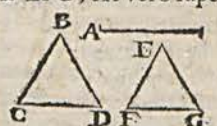
SEQVITVR ex demonstratione huius propositionis, omne triangulum æquilaterum, cuius latus fuerit Rationale, esse superficiem Mediam. Nam ex eo, quod latera BC, EF, & ob id eorum dimidia CH, FI, Rationalia sunt ostensa, demonstratum est, tam rectas CH, BH, quam FI, EI, esse Rationales potentia tantum commensurabiles; Ac propterea rectangula sub CH, BH, & sub FI, EI, hoc est, triangula BCD, EFG, ipsis æqualia, esse Media. Cum igitur eadem sit ratio de omni triangulo æquilatero, cuius vnum latus sit Rationale; perspicuum est, quod infertur.

0. 14.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

SI Tetraedrum, atque Octaedrum eidem sphæræ inscribãtur; erit basis Tetraedri sesquitertia basis Octaedri: Superficies autem Octaedri sesquialtera superficiei Tetraedri.

SIT sphæræ diameter *A*, in qua descripti Tetraedri basis sit triangulũ *BCD*; Octaedri vero basis triangulũ EFG. *Dico* triangulum BCD, sesquitertiũ esse trianguli EFG; At vero superficiem Octaedri esse sesquialterã superficiei Tetraedri. [a] Quoniã n. quadratũ diametri A, sesquialterum est quadrati lateris Tetraedri CD; [b] duplũ vero quadrati lateris Octaedri FG; sit, vt quaduplũ partiũ 6. fuerit quadratũ diametri A, taliũ 4. sit quadratũ lateris CD, & taliũ 3. quadratũ lateris FG. Quare quadratum rectæ CD, sesquitertium est quadrati rectæ FG: Vt autem quadratum rectæ CD, ad quadratum rectæ FG, ita est triãgulum BCD, ad triangulum EFG. ([a] quia tam quadrata, quam triangula proportionem inter se habent laterum CD, FG, duplicatam, cum sint similia.) Igitur & triangulũ BCD, sesquitertium est trianguli EFG.



[a] 13. tertij decimi.
[b] 14. tertij dec.

RVRSVS, quoniam ostensum est triangulum BCD, sesquitertium esse trianguli EFG; Ac propterea qualiũ partium 4. fuerit triangulum BCD, talium 3. esse triangulum EFG; Efficitur, vt triangulum EFG, octies sumptum, hoc est, tota superficies Octaedri, sit earũdem partium 24; At triangulum BCD, quater sumptum, id est, tota superficies Tetraedri, earũdem partium 16. Quam obrem superficies Octaedri sesquialtera est superficiei Tetraedri eiusdem sphęræ. Si igitur Tetraedrum, atque Octaedrum eidem sphæræ inscribantur, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 20. et 19. sexti.

THEOR. 15. PROPOS. 15.

0. 15.

RECTA linea ex angulo quouis Tetraedri in sphæra descripti per centrum sphæræ ducta, cadit in centrum basis oppositæ, estque perpendicularis ad dictam basim.

SIT Tetraedrum ABCD, cõtentum quatuor triangulis æquilateris, & æqualibus *ABC*, DAB, DBC, DCA, in sphæra, cuius centrum E; ducaturque ex angulo D, per E, centrum sphæræ recta DEF, incidens in basim ABC, circulo inscriptam ad punctum F. Dico F, esse centrum basis *ABC*, & DF, perpendicula-

rem

rem esse ad eandem basin. Ductis enim ex E,& F, ad angulos dictæ basis rectis EA, EB, EC; FA, FB, FC; quoniam rectæ EA, EB, EC, ductæ ex cẽtro sphæræ ad eius superficiem æquales sunt; erunt duo latera EA, ED, trianguli EAD, æqualia duobus lateribus EC, ED, trianguli CED; Sunt autem & bases AD, CD, æquales, cum sint latera triangulorum æquilaterorum æqualium. Igitur anguli AED, CED, æquales erũt; Ac proinde & reliqui AEF, CEF, æquales erunt, eo quod tam AED, AEF, quam CED, CEF, duobus rectis æquivalent. Eadem ratione æquales erunt anguli BEF, CEF, si considerentur triangula BED, CED. Quoniam igitur latera EA, EF, triãguli EAF, æqualia sunt lateribus EC, EF, trianguli ECF; & anguli ipsis contenti, ostensi æquales; Erunt bases FA, FC, æquales. Sic quoq; æquales erunt FB, FC, si considerentur triãgula EBF, ECF. Quare cum tres rectæ FA, FB, FC, ex F, in circumferentiam circuli cadentes sint æquales; erit F, centrũ basis ABC, seu circuli eam circumscribentis.

a 8. primi.
b 13. primi
c 4. primi.
d 9. tertij.

QVIA vero ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. huius lib. linea perpendicularis ex E, centro sphęræ ad planum circuli ABC, demissa in centrum circuli cadit; estque recta DE, per centrum ducta, & in centrum circuli F, cadens, perpendicularis sit ad planum circuli, seu basis Tetraedri ABC. Nam si alia duceretur perpendicularis, caderet ea in centrum circuli, per dictum coroll. Quare cum F, quoque sit demonstratum centrum eiusdẽ circuli, haberet vnus idemque circulus duo centra. quod est absurdum. Recta igitur linea ex angulo quouis, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

OCTAEDRVM in sphæra descriptum, diuiditur in duas pyramides æquales, & similes æqualium altitudinum; basis vero vtriusque est quadratũ subduplũ quadrati diametri sphæræ.

SIT Octaedrum ABCDEF, contentum octo triangulis æquilateris & æqualibus EAD, EAB, EBC, ECD, FEC, FBA, FAD, FDC, & in sphæra descriptum, cuius centrum G. Dico ipsum diuidi in duas pyramides æquales & similes æqualium altitudinum, quarum basis communis est quadratum subduplũ quadrati diametri sphæræ. Ductis enim ex G, centro sphæræ ad omnes angulos rectis lineis GA, GB, GC, GD, GE, GF, q̃ æquales sunt, cum sint semidiametri sphærę, ductæ videlicet e cẽtro ad superficiẽ sphęrę: qm̃ quadratum diametri sphęrę duplum est quadrati lateris Octaedri AB; & quadruplum quadrati semidiametri, AG. ex scholio propos. 4. lib. 2. Qualium par tium 4. ponetur quadratum diametri sphęræ talium partium 2. erit quadratum rectæ AB, & talium partium 1. quadratum rectæ AG; Ac proinde quadratũ rectę AB, duplum erit quadrati rectæ AG. Cũ ergo quadratum rectæ AG, æquale sit quadrato rectæ BG; erit quadratum rectæ AB, æquale duobus quadratis rectarum AG, BG; Ac propterea angulus AGB, rectus erit. Non aliter ostendentur reliqui anguli AGD, BGC, CGB, recti. Quam ob rem AG, CG, & BG, DG, in rectũ erunt cõiunctæ; atque adeo rectæ AC, BD, se se secantes in G, in vno existẽt plano; Ac propterea rectæ earũ extrema cõnectentes AB, BC, CD, DA, in eodẽ plano erunt cũ ipsis. Quare quadrilaterum ABCD, in vno plano est situm. Diuisum est ergo Octaedrũ in duas pyramides ABCDE, ABCDF, quarum basis communis ABCD, vertices vero E, & F; quæ pyramides æquales sunt & similes ex defin. 10. lib. 11. cũ quælibet constet ex quatuor triãgulis æquilateris octaedri, quæ æqualia sũt & similia, & basi cõmuni ABCD. Dico iam earum altitudines esse æquales, & basin ABCD, esse quadratũ subduplum

a 14. tertij. dec.
b 48. primi
c 14. primi.
d 2. vndec.
e 7. vndec.

duplũ quadrati diametri ſphæræ. Quoniam.n. oſtenſum eſt, quadratum lateris Octaedri AB, æquale eſſe duobus quadratis ſemidiametrorum AG, BG; erit quoque quadratum lateris AE, æquale duobus quadratis ſemidiametrorum AG, EG; [a] Ac propterea angulus A G E, rectus erit. Eadem ratione rectus erit angulus DGE. Quoniam igitur recta EG, duobus rectis AG, DG, ſe mutuo ſecantibus in G, ad rectos angulos inſiſtit, [b] ipſa recta erit ad planum A B C D, per rectas AG, DG, ductum, nempe ad baſin pyramidum. Quare E G, altitudo eſt pyramidis ABCDE. Similiter oſtendemus FG, altitudinem eſſe pyramidis ABCDF. Cum ergo EG, FG, ſint ſemidiametri ſphæræ æquales, perſpicuum eſt, dictas pyramides eſſe æqualium altitudinum. Rurſus quia AC, eſt diameter ſphæræ; [c] erit eius quadratum duplum quadrati lateris AD. Ac propterea æquale duobus quadratis laterũ AD, DC. [d] Quare angulus ADC, rectus eſt: Eodem modo recti erunt anguli DAB, ABC, BCD. Quare quadrilaterum ABCD, rectangulum eſt: Sed & æquilaterum, cum eius latera ſint latera Octaedri. Igitur quadratum eſt; quod cum ſit deſcriptum ex latere octaedri AB; [e] conſtat ipſum eſſe ſubduplum quadrati diametri ſphæræ. Octaedrum ergo in ſphæra deſcriptum, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] 48. primi

[b] 4. undec.

[c] 14. tertij dec.

[d] 48. primi

[e] 12. tertij dec.

SCHOLIVM.

MVLTO breuius hanc propoſitionẽ demonſtrauimus in coroll. 2. propoſ. 14. lib. 13. ex ipſa videlicet conſtructione octaedri. Veruntamen quia hic demonſtratur a Campano, non habita ratione conſtructionis octaedri, viſum eſt eius demonſtrationem hoc etiam loco conſcribere.

THEOR. 17. PROPOS. 17.

0. 17.

TETRAEDRVM ſphæræ impoſitum ad Octaedrum in eadẽ ſphæra deſcriptum ſe habet, vt rectangulum ſub linea potente vigintiſeptem ſexageſimasquartas partes quadrati lateris Tetraedri, & ſub linea continente octo nonas partes eiuſdem lateris, comprehenſum ad quadratum diametri ſphæræ.

VEL, vt Campanus loquitur.

TETRAEDRVM ſphæræ impoſitum ad octaedrum in eadẽ ſphæra deſcriptum ſe habet, vt rectangulum ſub linea, quę potentia eſt ſubſeſquitertia trium quartarum partium lateris tetraedri, & ſub linea ſuperquintupartiente vigeſimas ſeptimas partes earũdem triũ quartarum partium lateris tetraedri contentum, ad quadratum diametri ſphærę.

SIT Tetraedrum ABCD, & octaedrum EFGHIK, in vna eademque ſphæra, cuius centrum L. Ducatur ex angulo D, per centrum L, diameter ſphæræ D M, incidens in baſin A B C, ad punctum N. [a] Erit igitur N, centrum baſis ABC, & DN, perpendicularis ad eandem baſin. Quia vero pars diametri LN, inter centrum ſphæræ & baſin tetraedri, eſt ſexta pars diametri, & tertia ſemidiametri, per coroll. 2. propoſ. 13. lib. 13. Erit DL, ſemidiameter talium partium 3. qualium 1. eſt L N; Ac propterea D N, talium 4. Ducatur deinde, ex ſcholio propoſ. 15. lib. 11. per centrum L, planum OPQ, paralle-

lum

[a] 15. quartidecimi

lũ plano ABC; Eruntq; rectæ QO, OP, PQ, parallelæ rectis AB, BC, CA; Ac ppea triangulum QOP, æquiangulum erit triangulo æquilatero ABC, cum anguli illius æquales sint angulis huius, singuli singulis: At ABC, est æquiangulum ex coroll. propos. 5. lib. 1. Igitur & QOP, æquiangulũ erit; Ac propterea & æquilaterum, ex coroll. propos. 6. lib. 1. ideoque simile ipsi ABC: Sũt autem & triangula DQO, DOP, DQP, triangulis DAB, DBC, DAC, æquilateris similia, ex coroll. propos. 4. lib. 6. Igitur pyramides ABCD, QOPD, similes sunt ex defin. 9. lib. 11. Rursus quia plana parallela ABC, QOP, secant rectas DN, DL, proportionaliter; erit vt DN, ad DL, ita DC, ad DP: Erat autem DN, ad DL, vt 4. ad 3. (cum ostensum sit DN, esse talium partium 4. qualium 3. est DL.) Igitur & DC, ad DP, erit vt 4. ad 3. Ac proinde, cum pyramides similes habeant proportionem laterum triplicatam, erit pyramis ABCD, ad pyramidem QOPD, vt 64. ad 27. hęc enim proportio triplicata est proportionis 4 ad 3: vt cõstat in his numeris 64. 48. 36. 27. Nam hi numeri sunt minimi in proportione 4, ad 3. vt constat ex ppos. 2. lib. 8. Rursus quia quadrata habent laterum proportionem duplicatam; erit quadratum rectæ DC, ad quadratum rectæ DP, vt 64. ad 36. vt in iisdem numeris constat.

SIT iam triangulum æquilaterum RST, æquale triangulo DQP; demittaturq; ex R. ad ST, perpendicularis RV. Eritque latus RT, hoc est, DP, illi æquale, potentia sesquitertium perpendicularis RV. Ac proinde qualium partium 36. fuit quadratum rectę DP, taliũ 27. erit quadratum rectæ RV: Erat autem earũdem partium 64. quadratum rectæ DC. Igitur linea RV, est potens vigintiseptẽ sexagesimasquartas partes quadrati lateris tetraedri

RVRSVS extensa TS, fiat TX, ad TS, vt 64. ad 27. ex coroll. propos. 6. lib. 10. diuidaturq; TX, bifariam in Y, vt

a 16. vnde.

b 10. vnde.

c 17. vnde.

d 8. vnde.

e 20. sexti.

f 12. quarti dec.

Y, vt sit TY, talium partium 32. qualium 27. est TS, seu illi æqualis DP. Quoniam vero proportio DC, ad DP, erat, vt 4. ad 3. nempe sesquitertia, erit DC, talium partium 36. qualium DP, est 27. (proportio enim 36. ad 27. est sesquitertia.) Ac propterea qualium partium TY, est 32. Quare linea TY, cõtinet octo nonas partes lateris tetraedri DC. Dico igitur ita esse tetraedrum ABCD, ad octaedrũ EFGHIK, vt rectãgulum cõtentum sub recta RV, (q̃ põt vigintiseptẽ sexagesimasquartas partes quadrati lateris DC.) & sub recta TY, (q̃ cõtinet octo nonas partes eiusdẽ lateris) ad quadratum diametri sphæræ.

CVM enim ductis rectis RX, RY, triãgulum RTX, duplum sit triãguli RTY, quod & basis TX, dupla sit basis TY: Est autem & rectangulum sub RV, TY, duplum eiusdem trianguli RTY; Erit triangulum RTX, æquale rectangulo sub RV, TY. Ac propterea erit vt triangulum RTX, ad triangulum RST, ita rectangulum sub RV, TY, ad idẽ triangulum RST: Est autẽ triangulum RTX, ad triangulum RST, vt basis TX, ad basin ST, nimirum vt 64. ad 27. Igitur & rectangulum sub RV, TY, ad triangulum RST, hoc est, ad triangulum DQP, siue QOP, sibi æquale; erit vt 64. ad 27. Fuit autẽ & pyramis ABCD, ad pyramidẽ QOPD, vt 64. ad 27. Erit ergo vt rectãgulum sub RV, TY, ad triangulum QOP, ita pyramis ABCD, ad pyramidẽ QOPD: At vero vt triangulũ QOP, ad quadratum diametri sphæræ DM, ita est pyramis QOPD, ad octaedrum EFGHIK. (Nã cum DN, recta sit ad planum ABC, recta quoq; erit ad planũ QOP, ex scholio prop. 14. lib. 11. ideoq; sphæræ semidiameter DL, altitudo erit pyramidis seu tetraedri QOPD: Octaedrum autẽ EFGHIK, diuiditur in duas pyramides æquales EFGHI, EFGHK, quarũ basis cõis quadratum EFGH, dimidiũ quadrati diametri sphęrę; & altitudines æquales semidiametri sphæræ LI, LK. Pyramides ergo QOPD, EFGHI, æquales habent altitudines. Quare ex sch. pp. 5. lib. 12. erit vt basis QOP, ad basin EFGH, ita pyramis QOPD, ad pyramidẽ EFGHI; Ac propterea per ea, quæ in scholio propos. 22. lib. 5. ostendimus, vt basis QOP, ad duplum basis EFGH, hoc est, ad quadratũ diametri

a 1. sexti

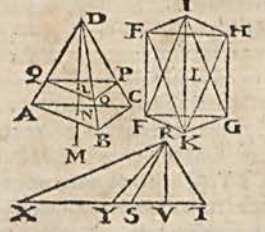
b 41. primi

c 7. quinti

d 1. sexti

e 16. quarti decimi.

metri sphæræ DM, ita pyramis QOPD, ad duplum pyramidis EFGHI, hoc est, ad Octaedrũ EFGHIK.) Ex æquo igitur erit, vt rectangulum sub RV, potente viginti septem sexagesimas quartas partes quadrati lateris tetraedri DC & sub TY, octo nonis eiusdem lateris DC, contentum ad quadratum dictæ metri sphæræ DM, ita pyramis, seu tetraedrum ABCD, ad octaedrũ EFGHIK. Tetraedrum ergo sphæræ impositũ ad Octaedrum, &c. Quod erat demonstrandum.



SCHOLIVM.

QVONIAM vero DC, talium partium 4. fuit, qualium 3. DP; continebit DP, seu illi æqualis RT, tres quartas partes lateris tetraedri DC: *ac proinde,* [a] *cum recta RT, sit potentia sesquitertia rectæ RV; erit RV, potentia subsesquitertia ipsius RT, nempe trium quartarum partium lateris tetraedri. Rursus quia TY, sunt talium partium 32. qualium 27. ST, seu DP; (tres videlicet quartæ partes lateris tetraedri.) erit TY, superquintupartiens vigesimas septimas partes ipsius ST, nimirum trium quartarum partium lateris tetraedri. Quare cõstat, esse quoque tetraedrum ABCD, ad octaedrum EFGHIK, vt rectangulum sub RV, quæ potentia subsesquitertia est trium quartarum partium lateris tetraedri, & sub TY, quæ superquintupartiens est vigesimas septimas partes earundem trium quartarum partium lateris tetraedri, vt volebat Campanus.*

[a] 12. quartidecimi

0. 17. THEOR. 18. PROPOS. 18.

LINEA perpendicularis ex quolibet angulo trianguli æquilateri ad basin oppo

positam demissa; tripla est eius perpendicularis, quæ ex centro triãguli ad eandem basin deducitur.

SIT triangulum æquilaterum *ABC*, cuius centrum *D*. Ducatur ex *A*, per *D*, recta *AE*, quæ perpendicularis erit ad *BC*, eamq; bifariam diuidet, ex coroll. 2. propos. 10. lib. 13. Dico *AE*, triplam esse rectæ *DE*, quæ scilicet perpendicularis est e centro ad basin ducta. Ductis enim rectis *BD*, *CD*, cum latera *DA*, *DB*, trianguli *ADB*, æqualia sint lateribus *DB*, *DC*, trianguli *BDC*; (e centro enim ducuntur;) sit autem & basis *AB*, basi *BC*, æqualis: Erunt triangula *ABD*, *BDC*, æqualia ex coroll. propos. 8. lib. 1. Atque eadem ratione æqualia erunt triangula *ADB*, *ADC*. Quare ob æqualitatem trium triangulorum *ADB*, *BDC*, *CDA*, trianguli *ABC*, triplum est trianguli *BDC*. Quoniam vero rectangulum sub *AE*, *EB*, triangulo *ABC*; & rectangulum sub *DE*, *EB*, triangulo *BDC*, æquale est, ex scholio propos. 41. lib. 1. cum basis trianguli *BC*, dupla sit basis *BE*, vtriusque rectanguli: Erit quoque rectangulum sub *AE*, *EB*, triplum rectanguli sub *DE*, *EB*: [a] Est autem vt rectangulum sub *AE*, *EB*, ad rectangulum sub *DE*, *EB*, eiusdẽ altitudinis *EB*, ita basis *AE*, ad basin *DE*. Igitur & *AE*, tripla est ipsius *DE*. Linea ergo perpendicularis ex quolibet angulo, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 1. sexti

COROLLARIVM.

ITAQVE eadem perpendicularis AE, sesquialtera est reliquæ rectæ AD, inter angulum & centrum comprehensæ. Cum enim AE, tripla sit ipsius DE, qualium partium 3. ponetur AE, talium 1. erit DE; Reliqua igitur AD, earundẽ partiũ 2. continebit: Ac propterea AE, sesquialtera erit ipsius AD.

EX quibus rursus fit, rectam AD, rectæ DE, duplam esse.

THEOR. 19. PROPOS. 19.

0. 17.

SI octaedrum sphæræ inscribatur; erit semidiameter sphęrę potentia tripla eius perpendicularis, quę ex centro sphærę in basin quamcunque octaedri ducitur.

SIT basis aliqua octaedri in sphera, cuius centrum D, descripti, triangulum æquilaterum ABC, in quod e centro sphęræ *D*, perpendicularis demittatur DE; ducaturque semidiameter sphæræ *DB*. Dico semidiametrum DB, potentia triplam esse perpendicularis DE. Cum enim ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. huius lib. perpēdicularis DE, in centrum circuli sphæræ, qui triangulum *ABC*, circumscribit, cadat, erit E, centrum trianguli. Ducta igitur recta BE; [a] quoniam quadratum diametri sphæræ duplum est quadrati lateris octaedri AB; & quadruplum quadrati semidiametri sphærę DB, ex scholio propos. 4. lib. 2. Si ponatur quadratum diametri partiū 12. erit quadratum lateris *AB*, 6. & quadratum semidiametri sphæræ *DB*, 3. [b] Quia vero quadratum lateris AB, triplum est quadrati semidiametri circuli triangulum ambientis, rectæ scilicet BE; Erit quadratum rectæ BE, talium partium 2. qualium 6. fuit quadratum lateris *AB*. Quare [c] cum quadratū rectæ *DB*, æquale sit quadratis rectarum BE, DE; sit autem quadratum rectæ *DB*, ostensum partium 3. Erit reliquum quadratum perpendicularis DE, talium partium 1. Ac proinde quadratum rectæ DB, triplum est quadrati rectæ DE. Si igitur octaedrum sphærę inscribatur, &c.

[a] *14. tertij dec.*

[b] *12. tertij dec.*

[c] *47. primi.*

THEOR.

THEOR. 20. PROPOS. 20.

0. 18.

DVPLVM quadrati ex diametro cuiuslibet sphęrę descripti, æquale est superficiei cubi in illa sphęra collocati: Perpendicularis autem a centro sphæræ in aliquam basin cubi demissa, ęqualis est dimidio lateris cubi.

SIT cubus ABCDEFGH, in sphæra descriptus, cuius centrum I, ex quo *IK*, perpendicularis ducatur ad vnam basin cubi, nempe ad ADEF. Dico duplum quadrati diametri sphæræ æquale esse superficiei cubi; & perpendicularem *IK*, æqualem esse dimidio lateris cubi. Cum enim quadratum diametri sphæræ triplum sit quadrati lateris cubi, hoc est, æquale tribus quadratis cubi; Erit duplum eiusdem quadrati ex diametro sphæræ descripti æquale sex quadratis cubi, id est, toti superficiei cubi.

[a] *15. tertij dec.*

PRODVCTA autem *KI*, ad basin oppositam BCHG, vsque in punctum *L*; cum *KL*, recta sit ad planum AE, recta quoque erit ad planum BH, illi parallelum, per scholium propos. 14. lib. 11. Rursus, [b] quia AB, *KL*, parallelæ sunt, quod rectæ sint ad planum AE; ducatur per ipsas planum faciens in planis oppositis parallelis AE, BH, communes sectiones, lineas rectas *AK*, BL, [c] quæ parallelæ quoque erunt inter se; *Ac* propterea parallelogrammum erit ABL*K*; atque adeo recta *KL*, æqualis lateri cubi AB. Quoniā vero perpendicularis *KL*, e cētro sphęræ *I*, cadit in bases AE, BH, ad pūcta *K*, & L, erūt *K*, & L, cētra circulorū dictas bases ambientiū in sphæra, per coroll. lēmatis 1. prop. 10. huius lib. Quare *KL*, in centro I, bifariā secabitur a dicta diametro CF, vt in coroll. 1. propos. 15. lib. 13, ostendimus; Ac propterea

[b] *6. vndec.*

[c] *16. vnde.*

cum KL, ostensa sit æqualis lateri cubi, erit IK, dimidium eiusdem lateris cubi. Duplum igitur quadrati ex diametro cuiuslibet sphæræ descripti, &c. Quod ostendendum erat.

COROLLARIVM.

EX dictis colligitur, solidum, quod fit ex dimidio lateris cubi in duas tertias partes quadrati diametri sphæræ dictum cubum comprehendentis, æquale esse cubo. [a] *Cum enim quadratum diametri sphæræ triplum sit quadrati lateris cubi, erunt duo quadrata AE, BH, duæ tertiæ partes quadrati diametri sphæræ;* [b] *Perspicuum autem est, solidum, quod fit ex IK, dimidio lateris cubi in AE, tertiam partem quadrati diametri sphæræ, æquale esse solido, quod fit ex IL, dimidio lateris cubi in BH, tertiæ partē quadrati diametri sphæræ, eo quod dicta solida habeāt et bases, et altitudines æquales. Itaq; cū dicta duo solida cōpleant totum cubum, manifestum est, id, quod fit ex dimidio lateris cubi, in duas tertias partes quadrati diametri sphæræ, æquale esse toti cubo. Quod est propositum.*

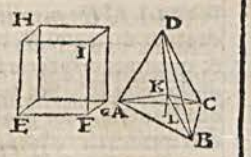
ALITER proponi potest hoc corollarium, ut dicamus, solidum, quod fit ex latere cubi in tertiam partem quadrati diametri sphæræ, æquale esse cubo. Nam cubus BE, producitur ex BA, latere cubi in quadratum AE, quod est tertia pars quadrati diametri sphæræ: Vt perspicuum est.

a 15. tertij dec.

b 31. vnde.

SCHOLIVM.

VNIVERSE autem solidum, quod fit ex perpendiculari e centro cuiuscunque corporis regularis ad aliquam eius basim ducta in tertiā partē superficiei ipsius corporis, æquale est proposito corpori regulari. Sit .n. corpus regulare quodcunque ABCD, contentum planis ABC, ABD, ACD, BCD, solidum autem EFGH, contentum sub EI, tertia parte superficiei corporis ABCD, & sub altitudine FG, quæ æqualis sit perpendiculari KL, ducta ex centro K, ad basin ABC. Dico solidū EFGH, æquale esse dato corpori regulari ABCD. Nā ductis



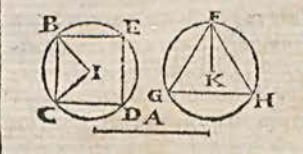
ex centro K, rectis KA, KB, KC, KD, ad omnes angulos corporis, resoluetur corpus regulare in pyramides æquales, cum æquales habeant bases & altitudines. Cum enim circuli dictas bases ambientes, æquales sint; ipsi æqualiter a centro distabunt, per lemma 2. propos. 10. huius lib. Ac propterea perpēdiculares ex K, centro ad ipsorum plana ductæ, nempe altitudines pyramidum, æquales erunt. Quoniam vero prisma contentum sub basi ABC, & altitudine KL, triplū est pyramidis ABCK, per coroll. 1. propos. 7. lib. 12. Atque eadem ratione prismata contenta sub reliquis basibus, & eadem altitudine KL, tripla sunt suarum pyramidum; Erit prisma contentum sub tota superficie corporis regularis, & altitudine KL, (nimirum compositum ex omnibus illis prismatis) triplum corporis regularis ABCD. Quam ob rem cum idem prisma triplum sit prismatis EFGH, quod & illius basis tripla ponatur basi huius, per ea, quæ ad propos. 7. lib. 12. demonstrauimus, erunt solida EFGH, ABCD, æqualia. Quod est propositum.

THEOR. 21. PROPOS. 21. 0. 11.

IDEM circulus comprehendit & cubi quadratum, & octaedri triangulum, eiusdem sphæræ.

IN sphæra, cuius diameter A, intelligatur descriptus cubus, cuius vnum quadratum ECDE, & octaedrum, cuius vnum triangulum FGH. Dico eūdem circulum circum-

cumscribere & quadratum BCDE, & triangulũ FGH, hoc est, circulos BCDE, FGH, ipsa circumscribentes, æ se æquales. Sint. n. rectæ e cẽtris IB, KF. [a] Quia igitur quadratum diametri A, triplũ est quadrati lateris cubi BC, & quadratum lateris BC, duplũ quadrati rectæ BI; (Nã ducta recta IC, fiet angulus BIC, rectus, cum subtendat quadrantem;) [b] Ac proinde quadratum rectę BC, æquale erit quadratis rectarum BI, IC. Quare cum rectarum æqualium BI, IC, æqualia sint quadrata: duplum erit quadratum rectæ BC, quadrati rectę BI. (qualiũ partium 6. ponetur quadratũ diametri A, talium 2. erit quadratum lateris BC, & talium 1. quadratũ rectæ BI. Rursus [c] quia quadratum diametri A, duplũ est quadrati lateris octaedri FG, [d] & quadratum lateris FG, triplum quadrati rectę FK, ex cẽtro ductę; qualiũ partium 6. ponetur quadratũ diametri A, talium 3. erit quadratum lateris FG, & taliũ 1. quadratum rectę FK. Cum igitur & talium partium ostensum sit quadratum rectę BI; æqualia erunt quadrata rectarum BI, FK; Ac propterea & rectæ ipsę, & circuli ex ipsis descripti BCDE, FGH, æquales erunt. Idem ergo circulus comprehendit, &c. Quod erat ostendendum.



[a] 15. tertij decimi.

[b] 47. primi.

[c] 14. tertij dec.

[d] 12. tertij dec.

COROLLARIVM.

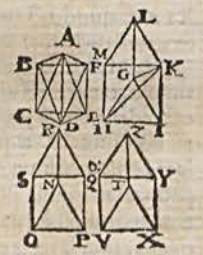
HINC fit lineas perpendiculares coniungentes centra circulorũ, qui bases oppositas tam cubi, quam octaedri circumscribunt, æquales esse. Si enim ex centro sphæræ ad bases cubi & octaedri perpendiculares ducantur, cadent hæ in centra circulorũ ipsas circumscribẽtiũ, ex coroll. lẽmatis 1. prop. 10. huius lib. & cum sint æquales ostensi, æquilater distabunt a centro sphæræ, ex lemmate 2. eiusdem propos. Ac proinde æquales erunt dictæ perpendiculares. Quæ cum sint dimidiatæ partes rectarum, quæ centra oppositarum basium connectunt. (Nam si producantur, perpendiculares quoque erunt ad oppositas bases, ex scholio propos. 14. lib. 11. propterea quod parallelæ sunt oppositæ bases in octaedro, ex coroll. 4. propos. 14. lib. 13. quemadmodũ & oppositæ bases cubi parallelæ sunt.) æquales erunt perpendiculares centra oppositarum basium coniungentes tam in cubo, quam in octaedro. Quod est propositum.

[e] 21. quarti dec.

THEOR. 22. PROPOS. 22.

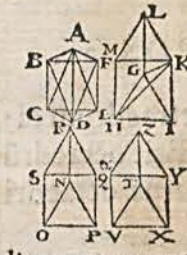
SI octaedrum, atque tetraedrum eidem sphærę inscribantur; Erit octaedrũ ad triplum tetraedri, vt latus octaedri ad latus tetraedri.

IN eadem sphæra inscriptum sit & octaedrum ABCDEF, & tetraedrum GHIK. Dico ita esse octaedrum ad triplum tetraedri, vt latus BF, ad latus HI. Ducta enim in octaedro diametro AD, diuidetur octaedrum in quatuor pyramides, quarum latus cõmune est ipsa diameter AD, & vertex cõmunis A, nẽpe in BCDA, cuius basis BCD; in BDFA, cuius basis BDF; in CDEA, cuius basis CDE; & in DEFA, cuius basis DEF; quæ quidem omnes bases infra quadratum BCEF, existunt cõtinentes cum ipso dimidiatam partem octaedri. Quoniã vero quælibet harum pyramidũ constat duobus triangulis æquilateris octaedri, & duobus alijs triangulis, quæ quoniam latus ipsorũ cõe est AD, diameter, & reliqua latera, ipsius octaedri latera existũt, [a] inter se æqualia sunt, efficitur has quatuor pyramides æquales esse inter se, cum cõtineãtur planis & multitudine, & magnitudine æqualibus Cõstitua-



[a] 8. primi.

tur super GHI, basin tetraedri, prisma GHIKLM, eiusdem cum tetraedro altitudinis; quod ipsius tetraedi triplum erit, per coroll. 1. propos. 7. lib. 12. Rursus, super basin octaedri NOP, & TVX, basi tetraedri æqualem, constituantur duo prismata NOPQRS, TVXYZα, eiusdem cum octaedro, seu pyramide ACDE, altitudinis. [a] Quia igitur GHI, hoc est, TVX, basis tetraedri sesquitertia est ipsius NOP, basis octaedri: Erit quoque prisma TVXYZα, prismatis NOPQRS, sesquitertium, cum prismata eiusdem altitudinis sint, vt bases, ex iis, quę ad propos. 7. lib. 12. demonstrauimus. Est autem & octaedrum ABCDEF, eiusmodi prismatis NOPQRS, sesquitertium; (Nam prisma æquale est tribus pyramidibus ex coroll. 1. prop. 7. lib. 12. quarum quatuor continere diximus octaedrũ.) Igitur æquale est octaedrum prismati TVXYZα. Quia vero prisma TVXYZα, ad prisma GHIKLM, proportionem habet, quam altitudo illius ad altitudinem huius, ex schol. propos. 14. lib. 12. Est autem altitudo prismatis TVXYZα, quod octaedro æquale est, eadem quę octaedri, ex constructione: Erit quoque octaedrũ ad prisma GHIKLM, hoc est, ad triplum tetraedri GHIK, vt altitudo octaedri ad altitudinẽ tetraedri: Est autẽ altitudo octaedri, nempe perpendicularis centra basium oppositarũ coniungens, æqualis lateri cubi, nimirum perpẽdiculari centra basium oppositarum connectenti, per coroll. propos. 21. huius lib. Atq; vt latus cubi ad altitudinẽ tetraedri, ita est latus octaedri ad latus tetraedri. (Nã ratio quadratum lateris cubi ad quadratum altitudinis tetraedri, quã quadratum lateris octaedri ad quadratum lateris tetraedri, est, vt 3. ad 4. Posito. n. quadrato diametri sphærę 9. erit quadratum lateris cubi 3. ex prop. 15. lib. 13. & quadratũ altitudinis tetraedri 4. ex coroll. 2. pp. 13. lib. 13. ideoq; quadratum lateris cubi ad quadratũ altitudinis tetraedri, est vt 3. ad 4. Rursus posito quadrato diametri sphærę 6. [b] erit quadratum lateris octaedri &



[a] 14. quartidecimi

[b] 18. tertijdec.

& quadratum lateris tetraedri 4. &c.) Est igitur octaedrum ad triplum Tetraedri, vt latus octaedri ad latus Tetraedri. Si itaque octaedrum, atque Tetraedrum eidem sphæræ inscribantur, &c. quod demonstrandũ erat.

COROLLARIVM.

EX dictis infertur, ita esse altitudinem octaedri ad altitudinem tetraedri, vt latus octaedri ad latus tetraedri. Ostensum enim est, ita esse latus cubi, quod quidem æquale est altitudini octaedri, ad altitudinem tetraedri, vt latus octaedri ad latus tetraedri. Item colligitur, ita esse diametrum sphæræ ad latus tetraedri, vt latus octaedri ad latus cubi. [a] *Nam & quadratum diametri ad quadratũ lateris Tetraedri, & quadratum lateris octaedri ad quadratum lateris cubi, proportionem habet sesquialterum.*

[a] 18. tertijdec.

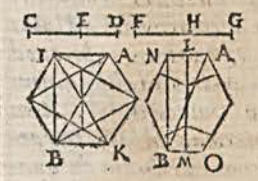
THEOR. 23. PROPOS. 23.

SI recta linea proposita potuerit totam aliquam lineam sectam extrema ac media ratione, & maius eius segmentum; Item totam aliam similiter sectam & minus eius segmentum: Erit maius segmentum prioris lineæ latus Icosaedri; minus autem segmentum posterioris lineæ latus Dodecaedri eius sphæræ, cuius recta linea proposita diameter existit.

POSSIT recta AB, rectam CD, & eius segmentum maius CE; Item rectam FG, & eius segmentum minus HG. Dico CE, esse latus Icosaedri, & HG, latus Dodecaedri, eius sphæræ, cuius AB, diameter existit. Intelligatur enim in sphæra, cuius diameter AB, descriptum Icosaedrum AIBK, & Dodecaedrum ANBO. Latera deinde

de Icosaedri opposita AI, B K, connectantur recta I B, quæ subtendet unum angulum pentagoni ex Icosaedri lateribus cõpositi, vt constat ex propos. 16. lib. 13. quod etiam videre licet in aliquo Icosaedro materiali. Quia vero AI, BK, latera opposita parallela sunt, per coroll. 3. propos. 16. lib. 13. [a] erunt anguli AIB, IBK, æquales

[a] 29. primi.



duobus rectis; Ac proinde, cũ sint inter se æquales, (Ducta enim alia diametro I K; cum latera AI, IB, trianguli AIB, æqualia sint lateribus K B, BI; & bases quoque AB, IK, æquales;) [b] Erunt anguli AIB, I B K, æquales) recti erunt; [c] ideoque quadratum rectæ propositæ A B, æquale erit quadratis rectarum AI, IB: Erat autem idem quadratum rectę AB, æquale, ex hypothesi, quadratis rectarum CD, CE: Igitur quadrata rectarum IB, IA, æqualia sunt quadratis rectarum CD, CE; Ac propterea cum CE, sit maius segmentum ipsius C D, diuisæ extrema ac media ratione; Item IA, maius segmentum ipsius I B, similiter diuisæ; (Nam IB, subtendit angulum pentagoni, cuius latus est IA, latus Icosadri. Constat autem, rectæ subtendentis angulum pentagoni, si secetur extrema ac media ratione, [d] maius segmentum esse æquale lateri eiusdem pentagoni) æquale erit CE, maius segmentum ipsi IA, lateri Icosaedri. [e] Cum enim sit vt C D, ad C E, ita IB, ad IA; [f] erit quoque vt quadratum rectæ CD, ad quadratum rectę CE, ita quadratum rectæ IB, ad quadratum rectæ IA; Ac componendo, vt quadrata rectarum CD, CE, ad quadratum rectæ CE, ita quadrata rectarum IB, IA, ad quadratum rectæ I A: Ostensa sunt autem quadrata rectarum CD, CE, æqualia quadrata rectarum IB, IA; [g] Igitur & quadrato rectæ CE, æquale est quadratum rectæ IA; ideoque rectæ CE, IA, æquales sunt. Quod est propositum.

[b] 8. primi.

[c] 47. primi

[d] 8. tertij dec.

[e] 2. quarti dec.

[f] 22. sexti.

[g] 14. quinti

RVRSVS latera Dodecaedri opposita AN. B O, secẽtur bifariã in L, & M, punctis, quæ recta LM, & ipsa latera recta NB, coniungantur. Quoniam igitur NL, BM, æquales,

æquales, parallelę sunt, per coroll. 3. propos. 17. lib. 13. [a] erunt quoque LM, NB, æquales & parallelæ: Est autem recta LM, secans latera opposita bifariam, perpendicularis ad ipsa latera opposita, per idem coroll. Igitur & NB, ad eadem perpendicularis erit, [b] Ac proinde quadratum rectæ propositæ A B, æquale erit quadratis rectarum N B, N A. Quare cum idem quadratum rectæ AB, æquale sit positum quadratis rectarum F G, HG; æqualia erunt quadrata rectarum NB, NA, quadratis rectarum FG, HG. Ac propterea, cum HG, sit minus segmentum ipsius F G, sectæ extrema ac media ratione: Item NA, minus segmentum ipsius NB, hoc est, ipsius LM, similiter diuisę, per coroll. 4. propos. 17. lib. 13. æquale erit HG, minus segmentũ ipsi NA, lateri Dodecaedri. Quod quidem non aliter ostendemus, ac supra demonstrauimus CE, maius segmẽtum æquale esse ipsi IA, lateri Icosaedri. Si recta ergo linea propositа potuerit totam aliquam lineam sectam extrema ac media ratione, & maius eius segmentum; Item totam aliam similiter sectam, & minus eius segmentum: Erit maius segmentum prioris lineæ latus Icosaedri; minus autem segmentum posterioris, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 33. primi

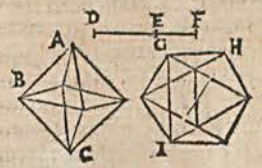
[b] 47. primi

THEOR. 24. PROPOS. 24.

SI latus octaedri potuerit maius & minus segmentum rectæ lineæ extrema ac media ratione sectæ: Poterit latus Icosaedri in eadem sphęra descripti duplum minoris segmenti.

POSSIT latus AB, octaedri ABC, & maius segmentum DE, & minus EF, rectę DF, sectę extrema ac media ratione. Sit quoq; eidem sphęrę inscriptum Icosaedrum GHI, cuius latus GH, & subtendens angulũ pẽtagoni ex lateribus Icosaedri compositi GI, & diameter HI. Dico quadra-

quadratum lateris G H, duplum esse quadrati minoris segmenti EF. Cum enim GH, sit latus pentagoni, cuius vnum angulum subtendit recta GI; [a] erit GH, maius segmentum ipsius G I, diuisæ extrema ac media ratione; [b] Ac proinde composita recta ex GI, GH, secabitur similiter in G, puncto extrema ac media ratione, [c] Quia vero quadratũ diametri HI, æquale est quadratis rectarũ GI, GH, quod angulus IGH rectus sit, vt in præcedenti propos. ostensum est; & quadratum lateris A B, æquale quadratis rectarum DE, EF, ponitur; Erunt, vt quadratum diametri HI, ad quadratum lateris AB, ita quadrata rectarum GI, GH, ad quadrata rectarũ DE, EF: [d] Est autem quadratum diametri H I, duplum quadrati lateris octaedri A B. Igitur & quadrata rectarum G I, G H, dupla sunt quadratorum rectarũ DE, EF. Atqui vt quadrata rectarum GI, GH, ad quadrata rectarum DE, EF, ita est quadratũ rectę GH, ad quadratum rectę EF. (Nã cũ sit vt GI ad GH, ita DE, ad EF. [f] Erit quoq; vt quadratũ rectæ GI, ad quadratum rectæ GH, ita quadratũ rectæ DE, ad quadratũ rectę EF; & cõponendo, vt quadrata rectarum GI, GH, ad quadratũ rectæ GH, ita quadrata rectarum DE, EF, ad quadratum rectæ EF. Et permutãdo, vt quadrata rectarum G I, G H, ad quadrata rectarum DE, E F, ita quadratum rectæ G H, ad quadratum rectæ EF.) Quadratum igitur rectæ G H, duplum quoque est quadrati rectæ EF. Quare si latus Octaedri potuerit maius, & minus segmentum, &c. Quod erat ostendendum.



[a] 8. tertij de.
[b] 5. tertij decimi.
[c] 47. primi
[d] 14. tertii decimi.
[e] 2 quarti decimi.
[f] 22 sexti.

THEOR. 25. PROPOS. 25.

SI recta linea diuisa extrema ac media ratione cum minore segmento angulum rectum constituat, cui recta subtendatur:

datur: Erit recta linea, quæ potentia sit subdupla ipsius rectæ subtensæ, latus octaedri eius sphæræ, in qua dictum minus segmentum latus existit Dodecaedri.

LINEA recta AB, secta in C, extrema ac media ratione constituat cum recta A D, quæ æqualis sit minori segmento A C, angulum rectum A, cui recta subtendatur BD, sitq; recta E, potentia subdupla ipsius B D. Dico E, latus esse octaedri illius sphæræ, in qua A D, vel A C, latus est Dodecaedri. Cum enim per coroll. 2. propos. 17. lib. 13. maius segmentum BC, latus sit cubi illius sphæræ, cuius minus segmẽtum AC, vel A D, latus est Dodecaedri; erit diameter illius sphęræ potentia tripla maioris segmenti B C, nempe lateris cubi. Sunt autem & quadrata rectarum AB, AD, nempe totius lineæ, & minoris segmenti, tripla eiusdem quadrati maioris segmenti BC. Quadratum igitur diametri sphęræ, æquale erit quadratis rectarũ AB, AD, hoc est, quadrato rectę BD; Ac proinde recta B D, diameter est sphæræ. [b] Quare cum diameter sphæræ potentia sit dupla lateris Octaedri; Posit autem recta B D, duplum rectæ E, quod recta E, ponatur potentia subdupla ipsius BD; Erit E, latus Octaedri eiusdem sphæræ, cuius AD, latus Dodecaedri ponitur. Si igitur recta linea diuisa, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 4 tertii de.
[b] 14. tertij dec.

COROLLARIVM.

[c] QVONIAM vero latus Octaedri E, potentia est sesquialterum lateris cubi B C, cuius maius segmentum est AD, latus Dodecaedri, vt constat ex ijs, quæ ostendimus ad propos. 4. lib. 13. cum B C, sit maius

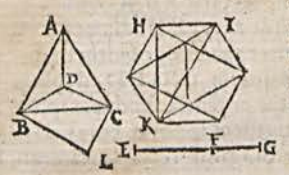
[c] 18. tertij dec.

ius segmentum, & AD, minus rectæ AB, extrema ac media ratione diuisæ: Perspicuum est, si linea quælibet recta (nimirum BC,) secetur extrema ac media ratione, & alia linea (verbi gratia E,) potentia huius sesquialtera sit latus Octaedri, maius segmentum (nimirum AD,) esse latus Dodecaedri eiusdem sphæræ, in qua Octaedrum descriptum fuerit.

THEOR. 26. PROPOS. 26.

SI latus Tetraedri possit maius & minus segmentum lineę rectæ extrema ac media ratione sectę: latus Icosaedri eidem sphęræ inscripti potentia sesquialterum est minoris segmenti.

POSSIT Tetraedri ABCD, latus BC, maius segmentum EF, & minus FG, rectę EG, diuisæ extrema ac media ratione; Sit quoque HI, latus Icosaedri HIK, eiusdem sphęrę. Dico HI, rectã potẽtia esse sesquialteram minoris segmenti FG. Subtendat enim recta HK, vnum angulum pentagoni ex Icosaedri lateribus compositi, connecturque recta IK, diameter



[a] Quia igitur HI, est maius segmentum rectæ HK, diuisę extrema ac media ratione; [b] Erit quoque composita KHI, diuisa eodem modo in H, maiusque segmentum HK, & minus HI. [c] Fiat ex rectis BC, EF, FG, triangulũ BCL, ita vt BL, recta ipsi EF, & CL, ipsi FG, sit æqualis. [d] Eritque angulus L, rectus, quod recta BC, ponatur posse rectas BL, CL, hoc est, rectas EF, FG: Est autem & angulus IHK, rectus, vt propos. 23. huius lib. ostendimus; Estque

[a] 8. tertij dec.
[b] 5. tertij dec.
[c] 22. primi
[d] 48. primi

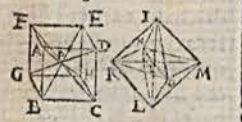
[a] Estque vt BL, ad LC, ita KH, ad HI. [b] Igitur triangula BLC, KHI, æquiangula sunt, [c] Ac propterea vt KI, ad IH, ita BC, ad CL; & permutando, vt KI, ad BC, ita HI, ad CK: [d] Atqui IK, diameter est potentia sesquialtera lateris Tetraedri BC. Ergo & HI, latus Icosaedri erit potentia sesquialterum ipsius CL, hoc est, minoris segmenti FG. Si latus itaque Tetraedri possit maius, & minus segmentum, &c. Quod ostendendum erat.

[a] 2. quarti dec.
[b] 6 sexti.
[c] 4. sexti.
[d] 13. tertij dec.

THEOR. 27. PROPOS. 27.

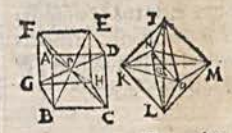
CVBVS ad Octaedrum in eadem cum ipso sphęra descriptum, est, vt superficies cubi ad Octaedri superficiem. Item vt latus cubi ad semidiametrum sphæræ.

SINT in eadem sphæræ cubus ABCDEFGH, & Octaedrum IKLMNO, quorum centra P, & Q. Dico eã esse proportionem cubi ad Octaedrum, quam habet superficies cubi ad superficiem Octaedri; nec nõ, quam habet cubi latus ad semidiametrum sphæræ. Ductis enim ex centris P, & Q, ad omnes angulos tam cubi, quam Octaedri, rectis lineis, resoluetur cubus in sex pyramides æquales, quod habeant & bases æquales, & altitudines, (Cum enim circuli descripti circa pyramides, seu cubi bases æquales, sint æquales, ac propterea æqualiter a centro sphæræ distent; erunt lineæ perpendiculares ex centro P, ad plana circulorum, seu basium dictarum duetæ, nempe altitudines pyramidum, æquales per lemma 2. propos. 10. lib. 14.) Atque Octaedrum in octo pyramides æquales, eandem ob causam. [c] Quoniam autem idem circulus complectitur & cubi quadratum, & Octaedri triãgulum; æqualiter distabũt bases pyramidũ cubi, & Octae-



[c] 21. quartidecimi

& Octaedri a centro sphæræ, per lemma præfatum: Ac propterea æquales erunt altitudines pyramidum cubi, & Octaedri. Quam ob rem erit, vt vna pyramis cubi ad vnam pyramidem Octaedri, ita basis pyramidis cubi ad basim pyramidis Octaedri, ex scholio propos. 6. lib. 12. Ac proinde, ex ijs, quæ in scholio propos. 4. lib. 5. demonstrauimus, vt sextuplum pyramidis cubi, nempe cubus ipse, ad pyramidem Octaedri, ita sextuplum basis pyramidis cubi, superficies videlicet tota cubi, ad basim pyramidis Octaedri; Ideoque rursus, ex eodem scholio, vt cubus ad octuplum pyramidis Octaedri, nimirum ad ipsum Octaedrum, ita superficies cubi ad octuplum basis pyramidis Octaedri, ad ipsam scilicet superficiem Octaedri. Quod primo loco ostendendum proponebatur.

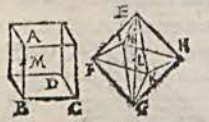


SINT rursus in eadē sphæra cubus ABCD, & Octaedrum EFGHIK, sitque diameter sphæræ, seu Octaedri EG, & centrum L. Auferatur autem ex AB, latere cubi tertia pars AM; Item ex semidiametro EL, tertia pars EN. Quoniam vero quadratum IFKH, lateris Octaedri, basis existens duarum pyramidum, in quas Octaedrū secari diximus propos. 16. huius lib. [a] sesquialterum est quadrati BD, lateris cubi BC: Est autem & recta AB, rectæ BM, sesquialtera, ex constructione; reciprocabuntur bases IFKH, BD, & altitudines AB, BM: [b] Ac propterea parallelepipedum super basim IFKH, & sub altitudine BM, æquale erit parallelepipedo super basim BD, & sub altitudine AB, nimirum cubo ABCD. Rursus quia rectæ EL, rectæ EN, tripla est; erit & parallelepipedum super basim IFKH, & sub altitudine EL, triplum parallelepipedi super eandem basim, & sub altitudine EN, vt in scholio propos. 14. lib. 12. ostendimus: Sed & idem parallelepipedum super basim IFKH, & sub altitudine EL, triplum est pyramidis IFKHE, ex corollario 1. propos. 7. lib. 12. Igitur pyramis IFKHE, æqualis erit parallelepipedo super basim IFKH, & sub altitudine EN: Atqui huius parallelepipedi duplum est parallelepipedum super

[a] 18. tertij decimi.

[b] 34. unde.

super eandem basim, & sub altitudine LN, ex scholio propos. 14. lib. 12. quod & altitudo LN, dupla sit altitudinis EN. Item Octaedrum EFGHIK, duplū est pyramidis IFKHE. Aequale igitur erit parallelepipedum super basim IFKH, & sub altitudine LN, Octaedro EFGHIK. Cæterum quia parallelepipedum super basim IFKH, & sub altitudine BM, est ad parallelepipedū super eandem basim, & sub altitudine LN, vt altitudo BM, ad altitudinem LN, ex scholio propos. 14. lib. 12. Vt autem BM, ad LN, ita est AB, ad EL. (Cum enim sit vt AM, ad MB, ita EN, ad NL; & componendo, vt AB, ad BM, ita EL, ad LN; erit quoque permutando, vt AB, ad EL, ita BM, ad LN.) Et parallelepipedum super basim IFKH, & sub altitudine BM, æquale est ostensum cubo ABCD; Et parallelepipedū super eandem basim, & sub altitudine LN, æquale est Octaedro EFGHIK. Igitur erit quoque vt cubus ABCD, ad Octaedrum EFGHIK, ita AB, latus cubi ad EL, semidiametrum sphæræ. Quod secundo loco demonstrandū proponebatur. Quocirca cubus ad Octaedrum in eadem cum ipso sphæra descriptum, &c. Quod erat ostendendum.

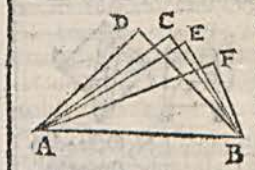


[a] 16. quartidecimi

SCHOLIVM.

QVIA demonstratum est [b], diametrum sphæra, in qua omnia quinque corpora regularia describuntur, esse sesquialterā potentia lateris Tetraedri, ita vt, si quadratū diametri ponatur 3. partium, earūdem 2. sit quadratum lateris Tetraedri; per spicuū est, si ex quadrato diametri data auferatur quadratū duas tertias illius partes continens, vt in scholio propos. 33. lib. 6. ostēdimus, latus huiusce quadrati esse Tetraedri latus. Vel etiam, si quadrato diametri constituantur duo quadrata æqualia, quæ proportionem habeant duplam, ex eodē scholio; maioris quadrati latus esse latus Tetraedri. Nam si ex quadrato diametri 3. partium detrahatur quadratum lateris Tetraedri 2. partium, relinquatur necesse est quadratum 1. tertij, ad quod duplam habet proportionem quadratū lateris

[b] 13. tertij dec.



Tetraedri. Vt si diameter sphæræ ponatur AB, ex cuius quadrato detrahetur quadratum rectæ AC, continens duas tertias partes, quadrati diametri AB; Vel si constituantur duo quadrata rectarum AC, BC, quadrato diametri AB, æqualia, ita vt quadratum rectæ AC, duplum sit quadrati rectæ BC; Erit rectæ AC, latus Tetraedri.

[a] 14. tertij dec.

RVRSVS, cum ostensum sit, diametrum sphæræ potentia duplam esse lateris Octaedri; Fit, si ex quadrato diametri AB, dematur quadratum rectæ AD, quod dimidium sit quadrati diametri AB; Vel si constituantur duo quadrata rectarum AD, BD, quadrato diametri AB, æqualia, & inter se proportionem habentia æqualitatis, secundum doctrinam scholij propos. 33. lib. 6. rectam AD, latus esse Octaedri.

[b] 15. tertij decimi.

DEINDE, quoniam docuimus, diametrum sphæræ potentia esse triplam lateris cubi; Efficitur, si ex quadrato diametri AB, auferatur quadratum rectæ BC, quod tertia pars sit quadrati diametri AB; Vel si quadrato diametri AB, constituantur duo quadrata æqualia rectarum AC, BC, ita vt quadratum rectæ AC, duplum sit quadrati rectæ BC, iuxta doctrinam eiusdem scholij propos. 33. lib. 6. Lineam rectam BC, cubi latus existere. Vel certe cum diameter AB, possit & latus Tetraedri, & latus cubi, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 13. manifestum est, si ex quadrato diametri AB, auferatur quadratum lateris Tetraedri AC, relinqui quadratum lateris cubi BC: Quemadmodum e contrario, si ex quadrato diametri AB, tollatur quadratum lateris cubi BC, remanet quadratum lateris Tetraedri AC.

[c] 23. quarti decimi.

PRAETEREA, quia si recta aliqua potuerit totam quampiam rectam extrema ac media ratione sectam, & maius ipsius segmentum; Maius segmentum est latus Icosaedri illius sphæræ, cuius diameter est recta prior linea; Constat, si quadrato diametri AB, exhibeantur, iuxta ea, quæ in scholio propos. 33. lib. 6. demonstrata sunt a nobis, duo quadrata æqualia rectarum AE, BE, proportionem habentium, quam recta quæuis extrema ac media ratione diuisa ad maius segmentum; Rectam minorem BE, esse Icosaedri latus.

POSTREMO, quoniam si recta quapiam potuerit totam aliquam rectam diuisam extrema ac media ratione, & minus illius segmentum; Minus segmentum latus est Dodecaedri eius sphæræ, cuius diameter prior linea: Liquet, si quadrato diametri AB, constituantur duo quadrata æqualia rectarum AF, BF, proportionem habentium, quam quæcunq; recta linea extrema ac media ratione diuisa ad minus segmentum: Minorem lineam BF, latus esse Dodecaedri. 23. quarti dec.

HACTENVS ergo Hypsicles, Campanus, & Franciscus Candalla de comparatione solidorum regularium eidem sphæræ impositorum scripserunt: Sequentes autem quinque propos. ad idem negotium pertinentes collegi ex Cardano lib. 5. de Proportionibus, ad hunc, qui sequitur, modum. Ad finem deinde lib. 16. nonnulla alia adjiciemus, quæ ad eorundem quinque corporum Regularium in sphæra descriptionem, eorundemque comparationem spectant.

THEOR. 28. PROPOS. 28.

SI sint quatuor lineæ rectæ continue proportionales, nec non & aliæ quatuor, ita vt sit eadem antecedens omnium. Erit proportio tertiæ ad tertiam proportionis secundæ ad secundam duplicata; & proportio quartæ ad quartam eiusdem proportionis secundæ ad secundam triplicata.

SINT quatuor rectæ A, B, C, D, continue proportionales; necnon quatuor A, E, F, G, ita vt A, recta antecedens sit omnium. Dico proportionem C, ad F, tertiæ ad tertiam, esse duplicatam proportionis B, ad E, secundæ ad secun-

secundam; & proportionem D, ad G, quartæ ad quartã, esse triplicatam eiusdem proportionis B, ad E, secundæ ad secundam. Cum enim recta C, ad rectam A, ex defin. 10. lib. 5. proportionem habeat duplicatam proportionis rectæ B, ad rectam A; habeat autem & quadratum rectæ B, ad quadratum rectæ A, duplicatam proportionem eiusdem proportionis rectæ B, ad rectam A: Erit vt recta C, ad rectam A, ita quadratum rectæ B, ad quadratum rectę A. Eadem ratione erit, vt recta F, ad rectam A, ita quadratum rectæ E, ad quadratum rectæ A: Et conuertendo, vt recta A, ad rectam F, ita quadratum rectæ A, ad quadratum rectæ E. Quoniam igitur est quadratum rectę B, ad quadratum rectæ A, vt recta C, ad rectam A; & quadratum rectæ A, ad quadratum rectæ E, vt recta A, ad rectam F; Erit ex æquo quadratum rectæ B, ad quadratum rectæ E, vt recta C, ad rectam F: Est autem proportio quadrati rectæ B, ad quadratum rectæ E, duplicata proportionis rectæ B, ad rectam E. Igitur & proportio rectæ C, ad rectam F, duplicata est proportionis rectæ B, ad rectam E. Quod est primum.

a 20. sexti.

quadr. B. *Recta* C.
quadr. A. *Recta* A.
quadr. E. *Recta* F.

b 20. sexti

RVRSVS cum recta D, ad rectam A, ex defin. 10. lib. 5. proportionem habeat triplicatam proportionis rectæ B, ad rectam A; habeat autem & cubus rectæ B, ad cubum rectæ A, triplicatam proportionem eiusdem proportionis rectæ B, ad rectam A; Erit vt recta D, ad rectam A, ita cubus rectæ B, ad cubum rectæ A. Eadem ratione erit vt recta G, ad rectam A, ita cubus rectæ E, ad cubum rectæ A; Et conuertendo vt recta A, ad rectam G, ita cubus rectę A, ad cubum E. Quia ergo est cubus rectæ B, ad cubum rectæ A, vt recta D, ad rectam A; & cubus rectæ A, ad cubum rectæ E, vt recta A, ad rectam G; Erit ex æquo, cubus rectæ B, ad cubum rectę E, vt recta D, ad rectam G: Est autem proportio

c 33. unde.

Cubus B. *Recta* D.
Cubus A. *Recta* A.
Cubus E. *Recta* G,

d 33. unde.

portio cubi rectæ B, ad cubum rectæ E, triplicata proportionis rectæ B, ad rectam E. Igitur & proportio rectæ D, ad rectam G, triplicata est proportionis rectę B, ad rectam E. Quod est secundum. Itaque si sint quatuor lineę rectæ, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

HOC idẽ demonstrauimus ad propos. 10. lib. 8. de quotcunque numeris continue proportionalibus duorum ordinum ab vno aliquo, eodemque numero incipientium.

THEOR. 29. PROPOS. 29.

QVADRATVM lateris trianguli æquilateri ad ipsum triangulum habet proportionem duplicatam proportionis lateris trianguli ad lineam medio loco proportionalem inter perpendicularem ab vno angulo ad latus oppositum ductam, & dimidium ipsius lateris.

IN triangulo æquilatero A B C, ducatur ex angulo A, ad latus oppositũ BC, recta perpendicularis AD, quæ bifariam secabit latus BC, vt in coroll. propos. 12. huius lib. demonstratum est; Ac propterea B D, dimidium est lateris AB. Inueniatur ergo recta E, media proportionalis inter A D, & B D. Dico quadratum lateris AB, ad triãgulum ABC, habere proportionem duplicatam lateris AB, ad rectam E. Cum enim rectangulo sub AD, BD, æquale sit triangulum ABC, vt perspicuum est ex scholio propos. 41. lib. 1. Sit autem eidem rectangulo sub A D, B D, æquale quadratum rectæ E; Aequalia erunt triangulum ABC, & quadratum rectæ E. Quoniam uero quadratum late-

a 13. sexti

b 17. sexti

c 20. sexti

ris AB, ad quadratum rectæ E, proportionem habet duplicatam lateris AB, ad rectam E; Constat, quadratum lateris AB, ad triangulum ABC, proportionem habere quoque duplicatam lateris AB, ad rectam E. Quam ob rem, quadratum lateris trianguli æquilateri, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

ITAQVE, si in triangulo æquilatero perpendicularis ducatur ex vno angulo ad latus oppositum, quadratum rectæ, quæ medio loco proportionalis est inter dictam perpendicularem, & dimidium lateris, æquale est ipsi triangulo. Ostensum enim est, quadratum rectæ E, quæ media proportionalis est inter AD, DB, æquale esse triangulo ABC.

THEOR. 30. PROPOS. 30.

SI cubus, & Tetraedrum in eadem sphæra describantur: erit quadratum cubi ad triangulum Tetraedri, vt latus Tetraedri ad lineam perpẽdicularem, quæ ex vno angulo trianguli Tetraedri ad latus oppositum deducitur.

SIT quadratum cubi cuiusuis ABCD, & Tetraedri in eadem sphæra descripti triangulum EFG, in quo perpendicularis EH, ex angulo E ad latus oppositum FG, deducta diuidens FG, latus bifariam, ex coroll. propos. 12. huius lib. Dico, esse quadratum AC, ad triangulum EFG, vt latus trianguli EF, ad perpendicularem EH. Posita enim inter EH, FH, media proportionali IK; [a] cum quadratum lateris Tetraedri EF, duplum sit quadrati

[a] 18. tertij decc.

quadrati lateris cubi AB, [a] sit autem & duplum rectanguli sub latere EF, & dimidio eius FH, eo quod dictũ quadratum, & rectangulum eandem habeant altitudinem, nempe EF: Erit rectangulum sub EF, FH, æquale quadrato lateris AB; [b] Ac propterea AB, media proportionalis erit inter EF, FH, hoc est, tres rectæ FH, AB, EF, cõtinue erunt proportionales: Sunt autem & tres rectæ FH, IK, EH, continue proportionales, ex constructione. Igitur cum omnium antecedens sit FH, [c] erit proportio rectæ EF, ad rectam EH, tertiæ ad tertiã, proportionis rectæ AB, ad rectam IK, secundæ ad secundam duplicata. FH. AB. IK. Quare cum & quadratum AC, rectæ EF. EH. AB, ad quadratum rectę IK, hoc est, ad triangulum EFG, (est enim ex coroll. propos. 29. huius lib. quadratum rectę IK, æquale triangulo EFG,) [d] proportionem habeat duplicatam proportionis rectæ AB, ad rectam IK; Erit quadratum cubi AC, ad triangulũ Tetraedri EFG, vt latus EF, ad perpendicularem EH. Quocirca si cubus & Tetraedrum in eadem sphęra describantur, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 1. sexti.

[b] 17. sexti.

[c] 28. quarti decc.

[d] 20. sexti.

THEOR. 31. PROPOS. 31.

LATVS Tetraedri potentia sesquialterum est axis, seu altitudinis ipsius: Axis vero, siue altitudo Tetraedri potentia sesquitertia est lateris cubi in eadem sphæra descripti.

SIT Tetraedri triangulũ ABC, & altitudo, seu axis Tetraedri DE, latusq; cubi eiusdẽ sphęrę F. Dico latus Tetraedri AB, esse potẽtia sesquialterũ axis DE: Axem vero DE, potentia sesquitertiũ lateris cubi F. Nã circa

[a] 5. quarti.

triangulum, descripto circulo A B C; ad centrum D, in quod videlicet cadit axis DE, vt constat ex propos. 15. huius lib. ducatur A D, semidiameter, & AE, latus Tetraedri. Quia igitur quadratū lateris A E, hoc est, lateris A B, [b] æquale est quadratis rectarum A D, DE, [c] & triplum quadrati semidiametri A D; Fit, vt posito quadrato lateris A B, seu A E, partium 6. quadratum rectę A D, sit earundem partium 2. Ac proinde reliquum quadratum axis D E, talium partium 4. Quapropter quadratum lateris Tetraedri sesquialterum est quadrati axis Tetraedri.

[b] 47. primi
[c] 12. tertij-dec.

[d] 13. tertii-decimi.

QVONIAM vero latus Tetraedri A B, [d] potentia duplum est lateris cubi F; Erit quadratum lateris F, talium partium 3. qualium 6. positum est quadratum lateris A B; Ostensum est autem earundem 4. esse quadratum axis DE. Igitur quadratum axis D E, sesquitertium est quadrati lateris cubi F. Latus itaque Tetraedri potentia sesquialterum est, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM I.

QVIA vero, posito quadrato lateris AB, partium 6. quadratum diametri sphæræ talium partium est 9. [e] *quod diameter potentia sit sesquialtera lateris Tetraedri: Earundem uero partium 4. ostensum est quadratum axis DE; perspicuum est, diametrum sphæræ potentia esse duplam sesquiquartam axis Tetraedri; Ac proinde,* [f] *cum quadrata habeant proportionem laterum duplicatam, manifestum est, diametrum esse sesquialteram axis Tetraedri. Sesquialteræ enim proportionis duplicata est proportio dupla sesquiquarta, vt in his numeris 4. 6. 9. apparet. Id quod etiam docuimus in coroll. 2. propos. 13. lib. 13.*

[e] 13. tertij-decimi.

[f] 20. sexti

COROL-

COROLLARIVM II.

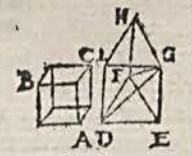
CONSTAT quoque, ita esse axem, seu altitudinē Tetraedri ad latus cubi eidem sphæræ inscripti, vt latus Tetraedri ad perpendicularem ex vno angulo basis ad latus oppositum ductam. Quia videlicet tam latus trianguli æquilateri, hoc est, latus Tetraedri, potentia sesquitertium est perpendicularis ex vno angulo ad latus oppositum deductæ, quam ex hac propos. ipse axis Tetraedri lateris cubi.

[a] 12. quartidec.

THEOR. 32. PROPOS. 32.

CVBVS triplus est Tetraedri eidē sphæræ inscripti.

DESCRIBANTVR in eadem sphæra cubus ABC, & Tetraedrum DEFG. Dico cubum Tetraedri esse triplum. Constituatur super DEF, basim Tetraedri prisma DEFGHI, eandem habens cum Tetraedro altitudinem. [b] Quoniam igitur est basis prismatis, seu cubi ABC, ad basim prismatis, seu Tetraedri DEF, vt latus Tetraedri ad perpendicularem ductam ex angulo quouis basis DEF, ad latus oppositum. Vt autem latus Tetraedri ad perpendicularē ductam, ita est, per coroll. 2. propos. 31. huius lib. altitudo Tetraedri, ac proinde prismatis DEFGHI, ad latus cubi, ideoque ad altitudinem cubi, seu prismatis ABC; Erit basis prismatis ABC, ad basim prismatis DEFGHI, vt huius altitudo ad illius altitudinem. Quare, per ea, quæ ad propos. 9. lib. 12. demonstrauimus, æqualia erunt prismata ABC, DEFGHI, cum ipsorum bases & altitudines reciprocentur. Atqui prisma



[b] 30. quartidec.

ma DEFGHI, triplum est pyramidis, seu Tetraedri DEFG; ex coroll. 1. propos. 7. lib. 12. Cubus ergo ABC, triplus quoque erit eiusdem tetraedri DEFG. Quapropter cubus triplus est Tetraedri eidem sphęræ inscripti. Quod ostendendum erat.

COROLLARIVM

VNDE prisma eandem habens & basim, & altitudinem cum Tetraedro, æquale est cubo in eadem sphæra, in qua Tetraedrum, descripto. Ostensum enim est, cubum ABC, æqualem esse prismati DEFGHI, &c.

FINIS ELEMENTI DECIMIQVARTI.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTVM QVINTVMDECIMVM.

ET SOLIDORVM QVINTVM

vt nonnulli putant. Vt vero alij, Hypsiclis Alexandrini de quinque corporibus

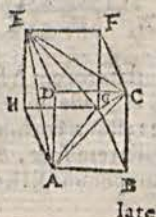
LIBER SECVNDVS.

PROBL. 1. PROPOS. 1.

1.

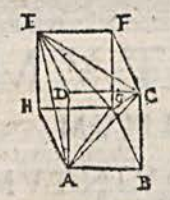
IN dato cubo pyramidem describere.

IN cubo dato ABCDEFGH, oporteat describere pyramidē, seu tetraedrū. Ab vno eius angulo, nempe ab E, ducantur in basibus tribus ipsum constituentibus tres diametri EA, EG, EC, ex quarū extremitatibus A, G, C, similiter diametri ducantur AG, GC, CA, in reliquis tribus basibus. Quoniam igitur diametri quadratorum æqualium æquales sunt, quod potētia duplæ sint



late-

laterum æqualium quadratorum, vt in scholio propos. 47. lib. 1. demonstrauimus, perspicuum est, quatuor triangula ACE, GAC, GAE, GCE, ex dictis diametris composita, æquilatera esse, & inter se æqualia; ac propterea pyramidem, seu tetraedrum constitui ex ipsis. Quia vero omnes anguli tetraedri in angulis cubi collocantur: manifestum est, ipsum in cubo esse inscriptum, ex defin. 31. lib 11. Quare in dato cubo pyramidem descripsimus. Quod faciendum erat.



PROBL. 2. PROPOS. 2.

2.

IN data pyramide octaedrum describere.

SIT in pyramide, seu tetraedo ABCD, describendum octaedrum. Diuisis omnibus lateribus bifariam in E, F, G, H, I, K, & ductis duodecim rectis EF, FG, GE, HI, IK, KH, EI, IF, FK, KG, GH, HE, cõstituentur octo triangula, quorum quidem quatuor EHI, IHK, KHG, GHE, supra planum EIKG; quatuor autem IFE, EFG, GFK, KFI; infra idem planum cõsistunt. Quoniam vero latera AE, AH trianguli AEH æqualia sunt lateribus AG, AH, triãguli AGH, quod sint dimidia rectarum æqualium AB, AD, AC; Item & anguli contenti EAH, GAH, æquales, quod sint anguli triangulorum æquilaterorum ABD, ACD: [a] æquales erunt bases EH, GH. Eademque ratione æquales erunt rectæ EH, HI, & reliquæ eodem modo. Quare dicta octo triangula æquilatera sunt, & æqualia inter se; ideoque octaedrum componunt EIKGHF; quod quidem ex defin. 31. lib. 11. intra

[a] 4. primi.

intra tetraedrum descriptum est; cum omnes eius anguli tangant omnia latera tetraedri, ex constructione. In data igitur pyramide octaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

QVONIAM vero tria plana EIKG, GHIF, FKHE, quadrata sunt æqualia, sese mutuo ad angulos rectos secãtia, vt in coroll. 1. prop. 14. lib. 13. demonstrauimus; quorum quodlibet pyramidem ABCD, secat bifariam. (Nam quadratum EIKG, ipsam diuidit in pyramidem HIKD, & prisma HIKGAE; necnon in pyramidem EBFI, & prisma EFCGKI; Constat autem pyramidem pyramidi esse æqualem, & prisma prismati: [a] *Eodemque modo reliqua quadrata GHIF, FKHE, diuidunt bifariam eandem pyramidem ABCD.) Manifestum est, si in tetraedro octaedrum inscribatur, tetraedrum bifariam secari, tribus quadratis æqualibus, quæ octaedrum bifariam quoque, & sese ad angulos rectos intersecant.*

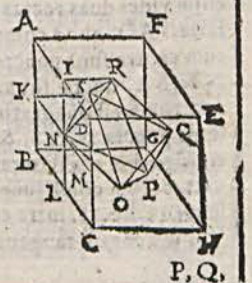
[a] 3. duode.

PROBL. 3. PROPOS. 3.

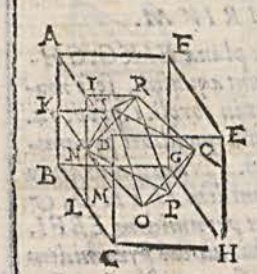
3.

IN dato cubo octaedrum describere.

DESCRIBENDVM sit octaedrum in cubo dato AH. Diuidãtur latera basis ABCD, bifariã in punctis I, K, L, M, quæ connectantur rectis IL, KM, secantibus sese in N, pũcto, quod quidem centrum est quadrati ABCD, vt constat ex demonstratione propos. 8. lib. 4. Deinde eadem ratione inueniantur reliquarum basium centra O, P, Q.



P, Q, R, S. Erunt igitur omnes rectæ, ex dictis centris ductæ ad media puncta basiũ, cuiusmodi sunt NI, RI, NK, SK, &c. æquales dimidiis lateribus cubi, seu quadratorum, vt perspicuum est ex præ-



dicta demonstratione propos. 8. lib. 4. Postremo si præfata extra coniungantur duodecim rectis NO, OP, PQ, QR, RS, SN, NP, PR, RN, SO, OQ, QS; constituta erunt octo trigula, quorum quidem quatuor NSR, RSQ, QSO, OSN, sunt pra planũ NOQR; quatuor autẽ OPQ, QPR, RPN, NPO, infra idem planum consistunt. Quoniam vero latera IN, IR, trianguli INR, æqualia sunt lateribus KN, KS, trianguli KNS, quod omnia sint dimidia laterum cubi æqualium, vt dictum est; Item & anguli contenti, æquales; propterea quod, cum NI, IR, parallelæ sint rectis BA, AF; [a] angulus NIR, æqualis sit recto angulo KAF, in quadrato AG, eademque ratione angulus NKS, angulo recto IAF, in quadrato AE; [b] Erunt bases NR, NS, æquales. Non aliter ostendemus, reliquas lineas omnes & inter se, & his duabus æquales esse; si nimirum e centris ducantur rectæ ad dimidia laterum, hac lege, vt quælibet duæ ducantur ad dimidium illius lateris. quod commune est duobus cubi quadratis, quorum duo illa puncta, e quibus videlicet rectæ egrediuntur, centra existunt. Ita enim vides duas rectas NI, RI, ductas esse ad I, dimidium lateris AD, quod commune est quadratis AC, AE, quorum centra sunt puncta N, & R: Ita quoque duæ rectæ NK, SK, ductæ sunt ad K, dimidium lateris AB, quod commune est quadratis AC, AG, quorum centra sunt puncta N, & S, &c. Quam ob rem constituta octo triangula & æquilatera sunt, & æqualia inter se; ideoque Octaedrum constituunt NOQRSP; Quod quidem ex defin. 31. lib. 11. intra cubum est descriptum, cum omnes eius sex anguli tangant cubi omnes sex bases in earum centris.

[a] 10. vnde.

[b] 4. primi.

Quam ob rem in dato cubo octaedrum inscribimus. Quod faciendum erat.

ALITER. [a] In cubo dato inscribatur pyramis; [b] In hac deinde pyramide Octaedrũ figuretur, factumque erit, quod proponitur. Cum enim ex demonstratione propos. 2. huius lib. anguli Octaedri tangant latera pyramidis; Latera vero pyramidis, ex demonstratione propos. 1. huius lib. existant in planis basium cubi, cum sint harum basium diametri; perspicuum est, angulos Octaedri tangere quoque bases cubi; atque adeo Octaedrum cubo esse inscriptum.

[a] 1. quintidecimi.

[b] 2. quintidecimi

COROLLARIVM.

QVIA vero diametri Octaedri in cubo descripti NO, RO, si ducerentur, se mutuo secant ad angulos rectos, ex coroll. 1. propos. 14. lib. 13. quæ quidem coniungunt centra basium cubi oppositarũ: Manifestum est, rectas lineas centra basium cubi oppositarum connectentes non solum se se mutuo bifariam, vt docuimus coroll. 1. propos. 15. lib. 13. sed etiam ad angulos rectos, vt hic ostendimus, diuidere.

PROBL. 4. PROPOS. 4.

4.

IN dato octaedro cubum inscribere.

DATVM octaedrum sit *ABCDEF*, in quo oporteat describere cubum. Quoniam in octaedro sex pyramides quadrangulę continentur, quarum videlicet vertices sunt sex anguli octaedri, & quælibet duę octaedrum constituunt; sit vna carum pyramis A B C D E, cuius basis *ABCD*, quadratum, triãgula vero æquilatera A B E, E B C, C E D, D E A, sintque horum triangulorum centra G, H, I, *K*, per quę ducantur

rectę

rectæ LM, MN, NO, OL, parallelæ lateribus AB, BC CD, DA. Erunt igitur & triangula LME, EMN, NEO, OEL, æquilatera, cum similia sint triangulis æquilateris ABE, EBC, CED, DEA, ex coroll. propos. 4. lib. 6. atque adeo inter se æqualia, propterea quod latera habeant communia. Est enim EM, latus commune triangulis LME, EMN; Et EN, cõmune triangulis EMN, NEO; & denique EO, cõmune triãgulis NEO, OEL. Hinc enim fit, triãgulũ LME, triãgulo EMN, hoc vero ipsi NEO; & hoc ipsi OEL, æquale esse. Conueniunt enim rectæ LM, MN, NO, OL, in punctis L, M, N, O, vt mox ostẽdemus. Quocirca & quatuor rectæ LM, MN, NO, OL, inter se æquales sũt.

[a] 18. quarti dec. Quia vero ducta recta EKP, tripla est rectæ KP; [b] est autem vt EP, ad KP, ita EA, ad LA; Erit quoque EA, tripla rectæ LA. Eademque ratione EB, EC, ED, triplæ erunt rectarum MB, NC, OD. Quocirca rectæ LM, MN, NO, OL, conuenient in punctis L, M, N, O, in quibus latera ea proportione secantur, quadrilaterumque constituent LMNO. Rursus quia LO, LM, parallelæ sunt rectis AD, AB, non in eodem cum ipsis existentibus plano; [c] æqualis erit angulus MLO, angulo BAD, qui rectus est, cum ABCD, quadratum sit, vt ostendimus in coroll. 1. propos. 14. lib. 13. & in propos. 16. lib. 14. Ac propterea & angulus MLO, rectus erit. Non secus demonstrabimus & reliquos angulos LMN, MNO, NOL, rectos esse. Quoniam vero tam planum per LO, LM, quam per NM, NO, ductum, [d] parallelum est plano ABCD; ipsa quoque inter se parallela erunt. atq; adeo, cum conueniant in punctis M, & O, vnum planum efficient, ex scholio propos. 16. lib. 11. Quocirca LMNO, quadratum erit, cum habeat & latera æqualia, & angulos rectos. Deinde, cum latera EL, EK, trianguli ELK, æqualia sint lateribus EO, EK, trianguli EOK. & anguli quoque ipsis contenti, æquales, quod recta EK, ex angulo E, per centrum K, trianguli æquilateri EAD, dimidiata bifariam secet angulum AED, per coroll. propos. 12. lib. 13. [a] Erunt & bases KL, KO, æquales, hoc est, recta LO, bifariam secabitur in K. Eadem ratione LM, MN, NO, bifariam secabuntur in G, H, I. Ac propterea rectæ GL, GM, HM, HN, IN, IO, KO, KL, cum sint laterũ quadrati LN, dimidia, æquales inter se erunt; Ideoque, cum & angulos contineant æquales, nimirum rectos, [b] æquales erunt & rectæ GH, HI, IK, KG, centra G, H, I, K, connectentes. Quia vero hæ rectæ in plano existunt quadrati LN, angulosque comprehendunt rectos; ([c] cum enim anguli LKG, GKI, IKO, duobus sint rectis æquales; Sint autem LKG, IKO, per corollarium 2. propos 32. lib. 1. semirecti; rectus erit angulus GKI; Eademq; ratione recti erũt anguli KGH, GHI, HIK.) quadratum erit GHIK, cum habeat & latera æqualia, & angulos rectos. Quod si eadem arte in rellquis quinque pyramidibus Octaedri centra triangulorum rectis connungantur, describentur similiter quadrata: quæ cum latera habeant cõmunia, æqualia inter se erunt. Quare sex huiusmodi quadrata cubum component: qui quidem ex defin. 31. lib. 11. intra Octaedrum descriptus erit, cum octo eius anguli tangant octo Octaedri bases in earum centris. Quare in dato Octaedro cubum descripsimus. Quod faciendum erat.

[a] 4. primi

[b] 4. primi

[c] 13. primi.

PROBL. 5. PROPOS. 5. 5. 6.

IN dato Icosaedro, Dodecaedrum inscribere.

SIT ex duodecim pyramidibus pentagonis, quæ in Icosaedro continentur, quarum videlicet bases sunt pẽtagona ex quinque Icosaedri lateribus composita, vertices vero, duodecim anguli Icosaedri, vna pyramis ABCDEF, cuius basis pentagonum ABCDE, trianguli vero æquilatera ABF, BCF,

CDF, DEF, EAF, sintque horum triangulorum centra G, H, I, K, L, quæ rectis connectãtur lineis GH, HI, IK, KL, LG. Rursus ex vertice F, per centra triangulorum rectæ demittantur FM, FN, FO, FP, FQ; quæ ex scholio propos. 12. lib. 13. bifariã secabũt latera AB, BC, CD, DE, EA, in M, N, O, P, Q; ita vt decem rectæ MA, MB, NB, NC, OC, OD, PD, PE, QE, QA, æquales sint, quę cum angulos comprehendant æquales, nempe angulos pentagoni, [a] æquales quoq; erunt rectæ MN, NO, OP, PQ, QM, puncta M, N, O, P, Q, connectentes; [b] Ac proinde & anguli MFN, NFO, OFP, PFQ, QFM, æquales erunt, quod & latera FM, FN, FO, FP, FQ, æqualia sint, nempe perpendiculares ex angulis triangulorum æquilaterorum, æqualium ad bases oppositas demissæ. Cum enim latera FB, BM; trianguli FBM, lateribus FB, BN, trianguli FBN, æqualia sint, contineantque angulos æquales, nempe triangulorum æquilaterorum; [c] erunt bases FM, FN, æquales; & sic de reliquis. Quoniam vero & rectę FG, FH, FI, FK, FL, animirum semidiametri circulorum ęqualium triangula æquilatera æqualia circũscribentiũ, ęquales sunt, & angulos comprehendunt æquales, vt demonstratum est; [d] Erunt & rectæ GH, HI, IK, KL, LG, æquales. [e] Rursus quia tam anguli AMQ, QMN, NMB, quã anguli BNM, MNO, ONC, æquales sunt duobus rectis. [f] Sunt autem anguli AMQ, NMB, angulis BNM, ONC, æquales; Erunt reliqui anguli QMN, MNO, æquales; Eademque ratione reliqui anguli NOP, OPQ, PQM, & inter se, & hisce æquales erunt. Quare pentagonum erit æquilaterum & æquiangulum MNOPQ, in plano pentagoni ABCDE, existens. Deniq; cum rectæ FM, FN, FO, FP, FQ, æquales proportionaliter secentur in G, H, I, K, L, quod & FG, FH, FI, FK, FL, ex centris, æquales sint; Vel certe quia FG, FH, FI, FK, FL, duplę sunt ipsarum GM, HN, IO, KP, LQ, ex coroll. propos. 18. lib. 14. parallelæ erunt

[a] 4. primi.
[b] 8. primi.
[c] 4. primi.
[d] 4. primi.
[e] 13. primi.
[f] 4. primi.
[g] 2. sexti.

læ erunt GH, HI, IK, KL, LG, ipsis MN, NO, OP, PQ, QM; Ac ꝓpterea anguli LGH, GHI, HIK, IKL, KLG, angulis æqualibus QMN, MNO, NOP, OPQ, PQM, ideoque & inter se æquales erunt. [b] Quia vero plana per rectas GH, HI, & per HI, IK, ducta, parallela sunt plano pentagoni MNOPQ, per rectas MN, NO, OP, ducto, conueniuntque in recta HI; ipsa vnum planum efficient, ex scholio propos. 16. lib. 11. Eodemque modo ostendemus plana per IK, KL, & per KL, LG, necnon per LG, GH, ducta idem planum constituere cum plano per GH, HI, IK, ducto. Quocirca GHIKL pentagonum est æquilaterum & ęquiangulum, cum & latera habeat æqualia & angulos. Quod si eadem arte in reliquis vndecim pyramidibus Icosaedri centra triangulorum rectis connectantur lineis, describentur similiter pentagona æquilatera & æquiangula: quæ cum latera habeant communia, æqualia inter se erunt. Quamobrem duodecim huiusmodi pentagona Dodecaedrum constituent: quod quidem ex defin. 31. lib. 11. in Icosaedro erit descriptum, cum viginti anguli Dodecaedri in centris viginti basium Icosaedri consistant. Quapropter in dato Icosaedro Dodecaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

[a] 10. vnde.
[b] 15. vnde.

COROLLARIVM.

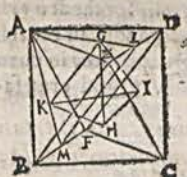
ITAQVE cum omes rectæ e centro Icosaedri ad centra basium, hoc est, ad angulos Dodecaedri sibi inscripti, sint æquales; (Cum enim ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. lib. 14. perpendiculares sint ad plana circulorum æqualium bases Icosaedri circumscribentium, atque adeo eorundem distantiæ existant a centro sphæræ, seu Icosaedri; æquales erunt inter se, ex lemm. 2. eiusdem propos. 10. lib. 14.) Idem erit centrum Icosaedri, atque sibi inscripti Dodecaedri.

0.
5.

PROBL. 6. PROPOS. 6.

IN dato octaedro pyramidem describere.

PYRAMIS describenda sit in octaedro *ABCDEF*. In pyramide octaedri superiori ABCDE, sumantur G, & H, centra triangulorum ex aduerso sibi respondentium AED, BEC; Item in pyramide inferiori *ABCDE*, capiantur I, & *K*, centra triangulorum ex aduerso quoque sibi correspondentium CFD, AF*B*: quæ quidem centra coniũgantur sex rectis GH, GI, G*K*, HI, H*K*, I*K*, vt fiat pyramis HI*K*G. Deinde ex A, demittantur per centra G, *K*, rectæ AL, AM, secantes latera opposita octaedri DE, BF, bifariam in *L*, & M, per scholium propos. 12. lib. 13. coniungaturq; recta *L* M, [a] quæ ipsi *B*E, vel *F*D, æqualis & parallela erit: cum EL, BM; Item DL, FM, rectæ æquales sint, & parallelæ, nimirum dimidia laterũ DE, BF, oppositorũ in quadrato EF.



[a] 33. primi

Quoniam vero rectæ *A* L, AM, sectæ sunt proportionaliter in G, & *K*, pũctis, quod AG, A*K*, dupla sint ipsarum GL, K*M*, ex coroll. propos. 18. lib. 14. [b] Erunt G*K*, LM, parallelæ; [c] Ac propterea, per coroll. propos. 4. lib. 6. triãgula ALM, AGK, similia. Quare erit vt *A*L, ad LM, ita *A*G, ad GK; & permutando vt *A*L, ad *A*G, ita LM, ad GK: Est autẽ AL, ipsius AG, sesquialtera; quod GL, sit tertia pars ipsius *A*L, ideoque AG, eiusdem *A*L, duæ tertiæ. Igitur & LM, hoc est, ipsi æqualis D*F*, sesquialtera erit ipsius GK. Hac eadem arte ostẽdemus, & reliquarum linearum centra G, H, I, *K*, coniungentiũ sesquialtera esse latera octaedri; Ac proinde rectas pyramidem HI*K*G, componentes inter se esse æquales, hoc est, triangula æquilatera æqualia ex ipsis confici,

[b] 2. sexti.
[c] 4. sexti.
[d] 18. quartidecimi.

confici, ideoque Tetraedrum cõstitui: quod, cum habeat angulos omnes in centris quatuor basium octaedri, descriptum erit, ex defin. 31. lib. 11. in octaedro. Quocirca in dato octaedro pyramidem descripsimus. Quod erat faciendum.

ALITER. [a] In octaedro dato inscribatur cubus, [b] & in cubo pyramis, factumq; erit, quod proponitur. Cum enim cubi anguli consistant in centris basium octaedri; & in angulis cubi collocẽtur quoque anguli pyramidis; perspicuum est, pyramidis angulos tangere bases octaedri in earum centris; Ac propterea pyramidem ipsi octaedro esse inscriptam.

[a] 4. quintidecimi.
[b] 1. quintidecimi.

COROLLARIVM I.

QVIA vero ostensum est, vtramque GK, DF, parallelam esse ipsi LM; ac propterea & GK, ipsi DF, atque adeo ipsi BE, parallelam esse; Atque eadem ratione KH, ipsis FC, EA, parallelam esse; Atque idcirco planum GKH, per GK, KH, ducium, parallelum esse plano DFC, per DF, FC, necnon & plano BEA, per BE, EA, ducto; Eodemque modo reliqua triangula pyramidis reliquis triangulis octaedri esse parallela, binis nimirum singula; Constat, si tetraedrum octaedro inscribatur, quatuor bases tetraedri, octo basibus octaedri parallelas esse, singula videlicet binis oppositis.

[c] 9. vndec.
[d] 15. vnde.

COROLLARIVM II.

PRAETEREA, cum octaedrum circumscribat & cubum, & tetraedrum in cubo descriptũ, quod tetraedri anguli in angulis cubi, & huius anguli in centris basium octaedri constituantur; Atque adeo recta coniungens centra basium octaedri opposita, sit diameter cubi, hoc est, sphæra circumscribentis & cubum, & tetraedrum in cubo descriptum, vt

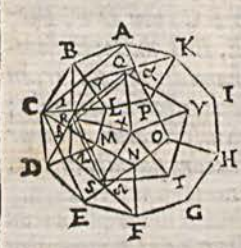
constat ex 4. propos. huius lib. Sit autem diameter sphæræ sesquialtera axis tetraedri in ea sphæra descripti per coroll. 1. propos. 31. lib. 14. vel per coroll. 2. propos. 13. lib. 13. Manifestum est, si in octaedro tetraedrum inscribatur, rectam, quæ centra basium octaedri oppositarum coniungit, sesquialteram esse axis tetraedri, hoc est, perpendicularis ab angulo tetraedri ad basin oppositam deductæ.

PROBL. 7. PROPOS. 7.

o. 7.

IN dato dodecaedro Icosaedrum describere.

SIT dimidium Dodecaedri, in quo describendum est Icosaedrum, contentum sex pentagonis ABLPK, PKIHO, OHGFN, NFEDM, MDCBL, LMNOP, quorum centra Q, R, S, T, V, X, quælibet duo proxima rectis iungantur QR, RS, ST, TV, VQ, QX, RX, SX, TX, VX: Et ex angulis K, D, quos subtendant rectæ AP, CM, per centra Q, R, rectæ ducantur KY, DY, quæ per coroll. 2. propos. 10. lib. 13. bifariam diuident latus oppositum BL, & ad angulos rectos, ideoq; in puncto Y, conuenient: Diuidunt autem & rectæ eædem YK, YD, rectas AP, CM, bifariam, & ad angulos rectos in α, β, ex 1. coroll. eiusdem propositionis, quod & arcus AKP, CDM, circulorum circa pentagona descriptorum bifariam diuidant, (a constat enim rectas AK, PK; Item CD, MD, arcus subtendere æquales.) b Igitur Aα, Cβ, parallelæ sunt rectæ BY; c atque adeo & inter se parallelæ: Sunt autem & æquales, nempe dimidia rectarum AP, CM; d quę æquales sunt, cum latera KA, KP, lateribus DC, DM, æqualia sint, angulosque contineant æquales. Rectæ ergo ipsas connectentes AC, αβ, æquales erunt, & parallelę. Non aliter ostendemus, si ex angulis B, F, quos subtendant rectę CL, EN, per centra R, S, rectę ducătur BZ, FZ, connectanturque rectæ Cε, γδ, æquales esse ipsas CE, γδ: b Sunt autem AC, Cε, inter se æquales, cum contineant angulos æquales æqualibus lineis comprehensos: (quia tam latera dodecaedri AB, BC, quam CD, DE, angulum pentagoni æquianguli continent, vt constat ex aliquo Dodecaedro materiali. Hi autem anguli non vergunt versus X, vt figura monstrare videtur, sed extrorsum, vt ex eodem materiali Dodecaedro patet.) Igitur & αβ, γδ, æquales erunt. Quapropter cum & rectę Xα, Yβ, Zγ, Zδ, æquales sint, (Nã YQ, YR, ZR, ZS, perpendiculares, distantiæ sunt æqualium rectarum BL, DM, a centris Q, R, S, circulorum æqualiũ, qui nimirum pentagona æqualia circumscribunt, c atque adeo æquales. Item Qα, Rβ, Rγ, Sδ, distantię sunt rectarum æqualium AP, CM, CL, EN, a centris eorundem circulorum æqualium, d ideoque æquales; Ac proinde & totæ Yα, Yβ, Zγ, Zδ, æquales erunt,) e Erunt quoque anguli αYβ, γZδ, æquales; Ac propterea, cum & rectæ YQ, YR, ZR, ZS, æquales sint; f æquales quoque erunt rectæ QR, RS, centra Q, R, S, connectentes. Eadem prorsus arte æquales demonstrabuntur omnes rectæ centra pentagonorũ copulantes. Quare triãgula QXR, RXS, SXT, TXV, VXQ, sub quinque angulis solidis Dodecaedri LMNOP, constituta, æquilatera erũt, & æqualia. Quod si simili modo sub reliquis quindecim angulis solidis Dodecaedri, similia triangula construantur: (Habet enim dodecaedrũ viginti angulos solidos.) quæ quidem latera habent communia, descriptum erit Icosaedrum intra Dodecaedrum, cum duodecim anguli solidi Icosaedri consistant in centris duo decim basium dodecaedri. In dato ergo Dodecaedro Icosaedrum descripsimus. Quod faciendum erat.



a 28. tertij.
b 28. primi
c 9. vndec.
d 4. primi.

a 33. primi.
b 4. primi
c 14. tertij.
d 14. tertij.
e 8. primi.
f 4. primi.

PROBL. 8. PROPOS. 8.

0. 8.

IN dato Dodecaedro cubum describere.

PROPONANTVR quatuor pentagona Dodecaedri, cui inscribendus sit cubus, *ABCDE*, *EFGHA*, *AHIKB*, *BKLMC*, conuenientia ad latus AB; duo quidem *ABCDE*, *ABKIH*, secundum latus idem commune AB; alia autem duo *AEFGH*, *BCMLK*, secundum angulos *EAH*, *CBK*. In his vero pentagonis subtendantur angulis A, B, D, *I*, rectę EH, *CK*, *CE*, *HK*, quadrilaterum efficientes EHKC. [a] Quoniam igitur rectæ AE, BC, æquales, auferũt ex circulo pentagonum ABCDE, circumscribente arcus æquales; Erunt ex scholio prop. 27. lib. 3. rectę AB, *CE*, parallelæ. Eademque ratione parallelę erunt AB, HK. [b] Quare & EC, HK, inter se parallelæ erunt; [c] Ac propterea rectæ EH, *CK*, quæ ipsas connectunt, parallelæ erunt, [d] in eodemque cum ipsis plano; ideoque parallelogrammum erit EH. *KC*; quod dico esse æquilaterum. Cum enim omnia latera AE, AH, DE, DC, BC, BK, IH, IK, æqualia sint, angulique contineãt æquales, ex hypothesi; [e] æquales erũt bases EH, HK, KC, CE. Quia vero planũ ECKH, productum communem sectionem in sphæra facit circulum, per lemma 1. propos. 10. lib. 14. circa quadrilaterum *EK*, descriptum; [f] Erunt tam anguli oppositi E, K, quam C, H, duobus rectis æquales; [g] Ac propterea cum oppositi E, & K, sint æquales, necnon & oppositi C, & H; erunt omnes quatuor anguli *E*, *C*, K, H, recti. Quare *EK*, quadratum erit, collocans suos angulos in quatuor angulis dodecaedri, & latera in planis quatuor pentagonorum Dodecaedri. Si igitur in reliquis octo pẽtagonis similiter octo angulis octo alię rectæ subtendantur eodem ordine; cõstitutum erit solidum sex quadratis contentum; quæ cum sint æqualia, eo quod eorum latera æquales angulos pentagonorum æqualibus rectis comprehensos subtendentia æqualia sunt; cubum constituent intra Dodecaedrum descriptum, propterea quod duodecim eius latera iacent in planis duodecim pentagonorum Dodecaedri, eiusque octo anguli in octo Dodecaedri angulis residunt. In dato ergo Dodecaedro cubum descripsimus. Quod erat faciendum.

[a] 28. tertij.
[b] 9. vndec.
[c] 33. primi
[d] 7. vndec.
[e] 4. primi.
[f] 22. tertij.
[g] 34. primi.

[a] 4. primi.

COROLLARIVM.

HINC fit, rectam, quæ subtendit vnum angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli, parallelam esse oppositi lateri. Ostensum enim est, CE, ipsi AB, esse parallelam.

PROBL. 9. PROPOS. 9.

0. 9.

IN dato Dodecaedro octaedrum describere.

SVMANTVR in Dodecaedro, cui inscribendum sit octaedrum, sex illa latera, quæ opposita esse diximus in corollario 3. propos. 17. lib. 13. nimirum AB, CD, EF, GH, IK, LM, quæ bifariam secentur in N, O, P, Q, R, S. Rectæ igitur NO, PQ, RS, sectiones oppositorum laterum coniungentes æquales erunt, seque mutuo in T, centro sphæræ bifariam, & ad angulos rectos diuident, per coroll. 3. propos. 17. lib. 13. atque adeo æquales quoq; erunt earum dimidiatæ partes NT, OT, PT, QT, RT, ST. [b] Quo circa duodecim rectæ subtendentes duodecim angulos rectos NTP, PTO, OTQ, QTN, NTR, RTP, PTS, STQ, QTR, RTO, OTS, STN, quales sunt NP, PO, OQ, QN,

[b] 4. primi.

[a] 4. primi

QN, NR, RP, PS, SQ, QR, RO, OS, SN, [a] æquales erũt, cum dicti anguli æqualibus rectis contineãtur; Ac proinde octo triãgula NRP, PRO, ORQ. QRN, OSP, PSN, NSQ, QSO, æquilatera, & æqualia erunt, constituentq; octaedrum intra Dodecaedrum descriptum, cum sex anguli octaedri tangant sex latera Dodecaedri opposita, ex constructione. In dato igitur Dodecaedro octaedrũ descripsimus. Quod faciendum erat.

PROBL. 10. PROPOS. 10.

IN dato Dodecaedro Pyramidem describere.

SIT Dodecaedrum contentum duodecim pentagonis ABCNL, CDEPN, EFGRP, GHITR, IKALT, MOQSV; BCDOM, DEFQO, FGHSQ, HIKVS, KABMV, LNPRT, in quo describenda sit pyramis, siue tetraedrum. Sumantur tria pẽtagona ABCNL, LAKIT, TLNPR, angulum solidum L, componentia, in quibus tres anguli C, R, K, (quorum quidem C, opponitur lateri AL, cõmuni pentagonis CAL, ALI; At vero K, lateri LT, communi pentagonis KLT, LTP; Denique R, lateri LN, communi pentagonis RLN, LNB,) rectis connectantur CK, CR, KR; & ex pũctis C, K, R, ad angulum Q, ipsi L, oppositum rectæ ducantur CQ, KQ, RQ, vt sit pyramis constructa CKRQ. Ductis autem tribus diametris Dodecaedri, seu sphæræ CH, KE, RM, & communis rectis KH, RH, RE, QE, QM, QH; [b] quoniam Dodecaedrũ in sphæra describitur; si planũ trianguli CHK, extendatur, fiet communis eius sectio cum sphæra circulus per lemma 1. propos. 10. lib. 14. [c] Ac propterea angulus CAH, in semicirculo existens, rectus erit. Non secus ostendemus rectos esse angulos CRH, KRE, KQE, RQM, CQH. [a] Quocirca cum in omni triangulo rectangulo quadratum lateris recto angulo oppositi æquale sit quadratis laterum circa rectum angulum; sint autẽ quadrata diametrorum æqualium CH, KE, RM, æqualia: Æqualia erunt quadrata rectarũ CK, KH, quadratis rectarum CR, RH, & quadratis rectarum KR, RE, & quadratis rectarum KQ, QE, & quadratis rectarum RQ, QM, nec non & quadratis rectarum CQ, QH. Ablatis ergo quadratis æqualibus rectarum æqualium KH, RH, RE, QE, QM, & QH; (Hæ enim rectæ cum subtendant angulos pentagonorum æquales æqualibus rectis comprehensos, [b] æquales sunt.) æqualia remanebunt quadrata rectarum CK, CR, RK, KQ, RQ, & CQ; Ac proinde & ipsæ rectæ æquales erunt. Quare quatuor triangula CKR, CKQ, KRQ, RCQ, æquilatera sunt, & æqualia, idcoque tetraedrum componunt CKRQ: quod cum habeat quatuor angulos C, K, R, Q, in quatuor angulis Dodecaedri, inscriptum erit intra Dodecaedrum.

ALITER. [c] In proposito Dodecaedro cubus describatur; [d] & in hoc cubo pyramis, factumque erit, quod proponitur. Cum enim anguli pyramidis in angulis cubi, nec non & anguli cubi in angulis Dodecaedri resideant; perspicuum est, angulos pyramidis sedem habere in angulis Dodecaedri. Quare pyramis in Dodecaedro descripta erit. Itaque in dato Dodecaedro pyramidem descripsimus. Quod faciendum erat.

[b] 17. tertij decimi

[c] 31. tertij

0. 10.

[a] 47 primi

[b] 4. primi

[c] 8. quinti decimi

[d] 1. quinti decimi

PROBL. 11. PROPOS. 11.

0. 11.

IN dato Icosaedro cubum describere.

[c] DESCRIBATVR in dato Icosaedro Dodecaedrũ; [f] & in hoc Dodecaedro cubus, factumq; erit, quod proponitur. Cũ.n. anguli cubi resideãt in angulis Dodecaedri; anguli vero Dodecaedri in cẽtris basiũ Icosaedri collocẽtur; tangẽt anguli cubi eadẽ cẽtra basiũ Icosaedri: Ac propterea cubus in Icosaedro descriptus erit. Quam obrẽ in dato Icosaedro cubũ descripsimus. Qd̃ faciẽd. erat.

[c] 5. quinti decimi

[f] 8. quinti decimi

PROBL.

0. 12.

PROBL. 12. PROPOS. 12.

IN dato Icosaedro Pyramidem describere.

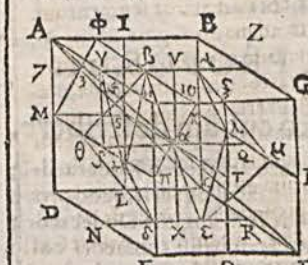
IN dato Icosaedro [a] cubus describatur, [b] & in hoc cubo pyramis; factumque erit, quod proponitur. [c] Cum enim anguli cubi tangant centra basium Icosaedri; & anguli pyramidis angulis cubi congruant, manifestum est, angulos pyramidis attingere centra earundem basium Icosaedri; Ac proinde pyramidem in Icosaedro esse descriptam. In dato igitur Icosaedro pyramidem descripsimus. Quod erat faciendum.

[a] 11. quintidecimi
[b] 1. quintidec.
[c] 11. quintidec.
[d] 1. quintidec.

PROBL. 13. PROPOS. 13.

IN dato cubo Dodecaedrum describere.

SIT in cubo proposito AF, describendum Dodecaedrum. Secentur singula latera bifariam in I, K, L, M, N, O, P, R, π, ξ, Z, Y, coniunctis rectis IL, YZ, ξO, Mπ, KP, NR, nusquâ inter se coeuntibus, ita vt ductæ in basibus oppositis sint inter se parallelæ, & à nullo puncto duæ lineæ ducantur, sed vna duntaxat, quæ rursus bifariam secentur in S, V, T, ρ, Q, X, connexis rectis ST, VX, ρQ, quæ se mutuo in centro α, bifariam secant, & ad angulos rectos, vt in coroll. propos. 3. huius lib. docuimus, sunt q; lateribus cubi, sicut & priores sex, æquales. Iam dimidia recta-



rectarum YZ, Mπ, secentur extrema ac media ratione in β, γ, θ, κ, vt sint maiora segmenta, Yβ, Zγ, Mθ, πκ, duabus rectis Yρ, Yκ, βθ, βκ. Quoniam ergo Yρ. YV, dimidio lateris cubi sunt æquales; & ρκ, βV, segmenta minora rectarum æqualium YV, ρπ, æqualia quoque: [a] Sunt autem quadrata rectarum YV, βV, tripla quadrati rectæ Yβ; Erunt & quadrata rectarum Yρ, ρκ, tripla eiusdem quadrati rectæ Yβ. Quare, [b] cum quadratis rectarum Yρ, ρκ, æquale sit quadratũ rectæ Yκ, [c] quod angulus Yρκ, rectus est; Erit & quadratum rectæ Yκ, triplum quadrati rectæ Yβ. Rursus, quia VY, perpendicularis ad AY, Yρ, [d] recta est ad planum AE, per rectas AY, Yρ, ductum, rectus erit angulus ρYκ, ex defin. 3. lib. 11. Ac propterea quadratũ rectæ βκ, æquale quadratis rectarum Yκ, Yβ, existens, quadruplum erit quadrati rectæ Yβ. (quia nimirum quadrata rectarum Yκ. Yβ, quadrupla etiam sunt quadrati rectæ Yβ, cum quadratum rectæ Yκ, triplum sit ostẽsum quadrati rectæ Yβ.) Ideoque [f] cum quadrata proportionem habeant laterum duplicatam, dupla erit recta βκ, rectę Yβ. Quadrupla enim proportio duplicata est duplę proportionis, vt in his numeris 1. 2. 4. apparet: Est autem & θκ, dupla ipsius ρκ, quod minora segmenta θρ, κρ, rectarum æqualium Mρ, πρ, æqualia sint. [g] Erit igitur vt Yβ, ad ρκ, ita βκ, dupla ipsius Yβ, ad θκ, duplam ipsius ρκ: Est autem Yβ, maius segmentum ad ρκ. rectam minori segmento βV, æqualem, vt tota ad maius segmentum. Ergo & βκ, ad θκ, erit vt tota ad maius segmentum; Ac proinde θκ, erit maius segmentum rectę βκ, sectę extrema ac media ratione. Eadem ratione ostendemus θκ, maius esse segmentum rectę ρθ, extrema ac media ratione sectę, si nimirum ducatur recta Yϑ. Quare æquales erũt βϑ, βκ, constituentes triangulum Isosceles βϑκ, simile illi, quod ab Euclide constructum est propos. 10. lib. 4. vt postea demonstrabimus; Ac proinde θκ, erit latus pentagoni in circulo triangulum βϑκ, circumscribente descripti, vt perspicuum est ex 11. propos. lib. 4.

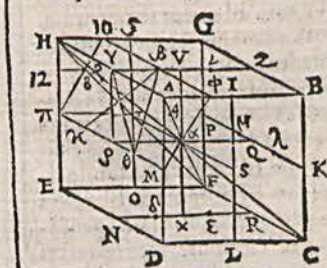
INTELLIGATVR iam planum trianguli βϑκ, extendi, (ducta per ρ, recta βφ, ipsi Mπ, parallela,) per parallelas Mπ, φ 10. vt sit planum extensum φπ, occurrens

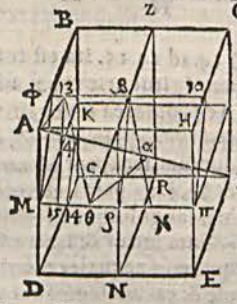
[a] 4. tertiidecimi.
[b] 47. primi
[c] 29. primi.
[d] 4. vndec.
[e] 47. primi
[f] 20. sexti
[g] 15. quinti

rens diametro AC, quadrati A B C D, in puncto 3. cubi vero diametro AF, in puncto 4. & per 3. ducatur 37. recta ipsi Aφ, parallela, connectaturque MS, quæ parallela est vtrique Aφ, 73. Quoniam igitur, per coroll. prop. 4. lib. 6. triangulum A 73. simile est triangulo AMS; proinde vt A M, ad M S, ita est A 7. ad 73. Sunt autem AM, MS, æquales, nempe dimidia cubi latera; Erũt quoque A 7. 73. æquales. Eadem ratione erit vt M A, ad Aφ, ita M 7. ad 73. Est autem A φ, maius segmentum rectæ MA, diuisæ extrema ac media ratione. (quod æquales sint Aφ, Yβ, necnõ & MA, YV, dimidia cubi latera,) Igitur & 73. hoc est, 7 A, maius segmentũ erit rectę M 7. extrema ac media ratione sectæ; Ac propterea tota M A, diuisa erit extrema ac media ratione in 7. maiusque segmentum erit M 7. Atqui vt M 7. ad 7 A, ita est S 3 ad 3. A. Secta est ergo & SA, extrema ac media ratione in 3. maiusque segmentũ est S 3. Quia vero Sα T, parallela est ipsi Mπ; quod & recta ducta πT, æqualis & parallela sit ipsi MS; si per S α T, planũ ducatur parallelũ plano φπ, ducto per M ϖ, secabũtur rectæ AS, Aα, in easdẽ rõnes, in punctis 3. & 4. Atque idcirco, cũ AS, secta sit in 3. extrema ac media ratione, secta erit eodem modo Aα, semidiameter cubi, in 4. maiusq; segmẽtum erit α4.

a 33. primi.
b 4. sexti
c 34. primi
d 5. tertij d.
e 2. sexti
f 33. primi
g 17. vnde.

IISDEM argumentis ostẽdemus, ducta diametro HF, quadrati EFGH, & diametro cubi HC, semidiametrum cubi secari in 9. pũcto extrema ac media ratione a plano φϖ, vt pertinea spicuũ est, si cubus inuertatur, vt in hac figura secunda apparet. Sunt.n. ĩ neamẽta omnino similia lineamẽtis prioris figuræ, licet bases cubi sedes mutauerint, ita vt quadratũ AC, locũ quadrati HF; & quadratũ HF, locũ quadrati AC, obtineat in hac secũda figura. Qđ tũ in prima figura, sine hac inuersione probabitur ẽt hoc modo. Ducta diametro cubi H C, figura, (Hęc deest in figura, quã tũ quilibet ducere potest) quã planũ φπ, secet in 9. ppe pũctũ A; intelligaturq; per rectam AH, planũ plano φϖ, parallelũ. Quoniam igitur rectæ Aα, Hα, in centro α, conueniũt, secanturq; planis parallelis in punctis A, H; & 4, 9; erit vt α 4, ad 4 A, ita α 9, ad 9 H. Cum ergo α A, secta sit in 4, extrema & media ratione, erit quoque α H, similiter secta. quæ quidem demõstratio locum etiã habet in hac cubi inuersione in secunda figura. Ostendamus nunc, si rectæ iungantur θ 4. β 4, β 9. κ 9. rectilineum β 4 κθ 9. in plano φπ, existens, pentagonum esse æquilaterum, & æquiangulũ.

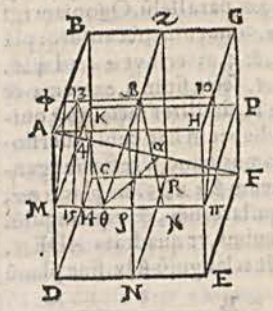




INVERTATVR rursum cubus, vt quadrata ADEH, ABGH, quæ nimirũ continẽt triangulũ βθκ, siue planũ φπ, hũc sitũ habeãt, quẽ mõstrat tertia hęc figura. Deinde in plano φπ, recta cõiuncta θ 4. extendat vsque ad rectã φ 10. in punctum 13. Quoniã igitur ducta recta K P, & iũctis rectis M K, ϖ P, planũ M P, parallelum est plano A G, (quod & rectæ PK, KM, parallelę sint rectis GB, BA,) secatq; cubũ bifariã; ideoq; per cẽtrũ α, trãsit, per ea, quæ in schol. prop. 39. lib. 11. ostensa sunt; si per rectas α 4 A, ϑ 4. 13. planũ extẽdatur, fient αθ, A 13. cões sectiones planorũ Mp, AG, parallelæ, Ac proinde triãgula αθ 4. α 13 4. æquiãgula erũt; Eritq; vt α 4. ad 4. A, ita θ 4. ad 4, 13. Quare cũ α A, in 4. secta sit extrema ac media ratione, vt ostẽdimus; eodẽ modo erit secta θ 13. in 4. Rursus plano NZ, per centrũ α, transeũti, parallelũ ducatur planũ per punctũ 4. ex schol. propos. 15. lib. 11. secãs planũ φπ, recta 4. 14. Est autẽ eidẽ plano NZ, parallelũ planũ DB. Rectę igitur α A, ρ M, in easdẽ rõnes secabuntur in pũctis 4, & 14. Quocirca & ρ M, in 14. secta erit extrema ac media rõne minusq; erit segmentũ 14. M, ideoq; æquale minori ρ ϑ, ipsius Mρ. Quare cũ ex ρ 14. maiori segmento ipsius

a 17. vnde.
b 15. vnde.
c 32. vnde.
d 16. vnde.
e 4. sexti
f 15. vnde.
g 17. vnde.

sius ρϑ, auferatur ρϑ, minus segmentum; Erit, vt demon-
strauimus ad propos. 5. lib. 13. ρ 14. diuisa in ϑ, extrema
ac media ratione, maiusq; segmentum erit ρϑ. Postre-
mo acta per 13. recta 13.
15. rectæ 4. 14. parallelas
[a] secabũtur rectę ϑ13 ϑ15.
proportionaliter; Ac pro-
inde & ϑ15. secta erit in
14. extrema ac media ratio
ne, maiusque segmentum
erit ϑ14. [b] Quapropter e-
rit vt ρϑ, maius segmentũ
ad ϑ14. minus, ita ϑ14. ma
ius ad 14.15. minus: Vt au-
tem ϑ14. ad 14.15. ita est tota ϑ15. ad ϑ14. maius seg-
mentum. Igitur erit vt ρϑ, ad ϑ 14. ita ϑ15. ad eandem
ϑ14 Ac propterea rectę ρϑ, vel ρκ, & ϑ15. æquales erũt.
Quoniam vero planum NZ, & planum illi parallelũ per
4.14. ductum, secantur plano φϖ, erunt communes sec-
tiones βρ, 4.14. parallelę, ideoque & 13 15. βρ, paralle-
lę erunt, [d] angulusque externus βρκ, interno 13.15 ϑ, æ-
qualis. Cum igitur & latera βρ, ρκ, lateribus 13.15. ϑ,
sint æqualia. [e] æquales erunt quoque rectę βκ, 13 ϑ. Ac
proinde & earum segmenta maiora ϑκ, ϑ4 (Ostensum
enim est ϑκ, esse maius segmentum ipsius βκ,) æqualia e-
runt. Eadem arte & β4. ipsi βγ, in prima figura ostende-
tur æqualis, si simili situ triangulum Isosceles formetur
super basim βγ. cuius vertex consistat in puncto, quod
rectam IS, diuidit extrema ac media ratione. Eodemque
modo eisdem ϑκ, βγ. æquales erunt κ9. β9. Aequilate-
rum ergo est pentagonum β4 θ κ9; quandoquidem βγ,
θκ, rectę æquales sunt, cum componantur ex minoribus
segmentis linearum æqualium extrema ac media ratio-
ne sectarum, quales sunt YV, ZV, πρ, Mρ. Sed & æquian-
gulum, vt mox ostendemus. Si igitur hac arte duode-
cim triãgula, nimirum ad singulas rectas Mϖ, YZ, NR,
IL, ξO, κP; bina ipsi βϑκ, similia, & æqualia construan-
tur (Ita enim ad Mϖ, duo huiusmodi triangula vides



a 2. sexti

b 9. quarti dec.

c 16. vnde.

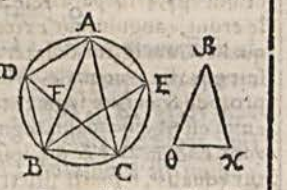
d 29. primi

e 4. primi.

βθκ, ϑθκ) & ipsorũ officio duodecim pentagona ipsi β4.
ξκ9. similia & æqualia fabricentur, constituetur Dode-
caedrum, cuius duodecim quidem anguli in sex rectis li
neis Mϖ, YZ, NR, IL. ξO, κP, bini nimirũ in singulis,
octo uero reliqui in octo semidiametris cubi consistunt,
nempe in punctis, quę ipsas extrema ac media ratione di
uidunt, qualia sunt puncta 4. & 9. in semidiametris Aα,
& Hα, secundæ figuræ; Ac propterea quodammodo in-
scriptũ esse dicetur cubo huiusmodi Dodecaedrũ, quã-
uis nõ proprie, cũ non omnes eius anguli vel in angulis,
vel lateribus, vel deniq; in planis cubi cõstituantur, sed
duodecim quidem in sex planis cubi, octo vero in pun-
ctis, quæ octo semidiametros cubi extrema ac media ra-
tione secant, resideant. Quocirca in dato cubo Dodecae
drum descripsimus. Quod erat faciendum.

LEMMA

*QVOD autem triangulum βθκ cuius basis θκ. ma
ius segmentum existit vtriusque lateris βθ, βκ, extre-
ma ac media ratione diuisi
simile sit illi, quod Eucli-
des construxit propos. 10.
lib. 4. ita demonstrabimus.
Describatur circa triangu-
lum Isosceles ABC, quale
Euclides construere docet propos. 10. lib. 4. circulus
ADBCE, diuisisque angulis ABC, ACB, bifariam
rectis BE, CD, perficiatur pentagonum æquilaterum
& æquiangulum ADBCE, vt propos. 11. lib. 4. tradi
mus, secentque se mutuo rectæ AB, CD, in F.* [a] *Quo-
niam ergo AB, in F, secatur extrema ac media ra-
tione, maiusque eius segmentum est AF, æquale la-
teri BC:* [b] *Erit vt AB, tota ad maius suum segmen-*



a 8. tertii decimi.

b 2. quarti dec.

tum BC, ita βϑ, tota ad maius suum segmentum ϑκ; Eodemque modo, vt tota AC, ad maius segmentum CB, ita βϑ, tota ad maius segmentum κθ: Est autem quoque vt AB, ad AC, ita β θ, ad β κ, vtrobique enim est proportio æqualitatis. [a] Triangula igitur βϑκ, ABC, proportionalia habentia latera, æquiangula sunt, æqualesque erunt anguli θ, B; Item κ, C, & β, A; propterea que vterque angulorum θ, κ, duplus erit anguli β; & triangula βθκ, ABC, similia.

PENTAGONVM vero β 4 ϑ κ 9, æquilaterum, esse quoque æquiangulum, hac ratione ostendemus. Describatur circa triangulum βϑκ, circulus βAϑκB; qui si transeat per puncta 4, & 9, perspicuum est ex ijs, quæ ad propos. 16. lib. 4. docuimus, pentagonum æquiangulum esse. Si vero non incedat per puncta 4, & 9. Describatur in circulo dicto, iuxta doctrinam propos. 11. lib. 4. pentagonum æquilaterum & æquiangulum βAϑκB. Quoniam igitur tam rectæ Aϑ, Aβ, quam rectæ 4ϑ, 4β, æquales sunt rectæ ϑκ, cum & β 4 ϑκ 9, & βAϑκB, pentagonum sit æquilaterū; Erunt tā duæ rectæ ϑA, ϑ4, quam duæ βA, β4, æquales. quod fieri non posse demonstratum est propos. 7. lib. 1. Transit ergo circulus triangulo βθκ, circumscriptus per puncta 4, & 9. Ac proinde pentagonum β4ϑκ9, æquiangulum est.

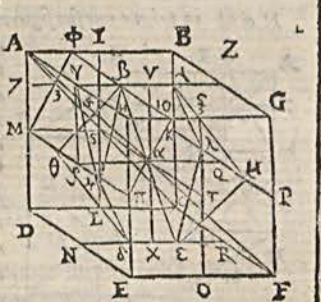
SCHOLIVM.

EX his colligere licebit sequentes propositiones. DIA-

I.

DIAMETER Dodecaedri duo latera potest, ipsius scilicet Dodecaedri, & cubi, in quo Dodecaedrum describitur.

DVCATVR enim in prima figura diameter Dodecaedri βε, intelligaturq; coniuncta recta γε, [a] æqualis existens & parallela lateri cubi VX, quod & Vγ, Xε, æquales sint, & parallelæ. Quoniam igitur anguli βVX, rectus est; [b] rectus quoque erit angulus βγε, ad γ, constitutus, [c] Ac proinde quadratum diametri βε, æquale erit quadratis laterum βγ, γε, nempe Dodecaedri, & cubi.



[a] 33. primi

[b] 29. primi

[c] 47. primi

II.

SI latus cubi secetur extrema ac media ratione, minus segmentum latus est dodecaedri in cubo descripti: Maius vero segmentum latus cubi in hoc dodecaedro descripti.

IN eadem enim prima figura, [d] cum sit vt YV, ad βV, ita YZ, dupla ipsius YV, ad βγ, duplam ipsius βV; Sit autem βV, minus segmentum ipsius YV, sectæ extrema ac media ratione; Erit & βγ, minus segmentū lateris cubi YZ, sectæ extrema ac media ratione; composita vero ex Yβ, γZ, hoc est, recta βκ, (quæ dupla fuit ostensa ipsius Yβ, ideoque composita ex Yβ, γZ, æqualis) maius segmentum. Constat autem ex constructione βγ, esse latus Dodecaedri, [e] & Cκ, seu βϑ, esse latus cubi in dicto Dodecaedro descripti, cum subtendat angulum pentagoni β 9 κ, vel β 4 ϑ.

[d] 15. quinti

[e] 8. quintidec.

III.

LATVS cubi æquale est duobus lateribus, Dodecaedri videlicet in ipso descripti, & Dodecaedri circa eundem cubum descripti.

NAM in prima rursus figura, latus cubi ΥZ, componitur ex latere Dodecaedri βγ, in ipso descripti, & ex recta composita ex Υβ, γZ; quia constat esse latus Dodecaedri eidem cubo circumscripti. Cum enim ΥZ, cubi latus, subtendat angulum pentagoni Dodecaedri circa cubum descripti, vt perspicuum est ex 8. propos. huius lib., [a] *Sit autem latus illius pentagoni maius segmentum lateris ΥZ, secti extrema ac media ratione: Erit βθ, existens quoque maius segmentum eiusdem lateris ΥZ, vt iam demonstrauimus, latus Dodecaedri cubo lateris ΥZ, circumscripti.*

[a] 8. tertij dec.

IIII.

RECTA duos angulos pentagonorum Dodecaedri communi lateri oppositos connectens est æqualis lateri cubi, cui Dodecaedrum inscribitur.

IN prima enim figura, recta connectens puncta β, δ, in quibus constituuntur duo anguli pentagonorum communi lateri θκ, oppositi, [b] *æqualis est rectæ ΥX, (quod & βΥ, δX, æquales sint, & parallelæ) hoc est, lateri cubi, in quo Dodecaedrum describitur.*

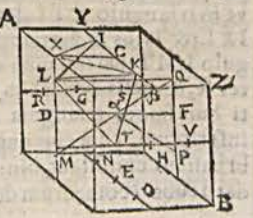
[b] 33. primi

PROBL

PROBL. 14. PROPOS. 14.

IN dato cubo Icosaedrū describere:

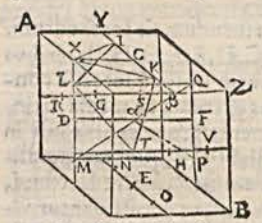
CVBVS datus, in quo describendum sit Icosaedrum, sit AB, per cuius basium cētra C, D, E, F, G, H, lateribus cubi rectæ lineæ parallelæ agantur nusquā inter se conuenientes, & harum medietates extrema ac media ratione secentur, ita vt maiora segmenta prope centra sint in punctis I, K; L, M; N, O; P, Q; R, S; T, V; quorum quodlibet cum quatuor vicinioribus connectatur, vt L, cum I, K, T, & R: R, cum L, M, I, & N, &c. vt constituantur viginti triangula IKL, IKQ, LMR, LMT, NOM, NOP, PQV, PQS, RSI, RSN, TVK, TVO, ILR, ISQ, KTL, KQV, OPV, OTM, NSP, NMR; quorum priora duodecim subtenduntur duodecim cubi lateribus, posteriora vero octo eiusdem cubi octo angulis substernuntur. Cōnectantur iam rectæ XC, XI, XK. Quoniam igitur latera XC, CI, trianguli XCI, æqualia sunt lateribus XC, CK, trianguli XCK; [a] & anguli contenti, recti, quod XC, parallela sit ipsi AY; [b] Erunt & bases XI, XK, æquales. Deinde quia linea LX, recta est ad planum AZ, per defin. 4. lib. 11. recta quoq; erit ad lineas XI, XK; Ac propterea cum latera LX, XI, trianguli LXI, æqualia sint lateribus LX, XK, triāguli LXK, & anguli contenti, recti; [c] æquales erunt bases LI, LK. Rursus [d] quoniam quadratū rectæ LI, æquale est quadratis rectarum LX, XI; Et quadratum rectæ LX, quadrato rectæ IY; quadratum uero rectæ XI, quadratis rectarum XC, CI, est æquale: Æquale erit quadratum rectæ LI, tribus quadratis rectarum XC, CI, IY: Sunt autem & quadrata rectarum XC, CY, æqualia, quod eorum latera sint dimidia cubi latera. Igitur quadratum rectæ LI, æquale est tribus qua-



[a] 29. primi.
[b] 4. primi
[c] 4. primi.
[d] 47. primi

dratis rectarum CY, CI, IY: Sed hæc tria quadrata quadrupla sunt quadrati rectæ CI, (a Cum enim quadrata rectarum CY, IY, totius, & minoris segmenti, tripla sint quadrati rectæ CI, maioris segmenti; Addito quadrato rectæ CI, illis duobus, erunt tria quadrata rectarum CY, CI, IY, quadrupla eiusdē quadrati rectę CI.) Quadratum ergo rectæ LI, quadruplum est quoq; quadrati rectæ CI; Ac propterea, cū eiusdem quadrati rectæ CI, quadruplum sit quadratum rectę KI, ex scholio propos. 4. lib. 2. Aequalia erunt quadrata rectarū LI, IK, ideoq; & rectæ ipsæ æquales. Aequilaterū igitur est triangulū IKL, lateri cubi AG, subſtratū.

a 4. tertij de cimi



NON aliter ostendemus, reliqua vndecim triāgula, vndecim reliquis lateribus cubi supposita, esse æquilatera; Atque adeo inter se æqualia, cum eorum latera IK, LM, NO, PQ, RS, TV, æqualia sint. Quoniam uero latera reliquorum octo triāgulorum, octo angulis cubi suppositorum, communia sunt dictis duodecim triangulis; vt in triangulo KTL, latus KL, commune est triangulo IKL; & latus KT, triangulo TVK; & latus TL, triangulo LMT; perspicuum est, ea quoque esse æqualia & inter se, & dictis duodecim triangulis. Quare omnia viginti huiusmodi triangula Icosaedrum component cubo inscriptum, cum eius anguli omnes duodecim in sex cubi basibus consistant, bini nimirum in singulis. Itaque in dato cubo Icosaedrum describ simus. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

COLLIGIMVS ex hoc propositiones sequentes.

I.

DIAMETER Icosaedri potest & latus Icosaedri, & cubi Icosaedrum ambientis.

DV-

DVCTA enim recta LQ, a quæ lateri cubi DF, paralle la est, & æqualis, quod & DL, FQ, parallela sint, & æquales; b manifestum est, quadratum diametri QM, æquale esse quadratis rectarum LM, lateris Icosaedri, & LQ, lateris cubi, in quo Icosaedrū descriptum est, c cum angulus MLQ, sit rectus, quod & LDF, rectus sit.

a 33. primi
b 47. primi
c 29. primi.

II.

BIFARIAE sectiones sex oppositorum laterum Icosaedri coniunguntur tribus rectis æqualibus, se se in centro Icosaedri bifariam, & ad angulos rectos secantibus.

NAM huiusmodi tres lineæ nimirum DF, CE, GH, cū coniungant centra basium cubi oppositarum, æquales sunt lateribus cubi, seseque per coroll. propos. 3. huius lib. bifariam, & ad angules rectos in centro cubi, quod sit α, diuidunt. Quod quidem & centrum esse Icosaedri, ita ostendetur, ducta recta αP. Quoniam latera αF, FQ. triāguli αFQ, æqualia sunt lateribus αF, FP, trianguli αFP, angulosque comprehendunt rectos, d æquales erunt rectæ αQ, αP. Eademque ratione æquales erunt omnes rectæ ex α, ad angulos Icosaedri prodeuntes. Igitur α, centrum est Icosaedri.

d 4. primi

III.

SI latus cubi extrema ac media ratione secetur, maius segmentum latus est Icosaedri in dicto cubo descripti.

CVM enim CI, sit maius segmētum rectæ CY; e sitque vt CI, ad CY, ita KI, dupla ipsius CI, ad βY, duplam ipsius CY; f erit quoque KI, latus Icosaedri, segmentum maius lateris cubi βY.

e 15. quinti
f 2. quartidec.

IIII.

ICOSAEDRI tam latera, quam triangula opposita, inter se sunt parallela.

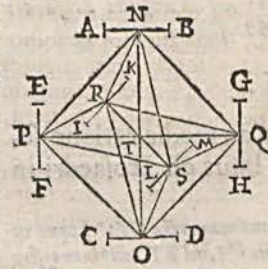
SI enim quorumlibet duorum laterum oppositorum extrema puncta duabus diametris connectantur, fient duo triangula inter se æqualia, angulosque alternos habentia æquales, ex 4. propos. lib. 1. quæ quidem in centro conueniunt. Quare quælibet latera opposita parallela erunt; [a] *Atque idcirco, & triangulorum plana, per ipsa latera parallela ducta, inter se erunt parallela.*

a 15. vnde.

PROBL. 15. PROPOS. 15.

IN dato Icosaedro Octaedrum describere.

EXPONANTVR dati Icosaedri, cui inscribendum est Octaedrum, sex latera opposita, *AB*, *CD*, EF, GH, IK, LM, quorum bifarias sectiones N, O, P, Q, R, S, iungant tres rectæ NO, PQ, RS, æquales se se in centro T, bifariam, & ad angulos rectos secantes, per ea, quæ in scholio propos. precedentis ostensa sunt; ducanturque rectæ NP, NR, NS, NQ; OP, OR, OS, OQ; PR, PS; QR, QS, constituētes octo triāgula SNP, SPO, SOQ, SQN, RNP, RPO, ROQ, RQN. Quia igitur latera TN, TS, trianguli TNS, æqualia sunt lateribus TN, TP, trianguli TNP, (cum sint rectarum æqualiū dimidia) angulosque continent rectos, vt dictum est; [b] Æquales erunt bases NS, NP: Eodemq; modo reliquę omnes lineæ æquales erunt & hilce duabus, & inter se. Octo ergo dicta triangula æquilatera sunt, & inter se æqualia. Ideoq; Octaedrum constituunt. Quod in Icosaedro descriptum est, cum eius anguli resideant in bifariis sectionibus sex laterum Icosaedri oppositorum. In dato itaq; Icosaedro Octaedrū descripsimus. Quod faciēdum erat.



b 4. primi

CO-

COROLLARIVM

SEQVITVR hinc, idem esse centrum Icosaedri, & Octaedri in eo descripti. Quoniam scilicet rectæ NO, PQ, RS, per T, centrum Icosaedri incedentes, diametri sunt Octaedri NPOQRS, sibi inscripti. Quare T, centrum Icosaedri, vbi se intersecant, centrum quoque est Octaedri.

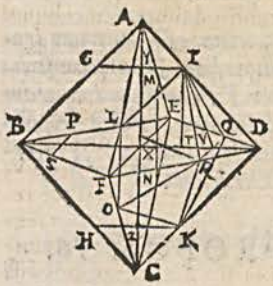
PROBL. 16. PROPOS. 16.

IN dato Octaedro Icosaedrum describere.

DATVM Octaedrum, in quo describendum est Icosaedrum, sit ABC*DEF*. Cū a quolibet angulo quatuor latera exeant, sumantur a singulis bina non proxima, sed sibi e regione respondentia, hoc est, quę ad angulos quadratorum Octaedri oppositos cadunt, sumendo semper bina iuxta angulos oppositos eiusdem quadrati, qualia sunt B*A*, BC; DA, DC, iuxta angulos oppositos B, D, quadrati ABCD; AF, *AE*; CE, CF, iuxta angulos oppositos A, C, quadrati AECF: (Nā a quolibet angulo sumēda sunt tm̄ duo latera; at vero latera AB, AD; CB, CD, quadrati ABCD, iuxta eosdē angulos A, C, iā sumpta fuere,) *EB*, ED; FD, FB, iuxta angulos oppositos E, F, quadrati *EBFD*; (Nā latera E*A*, EC; FC, FA, quadrati *AECF*, iuxta eosdē angulos, E, F, iam accepta sunt,) q̄ omnia secentur extrema ac media ratione, hac lege, vt maiora segmenta sint prope angulos, a quibus egrediuntur, in duodecim punctis G, H, I, *K*, L, M, N, O, P, Q, R, S, & a singulis ad quinque proximas sectiones quinque lineæ rectæ ducantur, vt ex R, rectæ RQ, RI, R*L*, RO, R*K*. Et ex I, rectæ IQ, IR, IM, IL, I*G*, & sic de cæteris, quamuis non omnes ductæ sint in figura, ad euitandam

linea-

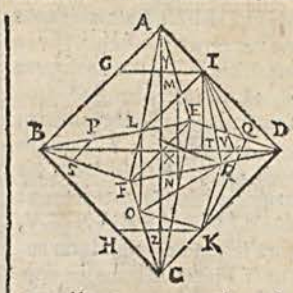
linearum confusionē. Quæ autem sint hæc quinque puncta proxima, pulchre indicat octaedrum materiale. Sunt.n. tria in lateribus reliquis tribus, quæ cum eo, in quo punctum acceptum est, pyramidē constituunt; alia aūt duo sunt in duobus lateribus duorū triangulorum octaedri, quæ habent cōe illud latus, in quo punctū acceptū est. Vt qa punctū acceptū est *R*, in latere *DF*, qđ cū tribus *DE*, *DA*, *DC*, pyramidē cōstituit in vertice D, & est cōe triāgulis octaedri *DFA*, *DFC*; ppea ex R, ad quinque pūcta horū quinque laterum ductæ sunt lineę rectę, & sic de cæteris. Post hęc, ductis tribus octaedri diametris AC, BD, EF, sese in cētro X, secantibus bifariā, & ad angulos rectos, ex coroll. 1. prop. 14. lib. 13. quarū AC, *BD*, secāt rectas GI, RQ, in Y, & V; connectaturq; recta IV, agaturq; IT, parallela ipsi YX. Qm̄ ergo latera DQ, DI, triāguli DQI, æqualia sunt lateribus DR, DI; (Sunt.n DQ, *DR*, minora segmenta rectarum æqualium DE, DF,) & angulos cō prehendunt æquales, nēpe triangulorū Octaedri ADE, ADF; [a] Erunt bases IQ, IR, æquales. Deinde cū sit, [b] vt BG, ad GA, ita *DI*, ad IA; [c] erit GI, rectæ BD, parallela. Eademq; ratione QR, ipsi *EF*, parallela; [d] Ac proinde vt *DI*, ad I*A*, ita XY, ad YA. Recta igitur XA, secta erit in Y, extrema ac media ratione. Rursus quia est vt AX, ad XD, ita *AY*, ad *YI*, (quod triangulum AYI, simile sit triangulo AXD, per coroll. propos. 4 lib. 6.) Est autem AX, ipsi XD, æqualis; Erit & *AY*, ipsi YI, æqualis. Quare YI, minus segmentum est rectæ XA. Non aliter ostendemus AY, ipsi YG, esse æqualē; ideoq; GI, rectam, bifariā in Y; similiterq; *QR*, in V, secari. Cum vero latera AG, AI, trianguli AGI, æqualia sint lateribus DQ, DR, trianguli DQR, (nimirum minora segmenta minoribus segmentis æqualium rectarum) angulosq; cōprehendant rectos,



[a] 4. primi.
[d] 2. quarti dec.
[c] 2. sexti
[d] 4. sexti

ctos, nēpe quadratorum ABCD, DEBF. [a] Aequales erūt bases GI, QR. Eadem ratione his æquales ostendētur rectæ HK, PS, MN, LO, quæ nimirum subtēdunt reliquos quadratorum ABCD, DEBF, AECF, angulos, in singulis videlicet quadratis binos oppositos, cōplectunturq; duo segmenta laterum minora. Deinde quia YI, minus segmentum ipsius XA, ostensum, maius est segmētum maioris segmenti XY, diuisi extrema ac media ratione, vt demōstrauimus ad prop. 5. lib. 13. Est autē XY, rectę XV, æqualis. (cum ambæ sint maiora segmenta æqualium rectarum XA, XD,) [b] & YI, rectæ XT; erit XT, maius segmētum ipsius XV, & idcirco TV, segmētum minus eiusdem XV. Quare quadrata rectarum XV, totius, hoc est, ipsius IT, ([c] cum & recta IT, æqualis sit ipsi XY) & TV, minoris segmēti, [d] tripla sunt quadrati rectę XT, maioris segmenti; Atq; adeo quadratum rectæ IV, [e] æquale existens quadratis rectarum IT, TV, triplum est eiusdē quadrati rectæ XT, hoc est, rectæ RV, quæ æqualis est ipsi XT, seu ipsi YI, ex demonstratis, cum RV, YI, dimidia sint æqualium rectarum RQ, GI. Addito igitur quadrato rectæ RV, ipsi quadrato rectæ IV; erunt quadrata rectarū IV, VR, quadrupla quadrati rectæ RV: [f] At quadratis rectarū IV, VR, æquale est quadratum rectæ IR, [g] qđ anguli IVR, IVQ, comprehensi lateribus æqualibus IV, VR; IV, VQ, & subtēsi basibus æqualibus IR, IQ, æquales sint, ideoq; recti. Ergo & quadratum rectæ IR, quadruplum est quadrati rectæ VR; Ac propterea cum eiusdem quadrati rectę VR, quadruplum quoq; sit per scholium prop. 4. lib. 2. quadratum rectę QR; Æqualia erunt quadrata rectarum IR, QR, ideoque & rectæ ipsæ æquales; Erat autem IQ, ipsi IR, æqualis. Triangulum igitur æquilaterum est IQR. Non secus demonstrabimus, æquilatera esse triāgula similem situm cum IQR, habentia, nempe KQR; GIL, GIM; GPS, HPS; NHK, OHK; RLO, SLO; PMN, QMN; atque adeo triangulo IQR, æqualia, cum latera omnium sint æqualia inter se. quod tamen hac etiam ratione demonstrabimus. Cum enim in quolibet horum triangulorum vnum latus subtendat angulum rectum quadrati comprehensum duobus segmentis

[a] 4. primi.
[b] 34. primi
[c] 34. primi
[d] 4. tertij de.
[e] 47. primi.
[f] 47. primi.
[g] 8. primi.



mentis minoribus laterum octaedri; duo vero reliqua subtendãt duos æquales angulos triangulorum æquilaterorum cõtentos singulos duobus segmentis laterũ Octaedri, maiore & minore: Erunt latera vnius triãguli lateribus aliorum æqualia; ac propterea & ipsa triangula æqualia, per corollarium propositionis 8. lib. 1. Vt in triangulis IQR, GIL, latera RQ, GI, subtendentia angulos rectos QDR, GAI, quadratorum DEBF, ABCD, comprehensos minoribus segmentis DQ, DR; AG, AI, æqualia sunt. Eodem modo latera IQ, IL, æqualia erunt, cum subtendant angulos æquales IDQ, IAL, triangulorum æquilaterorum ADE, ADF, quorũ ille continetur segmentis laterum Octaedri DI, DQ, maiore & minore; hic vero segmentis AL, AI, maiore & minore quoque. Non secus latera IR, GL, æqualia erũt. Aequalia igitur sunt triangula IQR, GIL, per corollarium propos. 8. lib. 1. Atqui IQR, ostensum est esse æquilaterum; Ergo & GIL, æquilaterum est. Eademque est ratio de cæteris habenda. Atque hæc quidem duodecim triangula supponuntur sex angulis Octaedri, bina videlicet singulis. Ex his consequitur reliqua octo triangula octo basibus Octaedri imposita, videlicet GMP, in AEB; HNP, in BEC; KNQ, in CED; IMQ in AED; GLS, in AFB; HOS, in BFC; KOR, in CFD; ILR, in AFD, æquilatera quoque esse, & prædictis æqualia, cum horũ latera cum illorum lateribus communia sint. Viginti ergo hæc triangula, quorum quina in singulis sectionibus laterũ octaedri conueniunt ad constitutionem anguli solidi, (vt vides in quinque RQI, RIL, RLO, ROK, RKQ, solidum angulum R, componentibus.) Icosaedrum componunt Octaedro inscriptum, cum Icosaedri duodecim anguli, duodecim sectiones laterum Octaedri possideant. In dato itaq; Octaedro, &c. Quod faciendum erat.

CO-

COROLLARIVM I.

COLLIGITVR ex demonstratis, si duo latera trianguli æquilateri secentur extrema ac media ratione, ita vt vnius maius segmentum, alterius vero minus sit prope angulum ab ipsis comprehensum; Rectam connectentem dictas sectiones duplum posse minoris segmẽti. Cum. n. in triãgulo æquilatero ADE, maius segmentum lateris AD, sit DI, & DQ, minus lateris DE; Sit autem recta IQ, ostensa æqualis rectæ GI, quæ duplum potest minoris segmenti AI, cum quadratum rectæ GI, æquale sit duobus quadratis æqualibus rectarum æqualium AG, AI: Perspicuum est, & rectam IQ, duplum posse eiusdem segmenti minoris AI. * 47. primi.

COROLLARIVM II.

RVRSVS fit, cum octo Icosaedri bases collocatæ sint in octo basibus Octaedri, idem esse centrum basis Octaedri, & Icosaedri. Suscipiatur namq; Octaedri superioris triangulum AED, in quo collocatum est triangulum Icosaedri IMQ, sitq; C, centrum trianguli AED, ex quo rectæ educãtur CA, CE, CD; CI, CM, CQ. Quoniam igitur latera CA, AM, trianguli CAM, æqualia sunt lateribus CE, EQ, trianguli CEQ, (quod hæc latera sint ex centro, & maiora segmenta æqualium rectarum) angulosque comprehendunt æquales, nempe dimidios angulorum trianguli æquilateri, vt in scholio propos. 12. lib. 13. ostendimus; Erũt bases CM, CQ, æquales. Non secus demonstrabimus CI, æqualem esse lineis CM, CQ. Quare C, centrum erit trianguli IMQ.

CO-

COROLLARIVM III.

NON difficile est denique ex dictis colligere, idē centrum esse Octaedri, atque sibi inscripti Icosaedri. Ductis enim ex X, cētro Octaedri, duabus rectis ad quoscunque duos angulos Icosaedri, nimirum rectis XG, XO, ad angulos G, & O; cum latera XA, AG, trianguli XAG, æqualia sint lateribus XF, FO, trianguli XFO, (Nā XA, XF, semidiametri sunt Octaedri, & AG, FO, segmenta minora laterū æqualium Octaedri sectorū extrema ac media ratione) angulosque complectantur æquales, semirectos videlicet; (cū AC, EF, diametri sint quadratorū ABCD, EAFC; ac proinde, per demonstrata in scholio propos. 34. lib. 1. angulos quadratorum bifariam secent.) æquales erunt & bases XG, XO. Eodemque argumēto ostendentur omnes aliæ rectæ ex X, ductæ ad angulos Icosaedri æquales. Igitur X, centrum Octaedri, centrum quoque est Icosaedri.

a 4. primi.

PROBL. 17. PROPOS. 17.

IN dato Octaedro Dodecaedrum describere.

b INSCRIBATVR dato Octaedro Icosaedrū, & in hoc Icosaedro Dodecaedrum, factumq; erit, quod iubetur. Cum enim Dodecaedri anguli constituantur in centris basium Icosaedri, quarum octo concētricæ sunt basibus Octaedri, ex coroll. 2. propos. 16. huius lib. Manifestum est, Dodecaedri octo angulos in eisdem cētris octo basium Octaedri, reliquos autē duodecim in centris duodecim basium Icosaedri, quarum binæ singulis sex angulis Octaedri supponuntur, residere; Ac propterea Dodecaedrum Octaedro inscriptum esse dicetur, quanquam non proprie, vt ex defin. 31. lib. 11. apparere potest. Quapropter in dato Octaedro Dodecaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

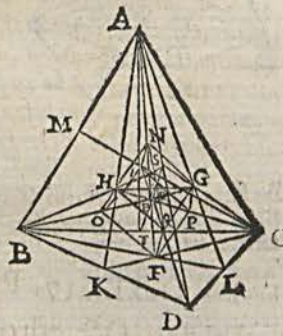
b 16. quintidecimi. c 5. quintidec.

PROBL. 18. PROPOS. 18.

IN data Pyramide cubū describere.

DETVR pyramis ABCD, in qua cubus iubetur describi, sitque eius centrum E, per quod ex quatuor angulis Pyramidis rectę educantur AEF, BEG, CEH, DEI, quæ cadent in centra basium oppositarum F, G, H, I, eruntque perpendiculares ad easdē bases BCD, ACD, ABD, ABC. Per hæc centra porro ex angulis A, B, C, rectæ ducantur AHK, AGL, AIT, BFL, BHS, CIM, CFK, CGS, secantes bases oppositas BD, CD, AB, AD, BC, bifariam, & ad angulos rectos, ex scholio propos. 12. lib. 13. in punctis K, L, M, S, T. Secentur quoque rectæ ex solidis angulis p centrum E, demissę AF, BG, CH, D., bifariam in N, O, P, Q, punctis, quorum quodlibet cum tribus proximis centris basium (centris, inquam, basium ipsam lineam, in qua punctum est, circumstantium, ita vt relinquatur centrum illius basis, in quam perpendicularis cadit.) rectis lineis cōiungātur, vt N, cū G, H, I; O, cū F, H, I; P, cū F, G, I; & Q, cū F, G, H. Dico solidū NF, contētum quadrilateris NO, NP, NQ, FG, FH, FI, cubū esse. Cū. n. latera AF, FK, trianguli AFK, æqualia sint lateribus AF, FL, triāguli AFL, (qđ FK, FL, cū ppendiculares sint ad BD, CD, ex cētro F, ductæ ostēdāt) equales distātias rectarū

a 15. quarti dec.



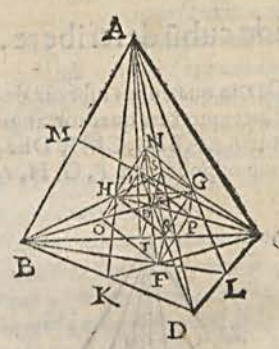
æqualium

æqualium BD, CD, a centro F,)anguloſque contineant rectos, ex 3. defin. lib. 11. [a] Aequales erunt & baſes AK, AL, & anguli KAF, LAF. Rurſus quia latera AN, AH, trianguli ANH, æqualia ſunt lateribus AN, AG, triãguli ANG, (ſunt enim AH, AG, ſemidiametri triangulorum æquilaterorum & æqualiũ ABD, ACD) angulos item comprehendunt æquales, vt demonſtrauimus; [b] Aequales erunt baſes NH, NG. Haud ſecus oſtendentur æquales rectæ QG, QH, ſi rectæ ducantur DG, DH, necnon & reliquæ, cum omnes ſubtendant æquales angulos æqualibus lateribus comprehenſos; vt perſpicuum eſt. Si.n. recta ducatur FT, cũ latera AF, FT, æqualia ſint lateribus AF, FK. (Sunt namque FT, FK, diſtantiæ rectarum æqualium BC, BD, a centro) & anguli contenti recti, ex defin. 3. lib. 11. Aequales erunt anguli TAF, KAF. Ac proinde cum latera AN, AI, æqualia ſint lateribus AN, AH; (Sunt enim AI, AH, ſemidiametri triangulorum æquilaterorum æqualiũ ABC, ABD) anguloſque contineant æquales: [c] Aequales erunt baſes NI, NH, &c. Sunt igitur ſex dicta quadrilatera, æquilatera. Oſtendamus iam, ipſa plana eſſe, atque rectangula, vt tandem quadrata eſſe eoncludamus, atque adeo componere cubum NF.

[a] 4. primi.

[b] 4. primi.

[c] 4. primi.



ASSVMATVR quadrilaterum NQ, ductis rectis GH, NQ. Quoniam in pyramide latera BC, AD, oppoſita ſunt, hoc eſt, non coeuntia in aliquo puncto; eorum puncta media S, & T, coniungantur recta ST; erit ea diameter octaedri in pyramide deſcripti, vt conſtat ex figura propoſ. 2. huius lib. Nam punctum S, huius figuræ reſpondet puncto H, illius, & punctum T, puncto F, cum

F, cum & in illa ſint latera oppoſita, ſiue non coeuntia BC, AD. Quocirca cum idem ſit centrum pyramidis & Octaedri in ipſa deſcripti, vt mox demonſtrabimus, tranſibit ST, per E, centrum pyramidis, æqualesque erunt ES, ET, nempe ſemidiametri Octaedri. Deinde quia BS, CS, perpendiculares ſunt ad AD, per ſcholium propoſ. 2. lib. 13. [a] erunt HS, GS, ex centris H, & G, tertiæ partes perpendicularium BS, CS. Quare latera BS, CS, triãguli BSC, proportionaliter ſecantur, [b] atque idcirco HG, parallela eſt lateri BC, ſecatq; latera TS, CS, trianguli TSC, (quod quidem pars eſt trianguli BSC,) proportionaliter; ideoque & SR, tertia pars eſt ipſius ST; ac proinde duæ tertiæ partes dimidiæ SE. Rurſus [c] quia DI, perpendicularis eſt ad triangulum ABC; erit EI, tertia pars ſemidiametri DE, ex coroll. 2. propoſ. 13. lib. 13. hoc eſt, qualium partium 3. ponetur DE, talium 1. erit EI, ac proinde talium 4, recta DI, ideoq; eius dimidium DQ, earundẽ partium 2. Quam ob rem reliqua EQ, talium partium erit 1. atque idcirco EQ, tertia pars erit ipſius DE. Eadẽ ratione EN, tertia pars erit ipſius AE; ac propterea, cum latera DE, AE, trianguli AED, proportionaliter ſecentur, [d] recta NQ, parallela erit lateri AD, ſecabitque latera ES, ED, trianguli DES, (quod quidem pars eſt triãguli AED,) proportionaliter, ideoque, cum EQ, ſit tertia pars ipſius DE; tertia pars erit ER, ipſius SE; Ac proinde SR, duæ tertię partes eiuſdem SE. Quoniam igitur vtraque HG, NQ, ex SE, duas ter tias partes abſtulit, in eodem puncto R; ſecabitur SE, a rectis HG, NQ; Atque idcirco & ipſæ HG, NQ, in eodem ſe ſe puncto interſecabunt. [e] Quare in eodem ſunt plano, proptereaque & rectæ HQ, QG, GN, NH, in eodem cum ipſis plano. Planum igitur eſt quadrilaterum HQ. Eademque eſt ratio de cæteris quinque. Quod autem & rectangulum ſit, nunc demonſtremus.

[a] 18. quarti decimi.

[b] 2. ſexti.

[c] 15. quarti decimi.

[d] 2. ſexti

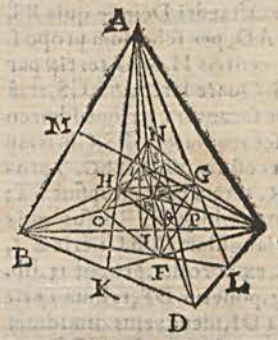
[e] 2. vndec.

CVM oſtenſa ſit HG, ipſi BC, parallela, atque adeo triangulum SHG, ſimile triangulo SBC, ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. [f] Erit vt SH, ad HG, ita SB, ad BC; & permutando, vt SH, ad SB, ita HG, ad BC: Eſt autem SH, tertia pars ipſius SB: igitur & HG, tertia pars erit late-

[f] 2. ſexti

ris BC. Haud secus ostendemus NQ, tertiam esse partem lateris AD. Cum ergo latera BC, AD, sint æqualia, erunt & eorum tertiæ partes HG, NQ, æquales. Ac proinde cum subtendantur æqualibus lateribus HN, GN; GQ, HQ; NG, QG; NH, QH; [a] æquales erũt quatuor anguli, HNG, NGQ, GQH, QHN. Quocirca cũ ipsi sint quatuor rectis æquales, vt ostendimus ad 14. posit. 32. lib. 1. recti erunt; ideoq; quadratum erit NQ. Eademque ratione quadrata erunt reliqua quadrilatera; Ac propterea cubum constituent: qui ideo pyramidi dicetur inscriptus, licet improprie, quod quatuor eius anguli F, G, H, I, in centris quatuor basium pyramidis, quatuor vero reliqui N, O, P, Q, in bifariis sectionibus perpendicularium ex angulis pyramidis ad eius bases ductarum resideant, vt constat.

[a] 8. primi.



ALITER. In data pyramide describatur octaedrum, & in hoc octaedro cubus; factumque erit, quod iubetur. Quoniam enim octo anguli cubi statuuntur in centris octo basium octaedri, quarum quatuor sunt in quatuor basibus pyramidis, vt constat ex prop. 2. huius lib. habentque eadem centra cum ipsis, vt mox ostendemus; fit, vt quatuor anguli cubi resideant in centris quatuor basium pyramidis, quemadmodum etiam in priori demonstratione dictum est. Rursus quia reliquæ quatuor bases octaedri parallelæ sunt basibus pyramidis, vt constat ex figura propos. 2. huius lib. ([b] cum enim rectæ EG, EH, parallelæ sint rectis BC, BD; [c] erunt quoque triangula EGH, BCD, per illas rectas ducta, inter se parallela, & sic de cæteris.) fit, vt perpendiculares ab angulis pyramidis in bases oppositas demissæ, sint quoque ad illas quatuor reliquas bases octaedri perpẽdiculares, ex scholio prop. 14. lib. 11. Quare cũ prædictæ bases abscindant ex pyramide pyramides similes toti, cadent illæ perpendiculares in centra dictarum basium, quemadmodum & in centra basium totius pyramidis cadunt. [a] Et quia dictæ quatuor bases octaedri diuidunt illas perpendiculares proportionaliter cum lateribus pyramidis, hoc est, bifariã; efficitur, vt reliqui quatuor anguli cubi statuantur in mediis punctis quatuor perpendicularium, veluti prior demonstratio docuit. Constat ergo cubum in pyramide esse descriptum, vt prius. In data itaque pyramide cubum descripsimus. Quod faciendum erat.

[b] 2. sexti.
[c] 15. vnde.

[a] 17. vnde.

COROLLARIVM I.

CONSTAT ex his, idem esse centrum pyramidis, & cubi in ea descripti. Nam diametri cubi NF, OG, PH, QI, cum sint dimidiæ partes perpendicularium ex angulis pyramidis per eius centrum ad bases demissarum per E, centrum pyramidis transeunt.

COROLLARIVM II.

INFERTVR quoque, rectam, quæ coniungit bifarias sectiones oppositorũ laterum pyramidis, transire per centrum pyramidis, triplamq; esse lateris cubi in pyramide descripti. Cum enim ER, ex E, centro cubi, in R, centrum basis GNHQ, ducta dimidium sit lateris cubi, vt constat; Recta RS, dupla ipsius ER, æqualis erit lateri cubi. Cum igitur RS, ostensa sit tertia pars ipsius ST; perspicuum est, rectam ST, coniungentem S, & T, bifarias sectiones laterum oppositorum pyramidis AD, BC, transire per centrum pyramidis, triplamque esse lateris cubi RS.

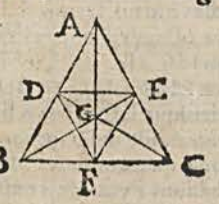
LEMMA.

IDEM autem esse centrum Pyramidis, & Octaedri in ea descripti, idemque centrum basis pyramidis, & basis octaedri in ea descripti, ita demonstrabimus. Sit primum pyramis ABCD, cuius omnia sex latera bifariã secẽtur in E,F,G,H,I,K; & ex L, cẽtro Pyramidis in bases ABD, BCD, perpendiculares demittantur LM, LN, quæ in centra circulorum dictas bases circumscribentium cadent, ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. lib. 14. Coniunctis autem rectis LE, EM, LF, FN; quoniã latera LM, ME, trianguli LME, æqualia sunt lateribus LN, NF, trianguli LNF, (cum enim circuli bases ABD, BCD, circumscribentes sint æquales, æqualiter distabunt ipsi a centro L, per lemma 2. propos. 10. lib. 14; Ac propterea eorum distantiæ LM, LN, æquales erunt. Sic quoque æquales erunt ME, NF, distantiæ rectarum æqualium AB, BD, a centris M, & N, circulorum æqualium) angulosque comprehendunt rectos per defin. 3. lib. 11. [a] Æquales erunt rectæ LE, LF. Eademque ratione bis æquales erunt, & inter se rectæ LG, LH, LI, LK. Quare cum anguli Octaedri in pyramide descripti constituantur in punctis E,F,G,H,I,K, vt ex 2. propos. huius lib. constat: Erit L, centrum Octaedri, cum ab eo omnes lineæ cadentes in eius angulos sint æquales. Cũ igitur & L, centrum fuerit pyramidis; idem erit centrum pyramidis & octaedri in ea descripti.

SIT deinde in basi pyramidis ABC, basis octaedri DEF, quæ secabit illius latera bifariam, vt patet ex

[a] 4. primi.

ex propos. 2. huius lib. sit autem G, centrum trianguli ABC, a quo ad angulos vtriusque basis rectæ ducantur. Quia igitur latera AG, AD, lateribus BG, BF, æqualia sunt, angulosq; continẽt æquales, nimirũ semisses angulorum æqualium trianguli æquilateri, erunt & bases GD, GF, æquales: Eademque ratione erit GE, vtrique GD, GF, æqualis. Igitur G, centrum est trianguli DEF. quod est propositum.



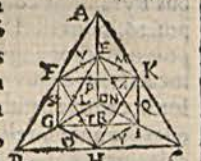
[a] 4. primi

PROBL. 19. PROPOS. 19.

IN data pyramide Icosaedrum describere.

DATAE Pyramidi ABCD, [b] inscribatur octaedrũ EFGHIK, cuius omnia duodecim latera secentur extrema ac media ratione, hac lege, vt bina sumãtur ex singulis angulis sibi respõdentia, hoc est, in angulos oppositos quadratorum octaedri cadentia, vt in propos. 16. huius lib. diximus, qualia sunt EG, EK; HK, HG; KF, KI; GI, GF; FH, FE; IE, IH, in punctis L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V, X, Y. Nam si quodlibet horum pũctorum cum quinque proximis coniunxerimus lineis rectis, vt M, cum V, L, X, P, & Q, &c. descriptum erit Icosaedrũ in dicto octaedro, vt cõstat ex prop. 16. huius lib. habẽs oẽs duodecim angulos in duodecim pũctis sectionibus duodecim laterũ octaedri. Cũ ergo hæc ipsa latera octaedri in planis basiũ Pyramidis sint ducta; manifestũ est,

[b] 2. quintidec.



est, duodecim angulos Icosaedri in planis basiũ pyramidis cõstitui, ternos scilicet in singulis, quod & terna latera octaedri in singulis basibus pyramidis ducta sint. Nã in basi ABC, existunt latera FH, HK, KF; In ABD, latera EF, FG, GE; In BDC, latera GH, HI, IG; In ADC, denique latera IK, KE, EI. Quare dictum Icosaedrum in pyramide descriptum erit, per defin. 31. lib. 11. cuius quidem quatuor bases MXQ, ROY, LSV, NPT, in quatuor basibus Pyramidis existunt, vt cõstat. In data igitur Pyramide Icosaedrũ descripsimus. Quod erat faciendum.

PROBL. 20. PROPOS. 20.

IN data Pyramide Dodecaedrum describere.

PYRAMIDI datæ[a] inscribatur Icosaedrum, [b] & in hoc Dodecaedrũ habens viginti suos angulos in centris viginti basium Icosaedri; Factumque erit, quod iubetur. Cum enim quatuor bases Icosaedri existant in quatuor basibus pyramidis, vt in præcedenti propos. diximus; cõsistẽt quatuor anguli Dodecaedri dicto icosaedro inscripti in quatuor basibus pyramidis, nempe in earum centris. Sunt. n. dictæ quatuor bases Icosaedri quatuor basibus Pyramidis concentricæ, vt constat ex 2. coroll. propos. 16. huius lib. Deinde, [c] quia cubus Dodecaedro inscriptus octo suos angulos in octo angulis Dodecaedri collocat: Item cubus pyramidi inscriptus, [d] quatuor angulos in centris basium pyramidis, de quibus iam dictũ est, quatuor autem reliquos in bifariis sectionibus perpendicularium ex angulis pyramidis in bases demissarum constituit; collocabuntur quatuor anguli Dodecaedri, cum his quatuor angulis cubi conuenientes, in eisdem bifariis sectionibus perpendicularium dictarum: superstant autem duodecim anguli Dodecaedri, quorum bini singulis lateribus Pyramidis supponentur; Atque adeo dictũ Dodecaedrũ descriptũ esse dicetur in pyramide proposita, etiam si non proprie. Quam ob rẽ in data Pyramide Dodecaedrum descripsimus. Quod faciendum erat.

[a] 19. quintidec.
[b] 5. quintidec.
[c] 8. quintidec.
[d] 18. quintidecimi.

PROBL. 21. PROPOS. 21. 13.

IN dato solido regulari sphæram describere.

EX centro sphæræ datum solidum cõplectentis ad singulas bases perpendiculares demittantur, quæ ex corol. lemmatis 1. propos. 10. lib. 14. cadent in centra circulorum bases circumscribentium, ideoque æquales erunt. quod dicti circuli, æquales cum sint, æqualiter a centro distent, ex lemmate 2. eiusdem propos. Quapropter sphæra, cuius semidiametri sunt præfatæ perpendiculares æquales, in solido descripta erit, cum eius superficies contingat singulas bases in earum centris.

SCHOLIVM.

ITAQVE, *cum quodlibet quinque solidorum regulariũ in quatuor reliquis inscribatur, vt sint in vniuersum viginti inscriptiones; vnum duntaxat Dodecaedrum improprie describitur in cubo, octaedro, atque pyramide, vt perspicuum est ex propos. 13. 17. & 20. huius lib. Similiter vnus tantummodo cubus non proprie in pyramide describitur, vt ex propos. 18. huius lib. est manifestum. Nam, vt proprie solidum aliquod in solido dicatur describi, necesse est, omnes angulos solidi inscripti cõstitui vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis, siue basibus solidi, cui inscribitur, vt defin. 31. lib. 11. exposuimus: quæ quidem conditio Dodecaedro, si describatur in cubo, octaedro, & Pyramide; nec non & cubo, si describatur in Pyramide, non conuenit.*

CÆTERVM *inter omnia quinque solida regularia, vnum octaedrum reliqua quatuor mutuo sibi inuicem suscipit inscripta.* [a] *In octaedro enim describitur Icosaedrum constituens duodecim suos angulos in duodecim pũctis, quibus duodecim latera octaedri extrema ac media ratione secãtur. Deinde* [b] *Icosaedro imponitur Dodecaedrũ, q eidẽ octaedro in-*

[a] 16. quintidecimi
[b] 5. quintidecimi

scriptum est, vt constat ex propos. 17. huius lib. Post hæc in Dodecaedro [a] describitur cubus, cuius octo anguli, cum octo angulis Dodecaedri conuenientes, centra basium octaedri possident; ac [b] propterea & cubus ipse in octaedro descriptus est. Denique in cubo Pyramis includitur, qua ideo in octaedro dicetur esse descripta, quod eius anguli quatuor, cum quatuor angulis cubi conuenientes, in centris quatuor basium octaedri resideant. Hoc autem priuilegium reliquis solidis regularibus denegari, perspicuum est ex dictis.

[a] 8. quinti decimi
[b] 1. quinti decimi

NEQVE vero prætereundum est, Dodecaedrum, sibique inscriptum cubum, & huic cubo inscriptam pyramidem, eadem sphæra comprehendi. [c] Cum enim quatuor anguli pyramidis ex octo angulis cubi quatuor possideant, [d] conueniantque omnes anguli cubi cum octo angulis Dodecaedri, liquido constat, sphæram Dodecaedro circumscriptam complecti quoq; cubum atque pyramidem, cum sphæræ illius superficies per horum solidorum angulos incedat.

[c] 1. quinti decimi.
[d] 8. quinti dec.

PARI ratione ex dictis manifestum est, Dodecaedrum, cubum, atque Pyramidem similiter inscribi Icosaedro, octaedro, & Pyramidi. Illorum enim anguli in horum basium centris constituuntur, vt demonstratum est: In centris quidem basium Icosaedri, propos. 5. 11. & 12. In centris vero basium octaedri, propos. 17. 4. & 6. In centris denique basium pyramidis propos. 20. & 18. huius lib.

VIGINTI porro prioribus huius lib. propositionibus omnes delineationes inscriptionesve quinque solidorum regularium, vnius in alio, quotquot excogitari possunt, absoluimus, cum in quolibet reliqua quatuor designauerimus. In pyramide enim Octaedrum, cubum, Icosaedrum, atque Dodecaedrum, propos. 2. 18. 19. 20: In octaedro vero, Pyramidem, cubum, Icosaedrum, & Dodecaedrum, propos. 6. 4. 16. 17. In cubo deinde Pyramidem, Octaedrum, Icosaedrum, ac Dodecaedrum, propos. 1. 3. 14. 13. In Icosaedro autem, pyramidem, Octaedrum, cubum, atque Dodecaedrum, propos. 12. 15. 11. 5. In Dodecaedro denique, Pyramidem, Octaedrum, cubum, & Icosaedrum propos. 10. 9. 8. 7. descripsimus. At vero posteriori vnica propositione, qua arte in quouis solido regulari sphæra depingatur, docuimus.

FINIS ELEMENTI QVINTIDECIMI.

ELEMEN-

ELEMENTVM SEXTVMDECIMVM,

Quo variæ solidorum regularium sibi mutuo inscriptorum, & laternm eorundem comparationes explicantur, a Francisco Flussate Candalla adiectum, & de quinque corporibus

LIBER TERTIVS.

QVEMADMODVM libro 14. tradita sunt comparationes quam plurimæ figurarum regularium, & laterum earundem in eadem sphæra descriptarum, quarum quidem descriptionem libro 13. exposuit Euclides; ita etiam Franciscus Flussas Candalla hoc lib. 16. inter se comparat easdem figuras regulares sibi mutuo inscriptas, nec non & earundem latera, quam quidem inscriptionem præcedenti lib. 15. tradidimus. Itaque eam connexionem habet hic liber 16. cum præcedenti 15. quam quartusdecimus cum tertiodecimo habuit; vt imperfecta quodammodo videri possit tractatio hæc quinque corporum regularium, si liber hic decimussextus non adiungatur.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI in Dodecaedro cubus describatur,

tur,& in hoc cubo aliud Dodecaedrum: erit proportio Dodecaedri exterioris ad Dodecaedrum interius proportionis, quam habet maius segmentum ad minus rectę lineę diuisę extrema ac media ratione, triplicata.

LATVS cubi in *Dodecaedro*, cuius latus *C*, descripti sit AB, & latus Dodecaedri in cubo lateris AB, descripti sit D; diuidaturque AB, latus cubi in E, extrema ac media ratione. Dico Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem habere triplicatam proportionis, quã habet *AE*, maius segmentum ad EB, minus. Cũ enim, vt in scholio vltimæ propos. lib. 15. docuimus, Dodecaedrum, cubusq; in illo descriptus, eadem comprehendantur sphæra; Diuiso autem latere cubi extrema ac media ratione, maius segmentum sit latus *D*odecaedri in eadẽ sphæra cum cubo descripti, ex coroll. 1. prop. 17. lib. 13. erit AE, maius segmentum lateris cubi æquale lateri *C*, Dodecaedri in eadẽ sphæra, & circa cubum illum descripti. Rursus quia ex demõstratis in scholio propos. 13. lib. 15. si diuidatur latus cubi extrema ac media ratione, minus segmentum est latus Dodecaedri in cubo illo descripti; erit EB, minus segmentum lateris cubi æquale lateri D, Dodecaedri, quod in illo cubo describitur; *A*c propterea erit vt C, latus Dodecaedri cubo circũscripti ad D, latus Dodecaedri eidẽ cubo inscripti, vt *A*E, maius segmentũ ad EB, minus: Atqui Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem habet triplicatã lateris C, ad latus D, ex coroll. propos. 17. lib. 12. Igitur idem Dodecaedrum lateris C, ad *D*odecaedrum lateris D, proportionem quoq; habet triplicatam maioris segmenti *AE*, ad minus segmentum EB. Quocirca si Dodecaedro cubus inscribatur, &c. Quod erat demõstrandũ.

THE-

THEOR. 2. PROPOS. 2.

LINEA perpendicularis ex quouis angulo pentagoni æquilateri, & æquianguli in latus oppositum demissa, secatur a recta illum angulum subtendente, extrema ac media ratione.

IN pentagono æquilatero, & æquiangulo ABCDE, ex angulo A, ad latus oppositum CD, perpendicularis demittatur AF. *D*ico AF, a recta BE, subtẽdente angulum A, secari in G, extrema ac media ratione. Ducta enim recta *A*D, quæ secet BE, in H; quoniam BE, recta lateri *C* D, ex scholio propos. 8. lib. 13. est parallela, [a] secabuntur rectæ A F, A D, proportionaliter: [b] Atqui *A*D, in H, secta est extrema ac media ratione, estque maius segmentũ *D*H. Igitur & A*F*, in G, similiter erit secta. Quocirca linea perpendicularis ex quouis angulo, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 2. sexti

[b] 18. tertij decimi.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI ab angulis trianguli Pyramidis ducantur rectę opposita latera secantes extrema ac media ratione, ita vt ppe quẽuis angulũ sit maius segmentum vnius lateris, & minus alterius: Hæ sectionibus suis in medio producent basin Icosaedri in dicta pyramide descripti, inscriptam

quidem

quidem alij triangulo æquilatero, cuius anguli latera trianguli pyramidis secant extrema ac media ratione, & latera ipsa bifariam secantur ab angulis basis Icosaedri.

TRIANGVLVM pyramidis sit *A B C*, cuius latera secentur bifariam in D, E, F, iunctis rectis DE, EF, FD, quibus rursum sectis extrema ac media ratione in G, H, I, iungantur rectæ GH, HI, IG, cõstituentes GHI, triangulum Icosaedri in dicta pyramide descripti, vt constat ex propos. 13. lib. 15. Secentur deinde latera trianguli A B C, extrema ac media ratione in K, L, M, iunctis rectis *B K*, CL, AM. Dico has rectas suis sectionibus producere triãgulũ *I*cosaedri GHI, hoc est, rectam *B K*, transire per puncta G, I; & rectam CL, per pũcta *H*, *I*; & rectam *A M*, per puncta G, H. Ducta enim per H, recta NO, ipsi B C, parallela; erit triangulum F*H*O, triangulo FEC, simile, ex coroll. propos. 4. lib. 6. ideoque & æquilaterum, cum & FEC, æquilaterum sit, quippe quod simile sit triangulo *A*BC, per idem coroll. Quare HO, recta æqualis est rectę FH, maiori segmento rectæ FE, seu DF, ipsi æqualis: (Est enim & DEF, triangulum æquilaterum, cum eius latera subtendant angulos æquales trianguli æquilateri rectis æqualibus, dimidiis scilicet æqualiũ laterum eiusdem trianguli comprehensos;) [a] ideoque æqualia sint. [b] Est autem & N H, æqualis toti D F, in parallelogrammo DH, [c] propterea quod FH, *DF*, parallelæ sunt rectis AB, BC, seu NO. Igitur recta NO, composita ex NH, tota, & HO, maiori segmento, [d] secta erit in H, extrema ac media ratione; Ac proinde, cum tres parallelæ *B C*, NO, DF, similiter sint sectæ in M, H, G, nimirum extrema ac media ratione; Recta autem AM, ex ijs, quæ demonstrauimus ad propos. 4. lib. 6. secet easdem similiter; liquido constat, ipsam AM, transire per puncta G, H. Haud secus ostendemus B K, per puncta G, I; & CL, per puncta H, I, transire, si per G, & I, rectæ ducantur parallelæ lateribus AC, AB; Atque idcirco rectæ B K, CL, *A M*, suis sectionibus producent triangulum Icosaedri GHI.

AGATVR iam per G, recta PQ, rectæ CL, parallela. Quoniam igitur AF, æqualis est rectæ DF, seu rectæ FE, cuius maius segmentum fuit *F H*, hoc est, FO, illi æqualis; Erit quoque F O, maius segmentum rectæ *A* F; ac proinde tota *A* O, secta in F, extrema ac media ratione: [a] Est autẽ vt AF, ad FO, ita AG, ad *G H*, ob triangulum A*H*O; & vt AG, ad GH, ita AQ, ad QC, & AP, ad PL, ob triangula A H C, AHL. Igitur & rectæ *A*H, AC, AL, secantur in G, Q, P, extrema ac media ratione, suntque maiora segmenta A G, *A* Q, AP. Rectæ ergo AQ, AL, segmẽta maiora rectarum æqualium AC, AB, æquales erunt. Quia uero est [c] vt AQ, maius segmẽtum, ad QC, minus, ita A L, tota ad *A* P, maius segmentum; Et est AQ, recta rectæ A L, æqualis: Erit & QC, recta æqualis rectæ *A* P. Quare & recta AP, minus segmentum erit lateris *A* B, maiusq; reliqua BP; ac propterea recta PQ, secabit latera B*A*, AC, extrema ac media ratione. Eadem ratione recta PR, quæ per *I*, ducitur parallela rectæ AM, secabit latera C B, B *A*, extrema ac media ratione, ideoque in punctum P, cadet, Non aliter recta RQ, per H, ducta parallela rectæ B*K*, latera AC, CB, secabit extrema ac media ratione, atq; adeo in puncta R, Q, cadet. Quoniam vero singula latera trianguli PQR, cum subtendant angulos æquales trianguli æquilateri æqualibus lineis comprehensos, nimirum maiore & minore segmento singulos, [d] æqualia inter se sunt; erit triãgulum PQR, ex ipsis compositum, equilaterum, cuius quidem latera bifariam secantur ab angulis trianguli Icosaedri G H I: (Cum enim in triangulo *A*C L, recta PQ, parallela sit lateri CL; secabuntur PQ, LC, in eadem rationes, ex ijs, quę ad propos. 4. lib 6. demonstrauimus: Diuiditur autem C L, bifariam in H, ob triangulũ *A*CL, in quo F H, parallela est lateri A L, [e] secans proportio-

[a] 4. primi.
[b] 34. primi.
[c] 2. sexti.
[d] 5. tertij dec.

5. tertij decimi.
[b] 2. sexti.
[c] 2. quarti dec.
[d] 4. primi
[e] 2. sexti.

portionaliter latera CA, CL. Igitur & PQ bifariam secatur in G. Eademque est ratio de reliquis QR, RP. Ac propterea triangulum Icosaedri GHI, inscriptum est triangulo æquilatero PQR, cuius anguli diuidunt latera basis pyramidis extrema ac media ratione, & latera ipsa bifariam secantur in G, H, I, ab angulis basis Icosaedri GHI. Quapropter, si ab angulis trianguli Pyramidis, &c. Quod ostendendum erat.

COROLLARIVM.

EX his facile colligi potest, latus Icosaedri octaedro inscripti, maius esse segmentum rectæ diuisæ extrema ac media rõne, quæ ab vno angulo basis octaedri ducta secat latus oppositum extrema quoque ac media ratione. Cum enim, vt constat ex propos. 16. lib. 15. GHI, triangulum sit Icosaedri in octaedro, cuius basis DEF, descripti; ducatur ex angulo F, trianguli FEC, quod trianguli DEF, est æquale, recta FS, parallela rectæ AM, secans MC, HO, in S, & T. [a] *Cum igitur MC, bifariam secetur in S, ob triangulum AMC;* [b] *sitque MS; ipsi GF, æqualis, ob parallelogrãmum GS; Erit & SC, æqualis eidem GF, minori segmento rectæ DF; Ac propterea cum totæ DF, EC, æquales sint; erit quoque reliqua ES, reliquæ DG, maiori segmento æqualis: Idcoque EG,* [c] *in S, secta erit extrema ac media ratione. Deinde* [d] *quia FE, FS, similiter secantur; secatur autem FE, extrema ac media ratione; secabitur & FS, in T, extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit FT, recta æqualis existens lateri Icosaedri GH, ob parallelogrammum GT. Igitur FT, latus Icosaedri octaedro inscripti, maius est segmentum rectæ FS, quæ diuidit EC, latus octaedri extrema ac media ratione, ex angulo F, demissa. Quod est propositum.*

[a] 2. sexti.
[b] 34. primi
[c] 2. sexti.
[d] 34. primi.

THE-

THEOR. 4. PROPOS. 4.

MINVS segmentum lateris Pyramidis extrema ac media ratione secti, duplum est potentia lateris Icosaedri in ea pyramide descripti.

BASIS Pyramidis sit ABC, cuius latera extrema ac media ratione secentur in *K*, L, *M*, & ductis rectis B*K*, CL, *A*M, producentibus GHI, basim Icosaedri in illa pyramide descripti, inscriptam triangulo æquilatero PQ*R*, cuius anguli latera trianguli A*B*C, secent extrema ac media ratione in P, Q, *R*, & ipsa latera PQ, QR, *R*P, bifariam diuidantur in G, H, I, vt in prop. præcedenti demonstratum est. Dico AP, minus segmentum lateris Pyramidis duplum esse potentia lateris Icosaedri HI. Cum enim PQ, dupla sit potentia minoris segmenti AP, ex coroll. 1. propos. 16. lib. 15. quadrupla vero potentia rectæ HI, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod PQ, recta dupla sit rectæ PG, hoc est, sibi æqualis HI, ob parallelogrammum PH; Erit PQ, potentia 4. & AP, 2 & HI, 1. Quamobrem AP, dupla erit potentia rectę HI. Minus ergo segmentum lateris, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, latus Icosaedri in pyramide descripti, esse Apotomen. [a] *Cum enim diameter sphæræ potentia sesquialtera sit lateris Pyramidis; si diameter ponatur Rationalis, erit & latus Pyramidis Rationale,* [b] *cũ diametro potentia sit cõmensurabile. Quare minus segmentũ lateris Pyramidis extrema ac media rõne secti Apotome erit; Atq; adeo* [c] *cũ minori* [d]

[a] 13. tertiidec.
[b] 6. dec.
[c] 6. tertiidecimi.
[d] 6. decimi

minori segmento lateris Pyramidis latus Icosaedri potentia sit commensurabile; (ostendimus enim minus segmentum potentia esse duplum lateris Icosaedri.) Erit & latus Icosaedri, ex scholio propos. 104. lib. 10. Apotome.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

LATVS cubi potentia dimidium est lateris Pyramidis in eo descriptæ: Latus vero Pyramidis duplum est longitudine lateris octaedri sibi inscripti: latus denique cubi duplum est potentia lateris sibi inscripti octaedri.

CVM enim latus Pyramidis in cubo descriptę diameter sit basis cubi, vt constat ex propos. 1. lib. 15. Sit autem quadratum huius diametri duplum basis cubi, hoc est, quadrati lateris cubi, ex scholio propos. 47. lib. 1. Manifestum est, latus cubi dimidium esse potentia lateris Pyramidis in cubo illo descriptę.

RVRSVS, quia rectę coniungentes bifarias sectiones laterum Pyramidis constituunt octaedrum in pyramide descriptum, vt liquet ex propos. 2. lib. 15. Est autem latus trianguli equilateri duplum rectę coniungentis bifarias eius sectiones, cum ea recta æqualis sit dimidio lateris trianguli, vt constat ex coroll. propos. 4. lib. 6. Nam cum sit parallela tertio lateri, auferet triangulum æquilaterum, &c. Perspicuum est latus pyramidis duplum esse longitudine lateris octaedri sibi inscripti.

[a] 2. sexti

DENIQVE [b] quia diameter sphęræ, seu octaedri potentia est dupla lateris octaedri; Est autem latus cubi æquale diametro Octaedri sibi inscripti, cum diameter octaedri coniungat centra basium cubi oppositarum, vt in coroll. propos. 3. lib. 15. diximus: patet, latus cubi potentia esse duplum lateris octaedri in eo descripti. Quocirca latus cubi potentia dimidium est lateris Pyramidis, &c. Quod erat ostendendum.

[b] 14. tertij dec.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

LATVS Dodecaedri maius segmentum est rectæ, quæ potentia est dimidia lateris Pyramidis sibi inscriptæ.

CVM enim Pyramis inscripta cubo, descripta sit quoque in Dodecaedro, cui ille cubus inscribitur, vt docuimus propos. 10. lib. 15. Sit autem latus dodecaedri maius segmentum, ex coroll. 1. propos. 17. lib. 13. lateris cubi, qui in eo describitur; [a] existat denique latus cubi dimidium potętia lateris Pyramidis sibi inscriptæ: Aperte colligitur, latus Dodecaedri maius esse segmentum rectæ, quæ potentia dimidia est lateris Pyramidis sibi inscriptæ. Quod erat demonstrandum.

[a] 5. sexti dec.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI in cubo describatur & Icosaedrũ, & Dodecaedrum: Latus Icosaedri medium proportionale erit inter latus cubi, & Dodecaedri.

SIT latus cubi A, & latus Icosaedri in eo descripti B, latus deniq; Dodecaedri in eodem cubo descripti C. Dico B, latus Icosaedri medio loco esse proportionale inter A, latus cubi, & C, latus Dodecaedri. Cum.n. ex ijs, quę in scholio propos. 14. lib. 15. demonstrata sunt, B, latus Icosaedri maius segmentum sit lateris cubi A; & C, latus Dodecaedri, per ea, quæ in scholio propos. 13. eiusdem lib. ostendimus, minus

A
B
C

nus segmentum sit eiusdem lateris cubi: Planum sit, ita esse A, totam ad B, maius segmentum, vt B, maius segmentum ad C, minus. Si in cubo itaque describatur & Icosaedrum, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

LATVS Pyramidis potentia octodecuplũ est lateris cubi in ea descripti.

CVM enim per ea, quæ propos. 18. lib. 15. sunt demõstrata, latus Pyramidis longitudine triplum sit diametri basis cubi in ea descripti; (ostensum. n. est ibi, GH, diametrum basis cubi inscripti tertiã esse partem lateris Pyramidis BC,) a Et quadrata proportionem habeãt laterum duplicatam: Erit quadratũ lateris Pyramidis nõcuplum quadrati diametri basis cubi in ea descripti, cũ nonecupla proportio sit triplæ duplicata, vt in his numeris 1. 3. 9. apparet. Quare, cũ quadratũ diametri basis cubi duplũ sit ipsius basis cubi, ex scholio propos. 47. lib. 1. fit, vt si ponatur basis cubi, hoc est, quadratũ lateris cubi 1. quadratũ eiusdẽ basis diametri sit 2. & quadratũ lateris pyramidis 18. Quamobrẽ latus Pyramidis potẽtia octodecuplũ est lateris cubi in ea descripti. Quod erat ostendendum.

a 20. sexti

THEOR. 9. PROPOS. 9.

LATVS Pyramidis potentia octodecuplum est rectæ extrema ac media ratione sectæ, cuius maius segmentũ latus est Dodecaedri in pyramide descripti.

CVM enim cubus in Dodecaedro descriptus, inscriptus quoque sit Pyramidi, cui illud dodecaedrũ inscribitur, vt docuimus in scholio prop. vlt. lib. 15. b Erit latus Pyramidis potẽtia octodecuplũ lateris cubi sibi, & Dodecaedro

b 8. sextidec.

caedro inscripti: Huius autẽ lateris cubi extrema ac media ratione secti maius segmentum est, ex coroll. 1. ppos. 17. lib. 13. latus Dodecaedri in pyramide descripti, in quo nimirum cubus est descriptus. Igitur latus Pyramidis potentia octodecuplum est rectę extrema ac media ratione sectæ, cuius maius segmentum latus est Dodecaedri in Pyramide descripti. Quod demonstrandum erat.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI in octaedro Icosaedrum describatur: Erit latus Icosaedri potentia duplũ minoris segmenti lateris octaedri extrema ac media ratione diuisi.

VT enim constat ex propos. 16. lib. 15. recta coniungens duas sectiones duorum laterum octaedri rectum angulum continentiũ prope minora segmenta, (qualis fuit ibi recta GI, subtẽdens angulum rectum GAI, minoribus segmentis AG, AI, comprehensum;) latus est Icosaedri in octaedro descripti. Quare, a cum hoc ipsum latus Icosaedri possit duo illa minora segmenta æqualia; duplum poterit vnius minoris segmenti. Si in octaedro ergo Icosaedrum describatur, &c. Quod erat demonstrandum.

a 47. primi.

THEOR. 11. PROPOS. 11.

LATVS octaedri potentia quadruplum sesquialterum est lateris cubi in ipso descripti.

SIT vna sex pyramidum octaedri ABCDE, cuius basis quadratũ ABCD, triangula vero ad E, verticẽ, ABE, EBC, CED, DEA, sintq; horum triangulorum centra F, G, H, I, per quæ rectæ ducantur KL, LM, MN, NK, rectis AB, BC, CD, DA, parallelę. Quod si coniungantur rectę

FG, GH, HI, IF; erit FGHI, quadratum cubi in octaedro descripti, vt demonstrauimus propos. 4. lib. 15. Quũ autem ducta recta EHO, sesquialtera est

[a] 2. sexti. rectæ EH, per coroll. propos. 18. lib. 14. qualium partium 3. ponetur EO, talium 2. erit EH: [a] Atqui vt EO, ad EH, ita est EB, ad EL. Igitur qualium partiũ 3. continet EB, talium 2. erit EL, seu LM, sibi æqualis; Ac proptera quadratum lateris octaedri EB, partium erit 9. & quadratum rectæ LM, nimirum KLMN, partium 4. ideoque & quadratum lateris cubi GH, videlicet FGHI, talium partium 2. cum quadratum LN, duplum sit quadrati GI, sibi inscripti, per ea, quę in scholio propos. 47. lib. 1. demonstrauimus. Est enim LN, quadratum ex diametro quadrati GI, descriptum; [b] cum GI, diameter (si ducatur) æqualis sit lateri LM. Quapropter latus octaedri EB, potentia quadruplum sesquialterum est lateris cubi GH, cum eorum quadrata proportionem habeant, quam 9. 2. Latus igitur octaedri potentia quadruplum sesquialterum est lateris cubi in eo descripti. Quod erat demonstrandum.

[b] 33. primi

COROLLARIVM.

QVIA vero latus cubi extrema ac media ratione diuisum efficit maius segmentũ latus Dodecaedri, cui inscribitur, per corol. 2. prop. 13. lib. 15. Inscribiturque Dodecaedrum, & cubus sibi inscriptus, eidẽ octaedro, vt docuimus in scholio propos. vltimæ lib. 15. Perspicuum fit, octaedri latus esse potentia quadruplum sesquialterum eius rectæ extrema ac media ratione diuisæ, cuius maius segmentum latus est Dodecaedri octaedro inscripti. Est enim eiusmodi rectæ latus cubi eidem octaedro inscripti, cuius quadruplum sesquialterum potentia esse ostẽdimus latus octaedri.

THEOR.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

LATVS Icosaedri maius segmentum est eius rectæ extrema ac media ratione sectæ, quæ potentia dupla est lateris octaedri in Icosaedro descripti.

QVONIAM Icosaedri in cubo descripti sex latera opposita in sex basibus cubi collocata sunt, quorum bifarias sectiones coniungunt tres rectæ lateri cubi æquales, vt constat ex propos. 14. lib. 15. eiusque scholio. Et in bifariis sectionibus dictorum sex laterum Icosaedri residentsex anguli octaedri in Icosaedro descripti, ex propos. 15. eiusdem lib. 15. Fit diametrum octaedri in dicto Icosaedro descripti æqualem esse lateri cubi, in quo Icosaedrum describitur. Quare, cum per ea, quæ ad propos. 14. lib. 15. ostendimus, latus Icosaedri sit maius segmentum lateris cubi prædicti extrema ac media ratione diuisi; Erit quoque idem latus Icosaedri maius segmentum diametri octaedri in illo Icosaedro descripti. [a] Atqui diameter sphæræ, seu octaedri dupla est potentia lateris octaedri. Igitur latus Icosaedri maius segmentum est eius rectæ extrema ac media ratione sectæ, quæ potentia dupla est lateris octaedri in Icosaedro descripti. Quod ostendendum erat.

[a] 14. tertij dec.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

LATVS cubi ad latus Dodecaedri in ipso descripti proportionẽ habet duplicatam eius, quam habet maius segmẽtum ad minus rectæ lineæ diuisæ extre-

ma ac media ratione. Latus vero Dodecaedri ad latus cubi in ipso descripti proportionem habet, quam minus segmentum ad maius eiusdem rectæ lineæ.

OSTENSVM est in scholio propos. 13. lib. 15. Minus segmẽtũ lateris cubi extrema ac media ratione sectæ esse latus Dodecaedri in cubo illo descripti. Cum ergo tota linea extrema ac media ratione diuisa ad minus segmentum proportionẽ habeat duplicatã proportionis totius lineę ad maius segmentũ, vel maioris segmẽti ad minus, (quod tota linea, maius segmentũ, atque minus, sint tres rectæ continue proportionales:) liquido constat, proportionem lateris cubi ad latus dodecaedri in ipso descripti esse quoque proportionis maioris segmenti ad minus duplicatam.

PRAETEREA, cum cõstet ex coroll. 1. prop. 17. lib. 13. maius segmentũ lateris cubi extrema ac media ratione diuisi latus esse Dodecaedri, cui cubus inscribitur; manifestũ est esse vt latus Dodecaedri, hoc est, maius segmẽtum, ad latus cubi in ipso descripti, hoc est, ad totam lineam extrema ac media ratione sectam, ita minus segmentum ad maius. Cum enim sit, vt tota linea ad maius segmentum, ita maius segmentum ad minus; Erit quoq; conuertendo, vt maius segmentum ad totam lineam, ita segmentum minus ad maius. Latus ergo cubi ad latus Dodecaedri, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

LATVS Octaedri sesquialterum est lateris sibi inscriptæ Pyramidis.

SIT vna sex pyramidum Octaedri ABCDE, cuius basis quadratũ ABCD, triangula autẽ ad verticẽ E, sint ABE, EBC, CED, DEA, sintque horum triangulorũ cẽtra F, G, H, I, quæ rectis iungãtur FG, GH, HI, IF, quadratum

dratum cubi in Octaedro descripti constituentibus, vt docuimus in propos. 4. lib. 15. Quoniã vero Pyramis in cubo descripta, describitur quoq; in Octaedro, cui cubus imponitur, vt in scholio propos. vltimæ lib. 15. exposuimus; Estque latus pyramidis in cubo descriptæ diameter basis cubi, vt cõstat ex ppos. 1. lib. 15. Erit ducta diameter GI, latus Pyramidis in Octaedro dicto descriptæ. Dico igitur latus octaedri BC, sesquialterũ esse lateris Pyramidis GI. Ductis enim rectis EGK, EIL, diuidentur latera AB, CD, bifariam in K, L, ex scholio propos. 12. lib. 13. ipsæque EK, EL, sesquialterę erunt rectarum EG, EI, per coroll. prop. 18. lib. 14. [a] Ac propterea GI, parallela erit rectæ KL, auferens, per coroll. propos. 4. lib. 6. triangulũ EGI, simile triangulo EKL. Quare erit, vt EK, ad KL, ita EG, ad GI; & permutando, vt EK, ad EG, ita KL, ad GI; ideoque cũ EK, sesquialtera sit ipsius EG, erit & KL, sesquialtera ipsius GI. [b] Cum ergo BC, æqualis sit ipsi KL, quod & BK, CL, æquales sint, & parallelæ; Erit BC, latus octaedri sesquialterum lateris Pyramidis GI, sibi inscriptæ. Quod erat demonstrandum.

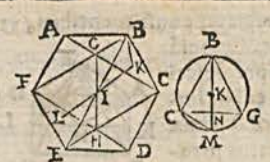
[a] 2. sexti.

[b] 33. primi

THEOR. 15. PROPOS. 15.

SI ex quadrato diametri Icosaedri auferatur triplũ quadrati lateris cubi in eo descripti; relinquitur quadratum sesquitertium quadrati lateris Icosaedri.

SIT Icosaedrum ABCDEFGH, cuius diameter BE, & centrũ I; triangula vero opposita & parallela, per coroll. 4. propos. 14. lib. 13. BCG, EFH, quorum centra K, L. Ducatur ex cẽtro I, ad planũ BCG, perpẽdicularis IK, cadens, ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. lib. 14. in



centrum *K*. Producta igitur *KI*, perpendicularis quoque erit ad planum *EFH*, parallelum plano *BCG*, per scholium propos. 14. lib. 11. cadetque idcirco in centrum L. per coroll. præfati lemmatis. Quam ob rem, cum cubus in *I*cosaedro descriptus statuat suos angulos in centris basium *I*cosaedri, vt cõstat ex propos. 11. lib. 15. atque adeo angulos oppositos in centris basium oppositarum; Erit *KL*, diameter cubi in *I*cosaedro descripti, transiens per *I*, centrum *I*cosaedri. Cum ergo eadem ratione reliquæ diametri cubi per idem centrum *I*, transeant, erit *I*, quoque centrum cubi inscripti, ideoque *IK*, *IL*, semidiametri æquales: Coniũcta autem *K B*, semidiametro circuli triangulum *BCG*, circumscribentis, erit angulus *B K I*, rectus, ex defin. 3. lib. 11. [a] Ac proinde quadratum rectæ *BI*, æquale quadratis rectarum *BK*, *KI*. Igitur & quadratum diametri *BE*, quadruplum existens quadrati semidiametri *BI*, vt in scholio propos. 4. lib. 2. ostendimus, æquale erit quadratis duarum rectarum, nempe diametri circuli triangulum *BCG*, circumscribentis, & *KL*. Sunt enim & hæc quadrata, per idem scholium, quadrupla quadratorum ex semidiametris *BK*, *KI*, descriptorum. Ablato ergo quadrato diametri cubi KL, ([b] quod triplum est quadrati lateris cubi.) ex quadrato diametri *I*cosaedri *BE*, remanet quadratũ diametri circuli triangulũ *BCG*, circũscribentis. Hoc igitur dico sesquitertium esse quadrati lateris *I*cosaedri *BC*. Describatur enim ex centro *K*, circa triangulũ æquilaterũ *BCG*, circulus, extensaq; *BK*, vsque ad *M*, quæ secet *CG*, in *N*, ducatur quoque recta *CM*. Quoniam igitur *BN*, per centrũ *K*, ducta perpendicularis est ad *CG*, per ea, quæ ostẽdimus in schol. propos. 12. lib. 13. [c] erit recta *BC*, potẽtia sesquitertia rectæ *BN*: Vt autem *BC*, ad *BN*, ita est *BM*, ad *BC*, quod *BC*, sit media proportionalis inter *BM*, & *BN*, ex corol. propos. 8. lib. 6. [d] cũ angulus *BCM*, rectus sit in semicirculo existẽs. Recta igitur *BM*, potentia quoq; sesquitertia est rectæ

[a] 47. primi

[b] 15. tertij dec.

[c] 12. quarti dec.

[d] 31. tertij.

rectæ *BC*; Ac propterea quadratũ diametri *BM*, sesquitertiũ est quadrati lateris *BC*. Quapropter si ex quadrato diametri Icosaedri, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

HINC fit, diametrũ Icosaedri binas rectas posse, diametrum scilicet cubi in ipso descripti, & diametrum circuli triangulum Icosaedri ambientis. Ostensum siquidem est, quadratum diametri Icosaedri BE, æquale esse quadratis diametri cubi KL, & diametri circuli triangulum BCG, circumscribentis.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

LATVS Dodecaedri minus segmẽtum est rectę lineę extrema ac media ratione diuisæ, quæ duplum potest lateris Octaedri in eo descripti.

QVONIAM diameter Octaedri in Dodecaedro descripti [a] duplum potens lateris octaedri, coniungit bifarias sectiones laterum oppositorum Dodecaedri, vt manifestum est ex prop. 9. lib. 15. Est autem rectæ dictas sectiones cõiungentis diuisę extrema ac media ratione minus segmentũ latus Dodecaedri, ex coroll. 4. prop. 17. lib. 13. Liquet, latus Dodecaedri minus segmentum esse eius rectæ extrema ac media ratione diuisæ, quę duplum potest lateris octaedri in eo descripti, cum huiusmodi recta coniũgat bifarias sectiones laterum Dodecaedri oppositorum, cuius quidem minus segmentum est latus Dodecaedri, ex prædicto coroll. Itaque latus Dodecaedri minus segmentum est rectæ lineæ extrema ac media ratione, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 14. tertij decimi

THEOR.

THEOR. 17. PROPOS. 17.

DIAMETER Icosaedri potest & sui ipsius lateris sesquitertium, & lateris Pyramidis in eo descriptæ sesquialterum.

CVM cubus & Pyramis in eo descripta, in eodē Icosaedro describātur, vt docuimus in scholio prop. vltimę lib. 15. eademque sphæra comprehendantur; eadem erit diameter cubi, & diameter sphæræ pyramidē circundantis: [a] potest autem diameter sphæræ sesquialterum lateris Pyramidis. Igitur & diameter cubi in Icosaedro descripti, in quo & Pyramis describitur, sesquialterum poterit lateris pyramidis in ipso cubo, & Icosaedro descriptæ: Atqui diameter circuli basim Icosaedri circumscribentis sesquitertium potest lateris Icosaedri, vt in demonstratione propos. 15. huius lib. demonstrauimus. Igitur diameter Icosaedri potens & diametrum cubi in ipso descripti, & diametrum circuli basin Icosaedri circūdantis, ex coroll. propos. 15. huius lib. potest & suiipsius lateris sesquitertium, nimirum diametrum circuli circa basim Icosaedri descripti, & lateris Pyramidis in eo descriptæ sesquialterum, nempe diametrum cubi. Quod erat demonstrandum.

[a] 13. tertij decimi

THEOR. 18. PROPOS. 18.

LATVS Dodecaedri ad sibi inscripti Icosaedri latus se habet, vt minus segmentū lineæ perpendicularis ab vno angulo pentagoni ad latus oppositū ductæ, atque extrema ac media ratione di-

uisæ,

uisæ, ad partem eiusdem lineæ inter centrum pētagoni, & latus eiusdem positæ.

SIT dimidium Dodecaedrum contentum sex pentagonis ABMLK, LXIHP, PHGFO, OFEDN, NDCBM, LMNOP, quorum centra Q, R, S, T, V, X, (quælibet videlicet duo proxima) iungantur rectis QR, RS, ST, TV, VQ, QX, RX, SX, TX, VX. Constituta sunt igitur quinque triangula Icosaedri in Dodecaedro descripti componentia angulum solidum X, in centro pentagoni LMNOP, vt ostensum est in demonstratione propos. 7. lib. 15. A duobus angulis pentagonorum D, K, in cōmunem basim BM, per centra R, Q, rectæ demittantur DY, KY,

quæ quoniam bifariam, & ad rectos angulos secant latus BM, per coroll. 2. propos. 10. lib. 13. conuenient in pūcto Y. Quod si subtendatur recta AL, angulo K; secabitur [a] perpendicularis KY, in Z, extrema ac media ratione. Dico ita esse latus Dodecaedri IM, ad latus Icosaedri sibi inscripti QR, vt KZ, minus segmentum perpendicularis KY, ad rectam QY, inter centrum Q, & latus BM, interceptam. Subtensa enim recta DK, quæ, per demonstrata in scholio propos. 13. lib. 15. latus est cubi, [b] in quo Dodecaedrum propositum describitur; erit LM, latus Dodecaedri, minus segmentum ipsius DK, si extrema ac media ratione secetur, ex eodē scholio propos. 13. lib. 15. Quoniam vero latera YD, YK, trianguli YDK, proportionaliter secantur in R, & Q, (sunt enim RD, QK, semidiametri circulorum æqualium æquales; necnon & YR, YQ, distantiæ nimirum rectæ BM, a centris R, & Q, eorundem circulorum æqualium) [b] parallela erit QR, ipsi DK; Ideoque triangulū YRQ, triangulo YDK, simile per coroll. propos. 4. lib. 6. [c] Quam ob rem erit, vt DK, ad KY, ita QR, ad QY. [d] Vt autem

[a] 3. sexti decc.

[b] 2. sexti
[c] 4. sexti.
[d] 2. quarti decc.

autem DK, tota ad totam K Y, ita est LM, minus segmentum ad minus K Z. Vt igitur L M, ad K Z, ita erit QR ad QY; Et permutando, vt LM, latus Dodecaedri ad QR, latus Icosaedri sibi inscripti, ita KZ, minus segmentum perpendicularis K Y, ad QY, inter centrum Q, & latus BM, interpositam. Latus ergo Dodecaedri ad sibi inscripti Icosaedri latus, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 19. PROPOS. 19.

SI dimidium lateris Icosaedri extrema ac media ratione sectum fuerit, minusq; eius segmentum a toto latere Icosaedri sublatum; a reliqua quoque recta pars rursum tertia detracta: Relinquetur latus Dodecaedri in Icosaedro descripti.

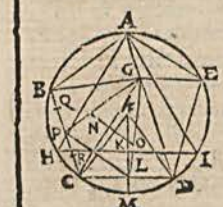
CIRCA pentagonum ABCDE, ex quinque lateribus Icosaedri compositum circulus describatur, cuius centrū F; & super quinque latera pentagoni quinque triangula æquilatera excitentur constituentia angulum solidum Icosaedri G, ex iis, quæ in propos. 16. lib. 13. sunt demonstrata. In dicto deinde circulo triangulum æquilaterū inscribatur AHI. Quoniā igitur arcus ABC, AED, æquales sunt, cū quilibet duas quintas partes totius circumferentiæ cōtineat, necnon & duo arcus ABH, AEI, cū sint tertiæ partes eiusdē circūferentiæ; erunt reliqui arcus HC, ID, æquales; ppeaque rectæ HI, CD, parallelæ, per scholium propos. 27. lib. 3. Ad quas ex cētro F, perpendicularis deducatur FKL, secans rectas HI, CD, bifariam in K, & L; coniunganturque rectæ FC, FD. Suscipiantur insuper triangulorum æquilaterorum GBC, GCD, centra N, & O, per quæ rectæ ducantur GNP, GOL, diuidentes, per scholium propos. 12. lib. 13. latera oppositа BC, CD, bifariam, & ad angulos rectos. Itaq; recta GO, in punctum L, in quo diuisa est CD, bifariam, cadet. Iungantur autem centra N, O, recta NO, quæ, vt constat ex demoustratis in propos. 5. lib. 15. latus erit dodecaedri in Icosaedro descripti. Denique BP, dimidium lateris Icosaedri secetur in Q, extrema ac media ratione; & ablato minori segmento BQ, ex toto latere BC, reliquæ CQ, tertia pars detrahatur CR. Dico reliquā QR, æqualē esse lateri Dodecaedri NO. Cum enim FL, perpendicularis a latere trianguli æquilateri HI, secetur in K, extrema ac media ratione; (quod FL, hac ratione secta faciat maius segmentum æquale perpendiculari FK, per corollarium propositionis 2. lib. 14.) sit autem maiori segmento FK, æqualis recta KM, per coroll. propos. 12. lib. 13. Erit ex iis, quæ demōstrauimus ad propos. 5. lib. 13. maius segmentum KM, sectum quoque in L, a minori segmento KL, extrema ac media ratione; Ac proinde recta FM, excedit rectam FL, minore dimidiæ suiipsius segmento LM. Quoniam vero iuncta PL, est latus pentagoni æquilateri, & æquianguli in pentagono ABCDE, descripti, idemque centrum F, habentis, ex scholio vltimo lib. 4. ideoque similis illi; erunt triāgula FCD, FPL, (si recta duceretur FP,) similia, per scholiū propos. 20. lib. 6.[b] Quare vt FC, ad CD, ita erit FL, ad LP, & permutando, vt FC, ad FL, ita CD, ad LP: Atqui FC, hoc est, sibi æqualis FM, excedit rectā FL, minore segmento dimidij ipsius FM, nempe minore segmēto rectæ KM, vt ostendimus. Recta igitur CD, vel sibi æqualis BC, excedet quoque rectam LP, minore segmento dimidij ipsius BC, nimirum minore segmento rectæ

[a] 3. tertij.

[b] 4. sexti

BP, quod fuit BQ; ideoque reliqua CQ, rectæ PL, æ-
qualis erit. Rursus quia GP, GL, proportionaliter se-
cantur in centris N, O; (quod GN, GO, duplæ sint ipsa-
rum NP, OL, per coroll. propos. 18. lib. 14.) [a] parallelę
erunt PL, NO; ac proinde triangulum GNO, triangulo
GPL, simile, ex coroll. propos.
4. lib. 6. Igitur erit vt GP, ad PL,
ita GN, ad NO; & permutando,
vt GP, ad GN, ita PL, ad NO:
Est autem GP, ipsius GN, sesqui-
altera, per coroll. propos. 18. lib.
14. Quare & PL, hoc est, sibi æ
qualis CQ, sesquialtera erit ip
sius NO; Ac proinde, cum CQ,
sesquialtera quoq; sit rectæ QR.
(Nam qualium partiũ 3. est CQ.
talium 1. est CR, per constructionem; Ac propterea ea-
rundem 2. QR,) æqualis erit QR, ipsi NO, lateri De-
decaedri in Icosaedro descripti. Si dimidium itaque la-
lateris Icosaedri extrema ac media ratione sectum fu-
erit, &c. Quod erat demonstrandum.

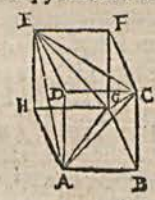
[a] 2. sexti.



THEOR. 20. PROPOS. 20.

CVBVS sibi inscriptæ pyramidis triplus est.

IN cubo AF, descripta sit pyramis ACEG. Dico cu
bum pyramidis triplum esse. Cum enim inscriptam pyra
midem æquilaterã circumstent quat-
tuor pyramides fundatæ super quat-
tuor bases ipsius, vertices vero ha-
bentes reliquos quatuor angulos cu
bi, in quibus nõ resident quatuor an
guli pyramidis æquilaterę inscriptę:
(Nã super basin ACE, fundatur py-
ramis ACED; super basin AEG, py-
ramis AEGH, super basin CEG, pyramis CEGF; & su-
per



per basin ACG, pyramis ACGB: quæ quidem quatuor
pyramides æquales sunt, ex 10. defin. lib. 11. cum conti-
neantur planis similibus æqualibusq; & multitudine &
magnitudine. Quælibet. n. cõstat tribus æqualibus & si-
milibus triangulis, dimidiis scilicet quadratorum cubi,
vt patet, & vno triangulo pyramidis æquilateræ inscri-
ptę.) Sit autẽ cubus cuiuslibet harum pyramidum sextu-
plus; (Nã exempli causa, pyramis ABCG, basim habens
ABC, dimidium basis cubi BD, altitudinẽ vero eandem,
quã cubus, rectã videlicet BG, tertia pars est, per coroll.
1. propos. 7. lib. 12. prismatis eandem basin, & altitudinẽ
habentis.) [a] Cum igitur cubus duplus sit eiusmodi prisma
tis, quod & basis cubi dupla sit basis prismatis; manife-
stũ est pyramidem ABCG, sextã partem esse cubi, pro-
pterea; cubum pyramidis illius esse sextuplum.) Effici-
tur, quatuor illas pyramides circumstantes, quatuor esse
sextas partes, id est, duas tertias partes cubi; Ac proin-
de reliquã pyramidẽ æquilaterã ACEG, cubo inscriptã
eiusdem cubi tertiam esse partẽ. Cubus igitur sibi inscri
ptæ pyramidis triplus est. Quod erat demonstrandum.

[a] 32. vnde.

ALITER. Cum cubus, & in eo descripta pyramis ea-
dem sphæra comprehendantur, vt docuimus in scholio
propos. vltimæ lib. 15. [b] Cubus vero triplus sit pyramidis
in eadem sphæra descriptæ, vt demonstratum est; perspi
cue colligitur, cubũ triplũ esse sibi inscriptæ pyramidis,
siquidem hæc in eadẽ sphęra, in qua cubus, continetur.

[b] 32. quar-
tidec.

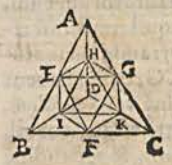
THEOR. 21. PROPOS. 21.

PYRAMIS sibi inscripti octaedri dupla est.

IN pyramide ABCD, descriptũ sit octaedrum EIK-
GHF. Dico pyramidẽ octaedri esse duplam. Cum enim
octaedrũ circumstent quatuor pyramides pyramidi AB-
CD, similes, vt prop. 3. lib. 12. demonstratum est, fundatæ
super quatuor bases octaedri EGH, EFI, FGK, HIK;
quales sunt pyramides EGHA, EFIB, FGKC, HIKD:

(quæ

(quæ quidem æquales inter se sunt, ex defin. 10. lib. 11. cum contineantur triangulis similibus, æqualibusq; numero & magnitudine, quippe quæ similia sint basibus pyramidis æquilateræ ABCD, per coroll. propos. 4. lib. 6. lateraque habeant æqualia, nempe dimidia laterum æqualium eiusdem pyramidis ABCD, ex constructione propos. 2. lib. 15.) [a] H habeant autem pyramides similes proportionem homologorum laterum triplicatam; Erit pyramis ABCD, octupla cuiuslibet illarum quatuor pyramidum octaedro circumpositarum, (cum octupla proportio, sit proportionis duplæ, qualem habent latera pyramidis ABCD, ad latera dictarum quatuor pyramidũ, triplicata, vt in his numeris 1. 2. 4. 8. perspicue apparet) hoc est, quælibet illarum quatuor pyramidum pars erit octaua pyramidis ABCD; Atque idcirco omnes quatuor dictæ pyramides quatuor partes octauas, id est, dimidium pyramidis ABCD, conficient. Quare & reliquum octaedrum EIKGHF, reliqua erit dimidiata pars eiusdem pyramidis ABCD. Pyramis igitur sibi inscripti octaedri dupla est. Quod erat demonstrandum.



[a] 8. duodec.

THEOR. 22. PROPOS. 22.

CVBVS sibi inscripti octaedri sextuplus est.

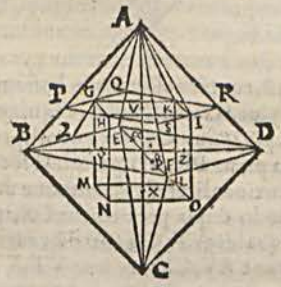
QVONIAM si pyramis in cubo describatur, & in pyramide octaedrum; octaedrum in cubo quoque inscriptum est, vt constat ex secunda demonstratione propos. 3. lib. 15. [b] Est autem cubus pyramidis in eo descriptæ triplus, [c] & pyramis octaedri sibi inscripti dupla; Fit, vt qualium partium 6. ponatur cubus, talium 2. sit pyramis, & earundem 1. contineat octaedrum; atque adeo cubus octaedri sit sextuplus. Quare cubus sibi inscripti octaedri sextuplus est. Quod erat demonstrandum.

[b] 10. sextidec.
[c] 11. sextidec.

THEOR. 23. PROPOS. 23.

OCTAEDRVM sibi inscripti cubi quadruplum sesquialterum est.

IN octaedro ABCDEF, cubus descriptus sit GHIKLMNO, angulos suos statuens in centris basiũ octaedri. Dico octaedrum cubi esse quadruplum sesquialterũ. Assumpta enim pyramide octaedri BEDFA, ducantur per G, K, I, H, centra quatuor basium octaedri, rectæ PQ, QR, RS, SP, lateribus BE, ED, DF, FB, parallelæ quadratum consti tuẽtes PQRS, vt in 14. propos. 4. lib. 15. est demonstratum; [a] quod quidẽ parallelum erit quadrato BEDF. Ducatur quoque octaedri diameter AC, perpendicularis existens ad quadratum BEDF, in centro T, per ea, quæ ostendimus in coroll. 1. propos. 14. lib. 13. AC proinde perpendicularis ad bases cubi GI, MO, in punctis V, X, per scholium propos. 14. lib. 11. Est autem V, centrum quadrati PQRS; [b] (cum enim plana BEDF, PQRS, parallela secẽt rectas æquales AB, AE, AD, AF, proportionaliter; erunt & AP, AQ, AR, AS, æquales. Intelligantur ductæ rectæ VP, VQ, VR, VS. [c] Quoniam igitur æqualia quadrata rectarum æqualium AP, AQ, æqualia sunt quadratis rectarum AV, VP; AV, VQ, quod anguli AVP, AVQ, recti sint, per defin. 3. lib. 11. dempto communi quadrato rectæ AV; æqualia erunt reliqua quadrata rectarum VP,

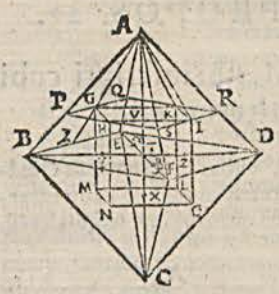


[a] 15. vnde.
[b] 17. vnde.
[c] 47. primi

VQ, propterea q; & rectæ ipſæ VP, VQ, æquales. Non aliter oſtendemus & hiſce, & inter ſe æquales eſſe rectas VR, VS. Quare V, centrum eſt quadrati PQRS.) Igitur & centrum erit quadrati GHIK, in illo deſcripti, per ſcholium vltimum lib. 4. Secantur autem latera PQ, QR, RS, SP, bifariam in G, K, I, H, vt conſtat ex demõſtratis in propoſ. 4. lib. 15. Eodem argumento cõcludemus X, centrũ eſſe baſis LMNO, Nec non & alias diametros ductas BD, EF, per Y, Z, α, β, centra reliquarum baſium tranſire. Ducta iam recta Aγ, per G, centrum trianguli æquilateri ABE; erit AG, dupla ipſius Gγ, per coroll. propoſ. 18. lib. 14.[a] Cum ergo plana PR, BD, parallela ſecent rectas Aγ, AT, proportionaliter; dupla quoque erit AV, ipſius VT. Eodem modo dupla probabitur CX, ipſius XT; Ac proinde cum æquales AT, CT, ſimiliter ſecentur in V, & X; æquales erunt AV, CX: nec non VT, XT. Recta igitur VX, cõiungens centra baſium cubi oppoſitarum, bifariam ſecatur in T. Quare cum ad eundem modum YZ, αβ, bifariam ſecentur in T, erit T, centrum cubi; cum, per coroll. 1. propoſ. 15. lib. 13. rectæ centra baſium cubi oppoſitarum cõnectentes ſe ſe bifariã ſecẽt in cẽtro. Iã vero, qm̃ VX, ipſius VT, dupla eſt; dupla aũt fuit & AV, eiuſdẽ VT; æqualis erit AV, ipſi VX, nẽpe altitudini cubi. Quare pyramis GHIKA, ductis rectis AI, AK, AH, tertia pars eſt cubi, ſeu priſmatis GO, per coroll. 1. prop. 7. lib. 12. cum vtriuſq; eadẽ ſit baſis GI, & altitudines æquales AV, VX:

[a] 17. vnde.

[b] 6. duode.



[b] Eſt autem pyramis PQRSA, pyramidis GHIKA, dupla, quod & baſis PQRS, dupla ſit baſis GHIK, illi inſcriptæ. Igitur pyramis PQRSA, duas tertias partes cubi GO, continet. Quia vero pyramides BEDFA, PQRSA, ſimiles exiſtentes, per defin. 9. lib. 11. (cum triangula huius

huius ſimilia ſint, ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. triangulis illius.) proportionem habent laterum homologorum triplicatam; Eſt autem latus AB, lateris AP, ſeſquialterũ, quod & recta Aγ, proportionaliter ſecta ipſi AB, ſeſquialtera ſit ipſius AG; Erit pyramis BEDFA, ad pyramidẽ PQRSA, vt 27 ad 8. hæc enim proportio triplicata eſt proportionis ſeſquialteræ 3. ad 2. vt in his numeris 8. 12. 18. 27 conſtat; Ac proinde totum octaedrum ABCDEF, duplum exiſtens pyramidis BEDFA, proportionẽ habebit ad eandem pyramidem PQRSA, quam 54. ad 8. At qualium partium 8. ponitur pyramis PQRSA, taliũ 12. eſſe cubum GO, iam demonſtratum eſt. (Nam nume 8. duas tertias continet numeri 12.) Igitur octaedrum ABCDEF, ad cubum GO, proportionem habet, quam 54. ad 12. hoc eſt, in minimis numeris, per 35. propoſ. lib. 7. repertis, quam 9 ad 2. quæ quidem proportio quadrupla ſeſquialtera eſt. Octaedrum itaque ſibi inſcripti cubi quadruplum ſeſquialterum eſt. Quod erat oſtendendum.

[a] 8. duodec.

[b] 2. ſexti

COROLLARIVM I.

IDEM ergo centrum eſt octaedri, atq; cubi ſibi inſcripti. oſtendimus enim T, vtriuſque eſſe centrum.

COROLLARIVM II.

PERSPICVE etiam hinc inferemus, Octaedrum ad ſibi inſcriptum cubum eandem habere proportionem, quam eorum laterum quadrata habent.

[c] Nam quadrata ipſorum laterum proportionem habent quadruplam ſeſquialteram, qualem videlicet demonſtrauimus habere octaedrum ad ſibi inſcriptum cubum.

[c] 11. ſexti dec.

THEOR. 24. PROPOS. 24.

OCTAEDRVM sibi inscriptæ Pyramidis tredecuplum sesquialterum est.

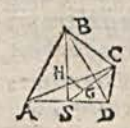
QVONIAM vt ostendimus ad finē lib. 15. cubus, sibique inscripta pyramis in eodem octaedro describuntur; [a] Est autem octaedrum cubi in eo descripti quadruplum sesquialterum; & cubus sibi, ac proinde octaedro, inscriptæ pyramidis [b] triplus: qualium partium 2. ponetur pyramis, talium 6. erit cubus, & earundem 27. octaedrum. Habent enim 27. ad 6. proportionem quadruplā sesquialteram, & 6. ad 2. triplam. Igitur octaedrum ad sibi inscriptam pyramidem proportionem habet, quā 27. ad 2. hoc est, tredecuplam sesquialteram. Ac propterea octaedrum sibi inscriptæ pyramidis, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 22. sexti dec.
[b] 20. sexti dec.

THEOR. 25. PROPOS. 25.

PYRAMIS sibi inscripti cubi nōcupla est.

IN pyramide A B D C, cubus intelligatur descriptus.



Dico pyramidem cubi esse nōcuplam. Assumantur enim G, H, cētra duarum basium A C D, A B D, commune latus AD, habentium, per quæ ex angulis C, B, ad latus commune oppositum A D, rectæ ducantur CGS, BHS, diuidentes latus A D, bifariam, & ad angulos rectos, per scholium propos. 12. lib. 13. ac propterea conuenientes in medio puncto S. Cōnexa vero recta GH; cum BH, CG, duplæ sint rectarum HS, GS, ex coroll. propos. 18.

18. lib. 14. ac proinde proportionaliter secentur BS, CS, [a] parallelæ erunt BC, HG, & per coroll. propos. 4. lib. 6. triangulum HGS, triangulo BCS, simile. [b] Erit ergo vt BC, ad CS, ita HG, ad GS; & permutādo, vt BC, ad HG, ita CS, ad GS: [c] Est autem CS, ipsius GS, tripla. Igitur & BC, tripla erit ipsius HG. Quoniam autem latus pyramidis descriptæ in cubo diameter est basis cubi, vt in propos. 1. lib. 15. demonstratum est; Recta vero connectens duo centra basium pyramidis commune latus habentiū diameter est basis cubi in pyramide descripti, vt perspicuum est ex demonstratis in propos. 18. lib. 15. (Ibi enim recta GH, iungens centra G, H, basium ACD, ABD, cōmune latus AD, habētium diameter fuit basis GNHQ, cubi descripti in pyramide.) Erit latus pyramidis BC, diameter basis cubi pyramidem ABDC, circumscribentis; GH, vero diameter basis cubi in eadē pyramide descripti. Cum ergo eandem habeant proportionem diametri quadratorum, quam latera; (Est enim vt diameter vnius quadrati ad suum latus, ita diameter alterius quadrati ad suum latus, quod proportio vtraque sit potentia dupla: Permutādo ergo, vt diameter ad diametrum, ita latus ad latus) habeat autem BC, diameter basis cubi circumscripti ad GH, diametrum basis cubi inscripti proportionem triplam, vt ostendimus; habebit quoque latus cubi circumscripti ad latus cubi inscripti proportionem triplam. At vero cubi, cum sint parallelepipeda similia, [d] proportionem habent laterum homologorum triplicatam. Cubus igitur circumscriptus ad cubum inscriptum pyramidi ABDC, proportionem habet, quam 27. ad 1. Hæc enim proportio triplicata est triplæ proportionis, vt hic 1. 3. 9. 27. videre licet. Quam ob rem, [e] cum cubus ad pyramidem inscriptam proportionem habeat quam 27. ad 9. videlicet triplam; Habebit pyramis ABDC, ad cubum sibi inscriptum proportionem, quam 9. ad 1. nimirum noncuplam; Atque adeo pyramis sibi inscripti cubi noncupla est. Quod erat demonstrandum.

[a] 2. sexti
[b] 4. sexti.
[c] 18. quarti dec.
[d] 33. vnde.
[e] 20. sexti dec.

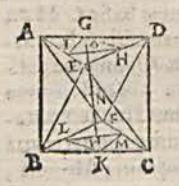
COROLLARIVM.

IGITVR cubus ad cubum descriptum in pyramide, quæ in priori cubo describitur, proportionem habet, quam 27. ad 1. Hoc enim demonstratum est ex propos. 33. lib. 11. in demonstratione huius propositionis.

THEOR. 26. PROPOS. 26.

OCTAEDRVM ad sibi inscriptũ Icosaedrum proportionem habet, quam duæ bases octaedri ad quinque bases Icosaedri.

IN octaedro ABCD*EF*, concipiatur descriptũ Icosaedrum. *D*ico octaedrum esse ad Icosaedrum, vt sunt duæ bases octaedri ad quinque bases *I*cosaedri. Cũ enim vt ex demonstratis in propos. 16. lib. 15. liquet, octo bases Icosaedri in octo basibus octaedri reponantur; sint duæ bases *I*cosaedri GH*I*, *K*LM, in duabus basibus oppositis octaedri A*D*E, BCF; atque ex N, cẽtro octaedri, nec non & Icosaedri (idem enim vtriusque est centrum. per coroll. 3. propos. *16*. lib. 15.) ad basim A*D*E, perpendicularis ducatur N O, cadens in centrum O, triãguli A*D*E, seu circuli ipsum ambientis, ex coroll. lemm. 1 prop. 10. lib. *14*. quod quidẽ O, centrum quoque est trianguli *G*HI, per coroll. 2. propos. *16*. lib. 15. Cum ergo plana opposita A D E, BCF, parallela sint, ex corollario *4*. propositionis *14*. lib. *13*. Recta O N, producta perpendicularis quoque erit, per schol-



lium propositionis *14*. lib. 11. ad planum BCF, in eiusque propterea centrum P, commune etiam triangulo KLM, cadet. Quare OP, recta altitudo est & octaedri & Icosaedri sibi inscripti. Quia vero octaedrum in octo pyramides, ductis rectis ex centro N, ad omnes angulos octaedri, æquales diuiditur, quarum altitudo est N O, dimidium altitudinis octaedri; Similiterq; *I*cosaedrum in 20. pyramides æquales eiusdem altitudinis *N O*: *E*st autem prisma triplum pyramidis eandem cum ipso & basim, & altitudinem habentis, per coroll. 1. propos. 7. lib. 12. Erit prisma, cuius basis A*D*E, & altitudo ON, æquale tribus pyramidibus octaedri: At vero prisma, cuius eadem basis ADE, altitudo autem O P, dupla altitudinis ON, duplum est prismatis, cuius basis eadem ADE, altitudo vero ON, per ea, quæ in scholio propos. 14. lib. 12. ostendimus. Prisma igitur, cuius basis ADE, & altitudo OP, æquale est sex pyramidibus octaedri; Ac proinde reliquis duabus octaedri pyramidibus, quæ tertiam partem illarum sex constituunt, æqualis erit tertia pars prismatis super basim ADE, & sub altitudine OP, constituti; prisma videlicet, cuius basis tertia pars est trianguli ADE, altitudo vero eadem O P. *H*oc enim prisma tertia pars est prismatis super basem A D E, & sub altitudine O P; cũ per ea, quæ docuimus ad prop. 7. lib. 12. prismata eiusdem altitudinis inter se sint, vt bases. Quare duo prismata, quorum vnius basis ADE, & altitudo OP, alterius autem basis tertia pars basis ADE, & altitudo eadem OP, æqualia sunt octaedro A B C D E F. *N*on secus demonstrabimus prisma, cuius basis G H *I*, altitudo vero OP, æquale esse sex pyramidibus Icosaedri: propterea que triplum huius prismatis, nempe prisma, cuius basis tripla sit basis G H *I*, altitudo autem eadem OP, æquales esse *1*8. pyramidibus Icosaedri. Reliquis igitur duabus Icosaedri pyramidibus, quæ tertiã partem sex pyramidum eiusdem Icosaedri constituunt, æqualis erit tertia pars prismatis super basem G H I, & sub altitudine OP, constituti; prisma scilicet, cuius basis tertia pars est trianguli GHI, altitudo vero eadem OP; Atq; idcirco duo prismata, quorum vnius basis tripla sit

trianguli GHI, altitudo autem O P, alterius vero basis tertia pars basis GH*I*, & altitudo eadem OP, æqualia erunt *I*cosaedro in dicto octaedro descripto. Iam vero, cum duo illa prismata, octaedro æqualia, ad duo hæc prismata, *I*cosaedro æqualia, sint, per ea, quæ ostēdimus ad propos. 7. lib. 12. vt bases prismatum octaedro æqualium, quatuor tertias partes trianguli *A*DE, continentes, (cum vnius basis sit A D E, nempe tres tertiæ partes ipsius A D E, complectens, alterius vero basis tertia pars ipsius ADE,) ad bases prismatum Icosaedro æqualium, decem tertias partes trianguli GHI, comprehendentes; (cum vnius basis tripla sit triāguli GHI, nimirum nouē tertias partes ipsius GH*I*, cōtinens, alterius vero basis tertia pars ipsius GHI,) Sint aūt, vt quatuor tertiæ partes trianguli ADE, ad decē partes tertias trianguli G H *I*; [a] ita duæ tertiæ partes ipsius ADE, nēpe dimidium quatuor tertiarū, ad quinq; tertias partes ipsius GHI, hoc est, ad dimidium decem tertiarum: Et vt duæ tertiæ partes ipsius ADE, ad quinque tertias partes ipsius G H I, ita quoque sint, per ea, quæ demonstrauimus in scholio propos. 22. lib. 5. sex tertiæ partes ipsius ADE, (hoc est, duæ bases octaedri triplum duarum tertiarum vnius basis constituentes, cum sex tertias contineant,) ad quindecim tertias partes ipsius G H I; (id est, ad quinque bases Icosaedri, triplum quinque tertiarum vnius basis complectentes, cum quindecim tertias complectantur,) Erunt quoque duo illa prismata, octaedro æqualia, hoc est, ipsummet octaedrū, ad duo hæc prismata Icosaedro æqualia, nempe ad ipsummet *I*cosaedrum, vt duę bases octaedri ad quinque bases Icosaedri. Quocirca octaedrum ad sibi inscriptum Icosaedrum, proportionem habet, quam duæ bases octaedri ad quinque bases Icosaedri.

Quod erat demonstrandum.

[a] 15. quinti

THEOR. 27. PROPOS. 27.

ICOSAEDRVM ad sibi inscriptum Dodecaedrum proportionem habet compositam ex proportione lateris Icosaedri ad latus cubi in eadem cum Icosaedro sphęra descripti, & ex proportione triplicata eius, quam habet diameter Icosaedri ad rectam centra basium Icosaedri oppositarum coniungentem.

EXHIBEATVR Icosaedrum A*B*C, in quo recta D E, coniungat cētra basium oppositarum, diameter autem eius sit AC; & F, sit latus Icosaedri, & G, latus cubi in eadem sphæra cum Icosaedro descripti. Dico proportionem *I*cosaedri A*B*C, ad sibi inscriptum Dodecaedrum componi ex proportione F, lateris Icosaedri ad G, latus cubi, & ex proportione triplicata diametri *AC*, ad rectā D E. Cum enim, ex demonstratis propos. 5. lib. 15. Dodecaedrū in *I*cosaedro descriptum statuat angulos suos in centris basium Icosaedri, atque adeo oppositos angulos in centris basiū oppositarum; Erit DE, diameter dodecaedri in *I*cosaedro ABC, descripti, cum copulet angulos ipsius oppositos in D, & E, centris basium *I*cosaedri oppositarum residētes. Propositis iam tribus magnitudinibus, Icosaedro scilicet ABC; Dodecaedro diametri *AC*, hoc est, in eadē sphæra, in qua Icosaedrum *ABC*, descripto, cum vtriusque eadem sit diameter; & Dodecaedro diametri DE, intra *I*cosaedrum videlicet, A*B*C, constructo; Proportio primæ magnitudinis, nempe Icosaedri *ABC*, ad tertiā, videlicet ad Dodecaedrum diametri D E, sibi inscriptū, compo-

componetur ex proportionibus primæ ad secundam, & secundæ ad tertiam, per ea, quæ ad defin. 5. lib. 6. a nobis sunt demonstrata, nimirum ex proportionibus Icosaedri *ABC*, ad Dodecaedrum diametri AC, in eadē sphæra cum ipso descriptum, & Dodecaedri eiusdem diametri AC, ad Dodecaedrum diametri *DE*, in Icosaedro ABC, descriptum. Cum ergo Icosaedrum ABC, ad Dodecaedrum diametri AC, eadem sphæra comprehēsum, sit vt F, latus Icosaedri ad G, latus cubi: ([a] Nā Dodecaedrum diametri AC, ad Icosaedrū ABC, eiusdē diametri est, vt G, latus cubi ad *F*, latus Icosaedri. Conuertendo igitur erit Icosaedrum ABC, ad Dodecaedrū diametri AC, vt *F*, latus Icosaedri ad G, latus cubi.) *At* vero Dodecaedrum eiusdē diametri AC, ad Dodecaedrū diametri DE, in Icosaedro videlicet ABC, descriptū, proportionē habeat triplicatā diametri AC, ad diametrū DE, id est, ad rectam centra basium Icosaedri oppositarū cōiungentem, ex coroll. propos. 17. lib. 12. Manifestum est, proportionē Icosaedri ABC, ad sibi inscriptū Dodecaedrū diametri DE, cōponi quoq; ex proportione F, lateris Icosaedri, ad G, latus cubi, & ex proportione triplicata proportionis diametri *AC*, ad rectā *DE*. Quare Icosaedrum ad sibi inscriptum *D*odecaedrum proportionē habet compositam, &c. Quod erat demonstrandum.

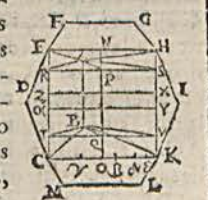
[a] *11. quarti dec.*

THEOR. 28. PROPOS. 28.

DODECAEDRVM excedit cubum sibi inscriptum parallelepipedo, cuius quidem basis a quadrato cubi deficit rectangulo contento sub latere cubi, tertiaque parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi: At vero altitudo ab altitudine, siue latere cubi, minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit.

QVO-

QVONIAM ex demonstratis prop. 8. lib. 15. quatuor latera basis cubi in Dodecaedro descripti subtēdūt quatuor angulos quatuor basium Dodecaedri ad vnum latus conuenientiū; sint huiusmodi pētagona ABCDE, EFGH*A*, A*H*IKB, BKLMC, conuenientia ad latus *AB*; duo quidem ABCDE, A H I K *B*, secundum latus idem commune A *B*, alia autē duo AEFGH, *B*CMLK, secundum angulos EA*H*, CBK. His vero pentagonis inscriptum sit quadratum cubi E C-K *H*, super quod consistat pars Dodecaedri cubum circumscribētis, solidum scilicet *CBKH*AE, constans quinque planis *CBK*, E*A*H, ABCE, ABK*H*, EC*K*H; quorum duo *CBK*, EAH, [a] triangula sunt æqualia, cum latera pentagoni BC, BK, æqualia sint lateribus pentagoni *A*E, AH, angulosque comprehendant æquales pentagonorum E*A*H, CBK. Duo vero ABCE, ABKH, trapezia sunt æqualia quoque: (cum enim & pētagona *ABCDE*, *ABKIH*, per hypotesin, & triangula ex ipsis ablata *CDE*, *HIK*, [b] æqualia existant; æqualia erunt & reliqua trapezia *ABCE*, *ABKH*;) Quintum denique est basis cubi inscripti EC-KH. Simili modo reperientur alia quinque solida huic similia & æqualia, p 10 defin. lib. 11. super reliquas quinque cubi bases; ita vt Dodecaedrum superet cubum sibi inscriptum sex huiusmodi solidis. Dico igitur hunc totum excessum ex sex illis solidis cubum inscriptum circumstantibus conflatum, æqualem esse parallelepipedo, cuius quidem basis deficit a CEHK, base cubi, rectangulo contento sub latere cubi C*K*, tertiaq; parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi; at vero altitudo ab altitudine, seu latere cubi, minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentū minus existit. Sectis. n. lateribus EH, C*K*, bifariam in N, O, iunctaq; recta NO, quæ parallela est lateri pentagoni AB, & in quā cadunt perpendiculares *A*P, B*Q*, demissæ in planum E*K*, vt constat ex demonstratis propos. 17. lib. 13. (Exprimunt enim lineæ NO, AB, AP, BQ, huius figuræ lineas LN,

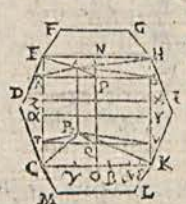


[a] *4. primi.*

[b] *4. primi.*

VX,

VX,VR,XS, figuræ propos.17.lib.13.) Erit vtraque recta AB,PQ, maius segmentũ lateris cubi NO,vel HK, & vtraque AP, BQ, æqualis dimidio lateris pentagoni AB, seu maioris segmenti lateris cubi, vt liquet ex eadẽ propos.17.lib.13. Ac propterea si per P, Q, ducantur rectæ RS,TV,rectis EH,CK,parallelæ; erunt quoq; RT, SV,maiora segmenta laterum EC,HK; atque adeo ER, CT,simul,& HS, KV, simul minora eorundem laterum segmenta. Ductis deinde rectis AR, AS,BT, BV, constituantur duæ pyramides ERSHA,CTVKB,quæ per coroll.propos.6. lib.12. æquales inter se erunt,cũ & earũ bases ERSH, TCKV,& altitudines PA, QB, æquales sint; consistentque extra solidum ABTVSR. [a] Quoniam autẽ AS,ipsi EV,& AR,ipsi BT,æqualis est,& parallela,cum cõiungant æquales rectas,& parallelas AB, SV,RT, [b] parallela erunt plana triangulorũ ARS,BTV, atquę adeo inter se æqualia,ex coroll prop.8.lib.1.cum latera vnius lateribus alterius sint æqualia. Quare solidum ABTVSR, contentum duobus aduersis triangulis æqualibus, similibus, & parallelis ARS, BTV, & tribus parallelogrãmis RV, AT, AV,prisma est,ex definitione.



[a] 33. primi

[b] 15. vnde.

IAM vero, cum ostensum sit rectas HS, KV, minus segmentum efficere lateris HK,fiat illis æqualis VX,dupla nimirum vtriusque HS, & KV; & ipsius VX, minoris segmenti lateris HK,duas tertias partes cõtineat VY, tertia vero pars sit XY, ducanturque XZ, Yα. rectæ TV,parallelæ. Quoniam igitur pyramides ERSHA, CTVKB, æquales sunt ostensæ; [c] vtriusque vero earum dupla est pyramis super basem TX,& sub eadem altitudine PA,vel QB,constituta, [d] quod & basis TX,dupla sit basis CV,vel RH; Aequalis erit pyramis TVXZB,vtriqueque pyramidi ERSHA, CTVKB, simul: At pyramis TVXZB, duas tertias partes continet prismatis, cuius basis eadem TX,& altitudo eadẽ QB, vertex vero linea recta,pars videlicet rectæ AB,quæ æqualis sit ipsi VX,vt demonstrauimus in scholio propos.7.lib.12. Item eiusdem

[c] 6. duode.

[d] 1. sexti.

dem prismatis,cuius basis TX,& altitudo QB, vertex vero pars rectæ AB,æqualis ipsi VX,duas tertias partes cõtinet prisma,cuius basis TY,& altitudo eadem QB, vertex vero pars rectæ AB,æqualis ipsi VY,ex scholio propos. 25. lib. 11. [a] quod & basis TY, duas partes tertias cõplectatur basis TX. Igitur & prisma, cuius basis TY, & altitudo QB,vertex vero pars rectæ AB,æqualis ipsi VY,æquale erit duabus pyramidibus ERSHA,CTVKB; Ac proinde hoc prisma appositum prismati ABTVSR, efficiet prisma æquale solido CBKHAE, habens basin rectangulum cõtentum sub latere cubi TV, & sub recta composita ex VY, duas tertias partes minoris segmenti VX,comprehendente,& ex VS, maiore segmento,ideoq; a base cubi deficientem rectangulo α X, contento sub latere cubi α Y, & sub XY, tertia parte minoris segmenti VX. Non dissimili ratione inuestigabimus alia similia quinque prismata æqualia & proxime dicto prismati, & reliquis quinque solidis super reliquas quinque cubi bases constitutis. Sex igitur huiusmodi prismata æqualia erunt sex illis solidis, excessui nimirum Dodecaedri supra cubum sibi inscriptum. Quia autem duo quælibet prismata illiusmodi inter se aptata componunt parallelepipedum eiusdem altitudinis; construentur ex sex illis prismatis tria parallelepipeda sub eadẽ altitudine QB, quæ æqualis est dimidio lateris pentagoni AB, seu maioris segmenti lateris cubi,& super bases a base cubi deficientes singulas rectangulo contento sub latere cubi, & sub tertia parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi; Ac proinde ex tribus his parallelepipedis inter se compositis exurget parallelepipedum excessui eidem Dodecaedri supra cubum sibi inscriptum æquale, cuius basis a base cubi deficit rectangulo contento sub latere cubi,& sub tertia parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi, altitudo vero æqualis est tribus altitudinibus prædictorum trium parallelepipedorum,hoc est, altitudini QB, quæ æqualis fuit dimidio maioris segmẽti lateris cubi, ter sumptæ. Hanc igitur altitudinem dico ab altitudine,seu latere cubi deficere minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit. Diuidatur

[a] 1. sexti.

nidatur enim CK, latus cubi extrema ac media ratione in β: itemque Cβ, maius segmentum, & βK, minus bifariã in γ, δ; atque ex βK, abscindatur βε, æqualis ipsi βγ, seu Cγ, ita vt Cγ, vel γβ, vel βε, dimidia pars maioris segmenti Cβ, æqualis sit ipsi QB, & Cε, toti altitudini præfati parallelepipedi. Potest autem ex minori segmento βK, abscindi recta æqualis ipsi Cγ, dimidio maioris segmenti; quia βK, maior est, quam dimidium maioris segmenti Cβ. Cũ enim sit, vt CK, ad Cβ, ita Cβ, ad βK; sit autẽ CK, minor, quam dupla ipsius Cβ, quod Cβ, sit ipsius maius segmẽtum, erit quoque Cβ, minor, quã dupla ipsius βK, hoc est, erit βK, maior, quam dimidium ipsius Cβ. Quoniã igitur est, vt tota CK, ad maius segmentũ Cβ, ita maius segmentum Cβ, ad minus βK; erit quoq; vt CO, dimidia ipsius CK, ad Cγ, vel βε, dimidiã ipsius Cβ, ita Cγ, vel βε, ad βδ, dimidiã ipsius βK; Ac proinde si CO, secetur extrema ac media ratione, erit maius illius segmentum Cγ, vel βε, & minus βδ. Quare & βδ, minus segmentum secabit βε, maius segmẽtum extrema ac media ratione, vt demõstrauimus ad prop. 5. lib. 13. erit; maius segmentum βδ, minus autẽ δε; Ac propterea rursus δε, minus segmẽtum secabit rectã δK, maiori segmẽto βδ, æqualẽ, extrema ac media ratione, minusq; segmentum erit εK. Deficit igitur Cε, altitudo præfati parallelepipedi ab altitudine, seu latere cubi CK, minore segmẽto εK, rectæ δK, vel sibi æqualis rectæ βδ, quæ dimidiatæ lateris cubi fuit segmẽtũ minus ostensa. Constat ergo, hanc esse parallelepipedi, quo dodecaedrũ excedit sibi inscriptum cubum a base cubi deficere rectãgulo cõtento sub latere cubi, tertiaq; parte minoris segmẽti eiusdẽ lateris cubi; altitudinẽ vero ab altitudine cubi deficere minore segmẽto eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmẽtũ minus existit. Quocirca Dodecaedrũ excedit cubum sibi inscriptũ parallelepipedo, &c. Quod erat demõstrãdum.

1.15. quinti

COROLLARIVM.

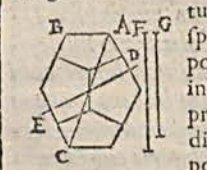
VNDE elicitur, Dodecaedrum a duplo cubi sibi inscripti deficere duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri cubi est æqualis, latitudo autem tertiæ parti minoris segmenti eiusdem lateris cubi, altitudo denique a latere cubi deficit minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus segmentũ existit; Alterius vero & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis est, altitudo autem minus segmentũ eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit, ita vt amborum altitudines simul altitudini, siue lateri cubi sint æquales. Nam si prius parallelepipedum addatur illi parallelepipedo, quo cubũ a Dodecaedro superari docuimus, conficietur parallelepipedum, cuius & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis est, basin nimirum eandem habens, quam cubus, altitudo vero a latere cubi deficit minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus est segmentum, hoc est, altitudine posterioris parallelepipedi. Quare si confecto iam parallelepipedo adiungatur posterius paralellepipedum, compositum erit parallelepipedum prorsus æquale cubo intra Dodecaedrum descripto, siquidem & basis, & altitudo parallelepipedi, æqualis est & basi & altitudini cubi. Atque idcirco, vt Dodecaedrum cubi inscripti duplum existat, desunt prædicta duo parallelepipeda; cum his accedentibus ad excessum Dodecaedri supra cubum inscriptum, constituatur parallelepipedum cubo inscripto æquale, immo vero alter cubus, vt demonstratum est.

THEOR. 29. PROPOS. 29.

DODECAEDRVM ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet compositam ex proportione triplicata

cata eius, quam habet diameter Dodecaedri ad rectam centra basium Dodecaedri oppositarum copulantem, & proportione lateris cubi ad latus Icosaedri in eadem sphæra cum cubo descripti.

IN Dodecaedro ABC, diameter sit AC, & recta coniungens centra basium oppositarum DE; At uero F, latus cubi, & G, latus Icosaedri in eadē sphæra cum cubo descripti. Dico proportionem Dodecaedri ABC, ad sibi inscriptum *I*cosaedrum componi ex proportione triplicata proportionis diametri *A*C, ad rectam DE; & ex proportione F, lateris cubi ad G, latus Icosaedri. Cum enim anguli Icosaedri in Dodecaedro descripti reponantur in centris basium Dodecaedri, atque adeo anguli oppositi in cētris basium oppositarum; erit recta DE, centra basium Dodecaedri oppositarum connectens, diameter *I*cosaedri inscripti; Ac propterea Dodecaedrum, cuius diameter DE, in eadem sphæra cū *I*cosaedro intra Dodecaedrū A*B*C, collocato describetur, cum eandem habeāt diametrum *D*E. *I*ntellectis iam tribus magnitudinibus, Dodecaedro scilicet ABC; Dodecaedro diametri DE; & *I*cosaedro eiusdem diametri DE, intra Dodecaedrum videlicet ABC, descripto; Proportio Dodecaedri *A*BC, primæ magnitudinis ad Icosaedrum sibi inscriptum, tertiam magnitudinem, componetur per ea, quæ ad defin. 5. lib. 6. a nobis sunt demōstrata, ex proportionibus Dodecaedri ABC, primæ magnitudinis, ad Dodecaedrum diametri D E, secundam magnitudinem, & Dodecaedri ex diametro *D*E, descripti secundę magnitudinis ad Icosaedrum in Dodecaedro *A*BC, descriptum, tertiam magnitudinem. Cum ergo Dodecaedrum A*B*C, ad Dodecaedrum diametri DE, proportionem habeat triplicatam diametri AC, ad diametrum DE, ex coroll propos. 17. lib. 12. [a] Dodecaedrum vero



[a] 11. quarti decimi.

vero diametri *D*E, ad Icosaedrum eiusdē diametri DE, quod nimirum in Dodecaedro A*B*C, describitur, proportionem habeat, quam F, latus cubi ad G, latus *I*cosaedri; liquido constat proportionem Dodecaedri A*B*C, ad Icosaedrum sibi inscriptum, cuius scilicet diameter *D*E, componi quoque ex triplicata proportione proportionis diametri *A* C, ad diametrum D E, rectam videlicet centra oppositarum Dedecaedri copulantem, & ex proportione *F*, lateris cubi, ad G, latus *I*cosaedri, in eadem sphæra cum cubo descripti. Dodecaedrum itaque ad sibi inscriptum *I*cosaedrum proportionem habet compositam, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 30. PROPOS. 30.

DODECAEDRVM Pyramidis, in qua describitur, duas nonas partes cō tinet, minus duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri cubi in eadem pyramide descripti ęqualis est, latitudo vero tertiæ parti minoris segmēti lateris eiusdem cubi, altitudo denique a latere eiusdem cubi deficit minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiusdem minus segmentum existit; Alterius autem & longitudo, & latitudo lateri cubi prædicti est æqualis, altitudo vero minus segmentum eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiusdem segmentum minus existit, ita vt amborum altitudines simul altitudini, siue lateri eiusdem cubi sint æquales.

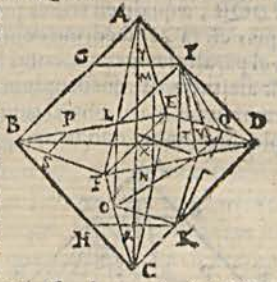
QVONIAM si in Dodecaedro intra Pyramidem descripto cubus describatur, hic idem cubus in eadē pyramide est descriptus, vt ad finē lib. 15. tradidimus; Cubus autē pyramidis, in qua describitur, nona pars est, cū pyramis cubi sibi inscripti sit noncupla: Fit, vt magnitudo dicti cubi dupla contineat duas partes nonas pyramidis Dodecaedrum, seu cubum ambientis. Quare, cum Dodecaedrum cubi sibi inscripti duplum sit, ex coroll. propos. 28. huius lib. minus duobus illis parallelepipedis, quorum mentio facta est in verbis propositionis huius; non obscure colligitur, Dodecaedrum pyramidi inscriptum duas nonas partes continere ipsius pyramidis, minus dictis duobus parallelepipedis; adeo vt si dicta duo parallelepipeda addantur Dodecaedro, tum demum magnitudo exurgat duas partes nonas pyramidis complectens. Quamobrem Dodecaedrum Pyramidis, in qua describitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri cubi in eadem pyramide descripti æqualis est, &c. Quod erat demonstrandum.

a 25. sextidec.

THEOR. 31. PROPOS. 31.

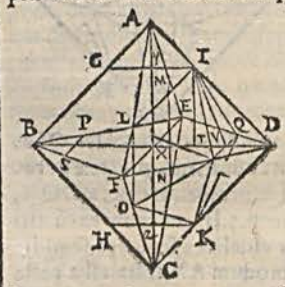
OCTAEDRVM excedit sibi inscriptum Icosaedrum Parallelepipedo, cuius basis est quadratum lateris Icosaedri, altitudo vero maius segmentum semidiametri octaedri extrema ac media ratione sectæ.

OCTAEDRVM, cui inscriptum est Icosaedrū, sit ABCDEF, repetita figura prop. 16. lib. 15. vbi demonstratum est, viginti triangula Icosaedrū inscriptū cōponentia esse IQR, KQR, GIL, GIM, GPS, HPS, NHK, OHK, RLO, SLO, PMN, QMN, GMP, HNP, KNQ, IMQ, GLS, HOS, KOR, ILR, quorum octo postrema octo basibus octaedri sunt imposita, secantia videlicet omnia omnia eius latera extrema ac media ratione; ſtē rectam IT, perpendicularē ad BD, æqualē esse maiori segmēto XY, semidiametri AX. Dico octaedrū ABCDEF, superare Icosaedrū sibi inscriptū parallelepipedo, cuius basis est quadratū lateris Icosaedri QR, altitudo vero IT, maius segmentū semidiametri AX. Cū. n. in quatuor basib⁹ octaedri DEA, DFA, DEC, DFC, angulū solidū octaedri D, constituētibus positæ sint quatuor bases Icosaedri IMQ, ILR, KNQ, KOR; remanebūt iuxta angulū solidū D, in ei sdē quatuor basibus octaedri quatuor triāgula IQD, IRD, KQD, KRD, quibus si accedant duo triāgula Icosaedri, QIR, KQR, & cōe triangulū DQR, constituentur duæ pyramides super cōem basem DQR, nempe IDQR, KDQR, inter se æquales, per coroll. prop. 5. lib. 12. cum earū altitudo sit recta eadē IT, maius videlicet segmētū semidiametri octaedri. (Nā quemadmodum AX, secta est a recta GI, in Y, extrema ac media rōne, ita quoq; secta est CX, a recta HK, in Z. Quare si ex K, ad BD, perpendicularis ducatur, altitudo nimirum pyramidis KDQR; a erit ea æqualis rectę ZX, maiori segmēto semidiametri CX, hoc est, ipsi IT.) Quæ quidē pyramides extra Icosaedrum in octaedro descriptū cōsistūt. Simili modo prope singulos reliquos quinq; angulos octaedri constituentur binæ pyramides & inter se & dictis duabus æquales, extra Icosaedrum prædictum: Ita vt octaedrum superet Icosaedrum sibi inscriptum duodecim illis pyramidibus equalibus. Quia vero triangulum DQR, dimidiū est quadrati lateris DQ; (Cum DQ, DR, rectæ æquales sint, minora scilicet segmenta laterum octaedri, angulumq; continēant rectum.) erit recta QR, diameter illius quadrati; Ac proinde quadratum ipsius QR, duplum erit quadrati lateris DQ, ideoque quadruplum trianguli DQR. Prisma igitur, siue parallelepipedum, cuius basis quadra



a 34. primi

tum rectæ QR, & altitudo IT, quadruplum quoque erit prismatis, cuius basis triangulum DQR, & altitudo eadem IT, per ea, quæ demonstrauimus ad propos. 7. lib. 12. Prisma autem, cuius basis DQR, & altitudo IT, triplum existens, ex coroll. 1. propos. 7. lib. 12. pyramidis IDQR, æquale est tribus pyramidibus earũ duodecim, quas circa Icosaedrum consistere diximus. Prisma ergo, vel parallelepipedum, cuius basis quadratum rectæ QR, & altitudo IT, quadruplum quoque est trium illarũ pyramidum. Quare cum earundem trium pyramidũ quadruplæ sint omnes duodecim pyramides simul Icosaedrum ambientes; Aequale quoq; erit prisma, seu parallelepipedum, cuius basis quadratum rectæ QR, lateris nimirum Icosaedri, & altitudo IT, maius segmentum semidiametri AX, duodecim illis pyramidibus, hoc est, excessui octaedri supra Icosaedrum sibi inscriptũ; Ac proinde octaedrum superabit Icosaedrum dicto prismate, vel parallelepipedo. Octaedrum ergo excedit sibi inscriptum Icosaedrum parallelepipedo, cuius basis est quadratum lateris Icosaedri, &c. Quod erat ostendendum.



COROLLARIVM.

HINC infertur, Pyramidem excedere duplũ Icosaedri sibi inscripti parallelepipedo, cuius basis quadratũ lateris Icosaedri, altitudo vero recta linea bifarias sectiones oppositorum laterum Icosaedri coniungens. Cum enim ex demõstratis propos. 19. lib. 13. constet, si Pyramidi octaedrum, & huic octaedro Icosaedrum imponatur, Icosaedrum eidẽ Pyramidi esse inscriptum; [a] *octaedrum autem superet Icosaedrum sibi inscriptum parallelepipedo, cuius basis quadratum*

[a] 31. sexti dec.

tum lateris Icosaedri, nempe recta QR, altitudo vero maius segmentum semidiametri octaedri, recta videlicet IT, seu YX: Fit, vt octaedrum bis sumptum, nempe pyramis, cui inscribitur, ([a] *quod Pyramis dupla sit sibi inscripti octaedri) superet idem Icosaedrũ in octaedro, ideoque & in Pyramide descriptum, duplo illius parallelepipedi, nimirum parallelepipedo, cuius basis idem quadratum lateris Icosaedri, altitudo vero recta YZ, coniungens bifarias sectiones laterum Icosaedri oppositorum GI, HK. Hoc enim parallelepipedum illius duplum est, per demonstrata a nobis in scholio propos. 14. lib. 12. cum altitudines duplam habeant proportionem. Quare hoc eodem parallelepipedo, cuius basis quadratum lateris Icosaedri, altitudo vero recta linea bifarias sectiones oppositorum laterum Icosaedri copulans, Pyramis duplum Icosaedri sibi inscripti excedit.*

[a] 21. sexti dec.

DE QVINQVE CORPORVM Regularium descriptione in data sphæra, ex Pappo Alexandrino.

QVONIAM *Euclides libro 13. quinq; corpora Regularia seorsum extra sphæram construxit, deinde vero eadem a sphæra comprehendi, noua demonstratione confirmauit; nõ erit abs re docere, qua ratione Pappus Alexandrinus eadem quinque corpora in data sphæra describat: præsertim cũ eius ratio multo clarior videatur, & facilior, quam cõstructio illa ab Euclide præscripta. Sed prius ex eodem Pappo lemmata nonnulla præmittenda sunt, quorum aliqua etsi per elementa sphærica Theodosij demonstrantur, non tamen propterea ordinem Euclidis peruertere censeri possumus; quippe cum propositiones sphæricorum elementorum, quibus hic indigemus, ex solis 19. prioribus propositionibus lib. 11. Euclidis pendeant; vt commode ante lib. 12. atque adeo multo magis ante hanc corporum Regularium constructionem percipi possint. In citandis*

autem Theodosii propositionibus sequemur ordinem nostrorum commentariorum, quos in eadem elementa conscripsimus. Hinc ergo initium sumamus.

LEMMA I.

DATIS duobus circulis in sphæra parallelis, dataq; in vno eorum linea recta; ducere in altero diametrum huic rectæ datæ parallelam.

IN sphæra sint duo circuli paralleli ABCD, EFG; sitq; primũ in ABCD, data diameter AD, cui in EFG, ducenda sit diameter parallela. Ducatur, vt in scholio prop. 18. lib. 11. docuimus, ℘ diametrũ AD, planũ rectũ ad circulum ABCD, [a] faciens in sphæra superficiem circulũ AEGD. Quoniã igitur circulus AEGD, circulũ ABCD, bifariã, & ad angulos rectos secat, erit circulus AEGD, maximus, trãsibitq; per polos circuli ABCD. ex schol. ℘pos. 15. lib. 1. Theod. ac proinde & per polos circuli EFG, [b] cum paralleli eosdem polos habeant: [c] ideoq; eũ bifariã secabit. Cõmunis ergo sectio EG, eius diameter erit: [d] quæ cum sit ipsi AD, parallela, patet propositũ.

DEINDE in circulo ABCD, data recta BC, nõ sit eius diameter, cui ducẽda sit diameter parallela in circulo EFG. [e] Ducatur ipsi BC, ℘ centrũ circuli ABCD, diameter parallela AD; cui in circulo EFG, ducatur diameter parallela EG, vt proxime ostendimus. Quoniam igitur vtraq; BC, EG, eidem AD, parallela est, ex constructione, [f] ipsæ quoq; BC, EG, inter se parallelæ erunt. Quod est propositum.

EADEM ratione rectæ BC, ducetur in circulo EFG, parallela HI, a diametro EG, diuersa, quæ ipsi BC, æqualis sit, si modo BC, maior non sit diametro EF. Nam si in circulo EFG, ducatur ipsi BC, parallela HI, & æqualis, vt ad propos. 1. lib. 4. tradidimus, factum erit, quod iubetur.

LEMMA II.

SI in planis parallelis descripti sint duo circuli, in quibus duæ rectæ abscindãt arcus similes; erunt duæ rectæ coniungentes extrema vnius

[a] 1. 1. Theodosii.
[b] 1. 2. Theodosii.
[c] 15. 1. Theodosii.
[d] 16. vnde.
[e] 31. primi
[f] 9. vndec.

vnius rectæ cum cẽtro, parallelæ duabus rectis, quæ extrema alterius rectę cũ cẽtro cõiungunt.

IN planis parallelis AB, CD, descripti sint duo circuli, in quibus rectæ EF, GH, primum parallelæ sint, ad easdẽ partes centrorum I, K; auferantq; arcus similes EF, GH, ac tandẽ iungãtur ad cẽtra rectæ EI, FI, GK, HK. Dico tã EI, GK, quam FI, HK, parallelas esse. Quoniam n. arcus EF, GH, similes sunt, erunt anguli I, K, æquales, ex scholio prop. 22. lib. 3. [a] Igitur reliqui anguli E, F, reliquis angulis G, H, æquales erunt. [b] Cum ergo tã illi, quã hi, sint inter se æquales; erit tam angulus E, angulo G, quã angulus F, angulo H, æqualis. Quoniã igitur in planis parallelis rectæ EF, GH, parallelæ sunt, & rectæ EI, GK, ad easdẽ partes plani per EF, GH, ducti efficiunt cũ ipsis æquales angulos E, G; erunt ex ijs, quæ in scholio propos. 10. lib. 11. demonstrauimus, EI, GK, parallelæ: Eademque ratione FI, HK, parallelæ erunt.

DEINDE sint EF, GH, parallelæ, non ad easdẽ partes cẽtrorũ I, K. Dico tam EI, HK, quam FI, GK, esse parallelas. Productis enim GK, HK, iũgatur recta LM. Et quia latera GK, HK, lateribus LK, MK, sunt æqualia, [c] angulosque ad verticẽ K, æquales cõtinent; [d] erũt & bases GH, LM, & anguli H, L, æquales, & anguli G, M. [e] Igitur arcus GH, LM, æquales sunt, [f] & rectæ GH, LM, inter se parallelæ: Ac pinde cũ vtraq; EF, LM, ipsi GH, sit parallela, [g] erunt & EF, LM, parallelæ inter se. Quia igitur EF, LM, parallelæ sunt abscindentes ad easdem partes centrorum arcus similes EF, LM; (Nam cum arcus GH, sit arcui EF, similis, erit quoque arcus LM, qui arcui GH, æqualis est, eidem arcui EF, similis.) erunt tam EI, LK, hoc est, EI, HK, quam FI, MK, hoc est, FI, GK, parallelæ. Quod est propositum.

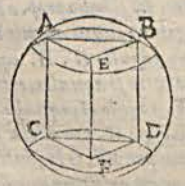
LEMMA III.

SI in sphæra sint duo circuli paralleli, & æquales, in quibus ductæ sint duæ rectæ parallelæ &

[a] 32. primi
[b] 5. primi.
[c] 15. primi.
[d] 4. primi.
[e] 28. tertij.
[f] 27. primi.
[g] 9. vndec.

æquales, ad easdem partes centrorum; rectæ harum parallelarum extrema puncta ad easdem partes coniungentes, æquales quoque & parallelę sunt, & ad plana circulorũ perpendiculares.

IN sphæra sint duo circuli paralleli & æquales AB, CD, *in quibus sint duæ rectæ æquales & parallelæ* AB, CD, *ad easdem partes centrorũ, quarum extrema iungantur ad easdem partes rectis* AC, BD. *Dico rectas* AC, BD, *æquales quoque esse, ac parallelas, & ad plana circulorũ perpendiculares.*



Quoniam enim AB, CD, *parallelæ sunt;* [a] *erunt* AC, BD. *in eodem cum ipsis plano. Quare cũ* AB, CD, *sint etiã æquales;* [b] *æquales quoque erunt ac parallelæ* AC, BD, *quod est primum.*

EX cętris deinde E, F, *ductis rectis* EA, EB; FC, FD, *iunctaq; recta* EF; *erunt tam* AE, CF, *quam* BE, DF, *parallelæ, ex 2. lemmate: Sunt autẽ & æquales ob circulorum æqualitatẽ.* [c] *Igitur & AC, EF, & BD, EF, parallelæ erunt, & æquales.* [d] *Quoniam vero circuli* AB, CD, *paralleli circa eosdẽ polos sunt,* [e] *recta per eorũ polos ducta transibit per eorundẽ centra, & per centrum sphæræ, & ad plana eorũdem recta erit. Quare circa rectam* EF, *eorum cẽtra coniungens, per eorũ polos, & centrum sphæræ incedet, ne duæ rectæ per eorum centra dicantur transire, nimirum recta* EF, *& recta per eorum polos extẽsa, quod est absurdũ. Haberent enim illæ rectæ segmentum cõmune* EF. [f] *Igitur* EF, *ad plana circulorum* AB, CD, *recta est:* [g] *Ac propterea & vtraque* AC, BD, *ipsi* EF, *parallela, ad eadem plana erit recta. Quod est secundum.*

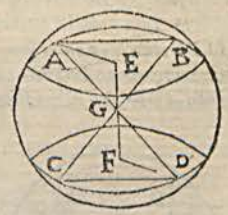
[a] 7. vndec.
[b] 33. primi
[c] 33. primi.
[d] 1. 2. Theo.
[e] 10. 1. Theodosii.
[f] 10. 1. Theodosii.
[g] 8. vndec.

HÆC demonstratio locũ etiam habet, quando parallelæ AB, CD, *sunt circulorum diametri, sed tunc* EA, EB, FC, FD, *erunt partes diametrorum, vt patet.*

LEMMA IIII.

SI in sphæra sint duo circuli paralleli & æquales, in quibus ductę sint duę rectę parallelę & æquales, non ad easdem partes centrorum: rectæ harum parallelarum extrema pũcta non ad easdem partes coniungentes, in centro sphæræ se intersecant, ac proinde diametri sphæræ erunt, & inter se æquales: Rectæ vero earundẽ parallelarum extrema pũcta ad easdem partes connectentes, & æquales ac parallelæ inter se sunt, & cum parallelis rectos angulos constituunt.

IN sphæra sint duo circuli paralleli & æquales AB, CD, *& in iis duæ rectæ parallelæ & æquales* AB, CD, *non ad easdem partes centrorum, quarum puncta extrema primum non ad easdem partes iungantur rectis* AD, BC. *Dico rectas* AD, BC, *in centro sphæræ se intersecare, ideoque diametros esse sphæræ inter se æquales. Quoniam enim* AB, CD, *parallelæ sunt;* [a] *Erunt* AD, BC, *in eodem cum ipsis plano; ac proinde se mutuo intersecabunt, vt in puncto* G: *quod dico esse cẽtrum sphæræ. Connectantur. n. circulorum centra* E, F, *rectis* EA, EG; FD, FG. [b] *Et quia anguli* AGE, CGD, *ad verticem æquales sunt:* [c] *Itẽ tam alterni anguli* BAD, CDA, *quã alterni* ABC, DCB; *æquiangula erũt triangula* ABG, CDG. [d] *Igitur erit vt* AB, *ad* BG, *ita* DC, *ad* CG: *Item vt* AB, *ad* AG, *ita* DC, *ad* DG. *Cum ergo* AB, CD, *ponantur æquales;* [e] *erunt quoque tam* BG, CG, *quam* AG, DG, *inter se æquales. Rursus quia* AE, DF, *semidiametri circulorum æqualium æquales sunt; sunt autem ex 2. lemmate & parallelæ,* [f] *ideoque anguli alterni* EAD, FDA, *æquales; erunt duo latera* EA, AG, *duobus lateribus* FD, DG, *æqualia, angulosque comprehendent æquales.* [g] *Igitur & bases* EG, FG, *& anguli* AGE, DGF, *æquales sunt.*

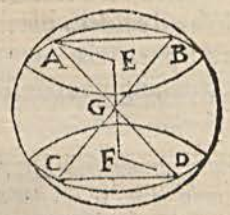


Et quia

[a] 7. vndec.
[b] 15. primi.
[c] 29. primi.
[d] 4. sexti.
[e] 14. quinti
[f] 29. primi.
4. primi

[a] 7. vndec.
[b] 2. vndec.

[a] Et quia AD, in eodem plano est, in quo parallelæ AE, DF; [b] & EG, FG, in eodē plano, in quo AD, AE, DF, erunt EG, FG, in rectum & continuum constitutæ, propter æquales angulos AGE, DGF, vt ex Proclo ad propos. 15. lib. 1. ostendimus.



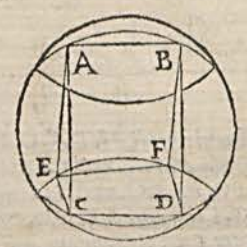
[c] 10. 1. Theodosii.

Quare EF, recta coniungens centra circulorum parallelorum per centrum sphæræ trāsibit, vt in præcedenti lemmate demonstrauimus, [c] perpendicularisque ad eorum plana erit. Cum ergo EG, FG, æquales sint ostensæ, erit G, centrū sphæræ, [d] propterea quod circuli æquales AB, CD, æqualiter a centro sphæræ absunt; inæqualiter vero abessent, si centrum sphæræ in recta EF, diceretur aliud punctū quam G. Quocirca AD, BC, diametri sphæræ sunt, & inter se propterea æquales. quod est primum.

[d] 6. 1. Theodosii.

SED iam puncta extrema parallelarum æqualium AB, CD, ad easdem partes iungātur rectis AC, BD. Dico rectas AC, BD, & æquales ac parallelas inter se esse, & angulos CAB, ABD, BDC, DCA, esse rectos. Quod enim sint parallelæ & æquales, [e] manifestum est, cum extrema puncta parallelarum æqualium coniungant. Quod autem ad AB, CD, sint perpendiculares, ita ostendetur. In circulo CD, ad rectam CD, excitentur perpēdiculares CE, DF, iunganturque EF, AE, BF. Quia igitur anguli ECD, FDC, recti sunt, erunt ex

[e] 33. primi.



[f] 31. tertij.
[g] 9. vndec.

scholio propos. 31. lib. 3. arcus ECD, FDC, semicirculi, ac proinde & reliqui arcus EFD, CEF, semicirculi erunt, [f] & anguli EFD, CEF, recti. Quare in parallelogrammo rectangulo DE, rectæ CD, EF, æquales sunt, [g] ideoque & AB, EF, parallelæ erunt, & æquales. Igitur ex 3. lemmate AE, BF, ad plana circulorum rectæ erunt, ac proinde ex defin. 3. lib. 11.

lib. 11. anguli AEC, BFD, recti erunt. Recta igitur EF, perpendicularis ad vtramq; EC, EA, & ad vtramq; FD, FB, vt ostendimus, [a] perpēdicularis erit & ad planum trianguli AEC, per EC, EA, ducti, & ad planum trianguli BFD, per FD, FB, ducti: [b] ac propterea & CD, AB, ipsi EF, parallelæ, ad eadem plana triangulorum perpendiculares erunt; ideoque ex defin. 3. lib. 11. anguli CAB, ABD, BDC, DCA, recti erunt. Quod est secundum.

[a] 4. vndec.
[b] 8. vndec.

LEMMA V.

SI in sphæra sint duæ rectæ parallelę, rectæ earum puncta extrema ad easdem partes coniungentes, æquales inter se erunt.: Et si parallelæ fuerint æquales, coniungentes non solum æquales, sed & parallelæ erunt, rectosque cum ipsis angulos conficient.

SINT in sphæra duæ parallelæ AB, CD, quarum extrema puncta ad easdem partes connectantur rectis AC, BD. Dico AC, BD, æquales esse. Quia enim parallelæ sunt AB, CD; [c] erūt AC, BD, in eodem cum ipsis plano. Ducto igitur per ipsas plano, [d] fiat in sphæra circulus ABDC, in quo cum parallelæ sint AB, CD; erunt ex scholio propos. 27. lib. 3. arcus AC, BD, æquales: [e] ideoque & rectæ AC, BD, æquales erunt. Quod si parallelæ AB, CD, fuerint æquales, ita vt quadrilaterum ABDC, in circulo habeat duo opposita latera AB, CD, parallela, & æqualia; erit ex scholio propos. 31. lib. 3. ABDC, parallelogrammum rectangulum; ac proinde anguli A, B, D, C, recti erunt. Quod est propositum.

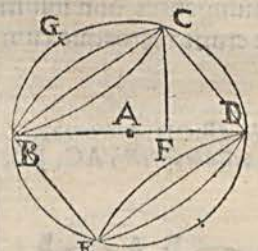
[c] 7. vndec.
[d] 1. 1. Theodosii.
[e] 29. tertij.

LEMMA

LEMMA VI.

IN data sphæra duos circulos æquales, ac parallelos describere, ita vt diameter sphærę sit vtriusque diametri potentia sesquialtera.

SIT sphæræ centrum A, *per quod planum ductum faciat circulum maximũ* BCDE, *cuius diameter* BD, *ex coroll.* 1. *prop.* 1. *lib.* 1. *Theod. Secta aũt* BD, *in* F, *vt* BF, *ipsis* FD, *dupla sit; erit* BD, *taliũ partium* 3, *qualium* 2. *est* BF; *ac proinde* BD, *ipsius* BF, *sesquialtera est. Ducta quoq;* FC, *ad* BD, *perpẽdiculari, iungãtur rectæ* BC, DC, *ductaq,* DE, *ipsi* BC, *parallela, connectatur recta* BE. [a] *Et quoniam tam duo anguli* BCD, EDC, *quam duo* BED, CBE, *duobus rectis æquales sunt.* [b] *estq; tam* BCD, *quam* BED, *rectus; erit quoq;* EDC, *&* CBE, *rectus. Igitur ex scholio prop.* 34. *lib.* 1. *quadrilaterum rectangulum* BCDE, *parallelogrammum est;* [c] *ideoque rectæ* BC, DE, *æquales sunt. Diuiso iam arcu* BC, *bifariam in* G, *erit quoque arcus* EGD, *diuisus bifariã in* G, *quod ex scholio propos.* 27. *lib.* 3. *arcus quoque* BE, CD, *æquales sint. Polo igitur* G, *& interuallis* GB, GE, *circuli in superficie sphæræ describantur transeuntes per* C, D, *ob æqualitatẽ tam arcuum* GB, GC, *quam* GE, GD; [d] *qui paralleli erunt, cum eosdem habeant polos.* [e] *Et quia circulus maximus* BCDE, *per polos secat circulos* BC, ED, *bifariam; erũt* BC, ED, *diametri ipsorum, quæ cum æquales sint ostensæ, erunt & circuli* BC, ED, *æquales. Dico diametrum sphæræ* BD, *ad vtramque diametrum* BC, ED, *proportionẽ habere potentia sesquialteram. Quoniam enim ex coroll. propos.* 8. *lib.* 6. *tres rectæ* DB, BC, BF, *continue proportionales sunt; erit ex coroll. propos.* 20. *lib.* 6. *vt* BD, *ad* BF, *ita quadratum*



[a] 29. primi

[b] 31. tertij.

[c] 34. primi.

[d] 2. 2. Theodosii.

[e] 15. 1. Theodosii.

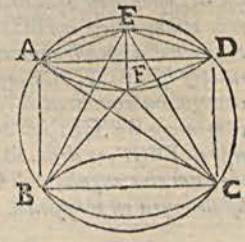
dratum ex BD, *ad quadratum ex* BC. *Est autẽ* BD, *ipsius* BF, *sesquialtera, vt ostensum est. Igitur & quadratum ex* BD, *quadrati ex* BC, *atque adeo & quadrati ex* DE, *sesquialterum est: atque idcirco diameter sphæræ* BD, *vtriusque diametri* BC, DE, *potentia sesquialtera est. quod est propositum.*

HIS demonstratis, hoc modo in sphæra data describemus quinque corpora regularia.

PROBL. 1. PROPOS. 1.

IN data sphæra Pyramidem describere.

DESCRIBANTVR in data sphæra, ex lemmate 6. *duo circuli* AD, BC, *æquales, & paralleli, quorum diametrorũ potentia sit sesquialtera diameter sphæræ: & per eorum polos maximus circulus ducatur* ABCD, [a] *qui eos ad angulos rectos, ac bifariam secabit, ac proinde cum eis cõmunes sectiones faciet diametros* AD, BC. *Ducatur in circulo* AD, *alia diameter* EF, *secans* AD, *ad angulos rectos in centro, & rectæ ducantur* EB, EC, FB, FC. *Dico* EBCF, *esse pyramidẽ, hoc est, quatuor triãgula* EBC, BCF, CFE, EFB, *esse æquilatera & æqualia. Iũctis.n. rectis* AE, ED, DF, FA, AB, CD, CA; *erit* AC, *diameter sphæræ, ex lemmate* 4. *&* AB, DC, *æquales erunt, & ad plana circulorum rectæ, ex* 3. *lemmate. Denique* AEDF, *quadratum erit in circulo* AD, *descriptum, vt constat ex prop.* 6. *lib.* 4. *Itaque quoniam ex constructione quadratum ex diametro sphæræ* AC, *sesquialterum est quadrati ex* AD, *diametro circuli; si ponatur quadratũ ex* AC, 3. *erit quadratum ex* AD, 2. *Cum ergo quadratum ex* AC, [b] *æquale sit quadratis ex* AD, DC, *quod angulus* ADC, *rectus sit, ex defin.* 3. *lib.* 11. *erit quadratum ex* DC, 1. *ac proinde*



[a] 15. 1. Theodosii.

[b] 47. primi.

de quadratum ex AD, quadrati ex DC, duplum erit: Est autem & quadratum ex AD, quadrati ex DF, duplum, ex scholio prop. 47. lib. 1. Æqualia ergo sunt quadrata ex DC, DF, a 47. primi. a quibus cum æquale sit quadratum ex CF, quod angulus CDF, ex defin. 3. lib. 11. rectus sit; erit quadratū ex CF, quadrati ex DF, quoque duplum, propterea q; quadrato ex AD, æquale. Recta igitur CF, rectæ AD, hoc est, ipsi BC, æqualis est. Eodem modo ostendetur BF, eidem BC, æqualis; ideoque BCF, triangulum est æquilaterum.

RVRSVS quia quadratum ex AD, quadrati ex DC, duplum est ostensum; est autem, ex scholio propos. 47. lib. 1. & duplum quadrati ex DE: æqualia erunt quadrata ex DC, DE: b quibus cum æquale sit quadratum ex CE, quod angulus CDE, ex defin. 3. lib. 11. rectus sit; duplum quoque erit quadratum ex CE, quadrati ex DE. Æqualia ergo sunt quadrata ex CE, AD, propterea que recta CE, rectæ AD, hoc est, rectis BC, EF, æqualis est, atq; adeo & rectæ CF, quæ ipsi BC, ostensa est æqualis. Triangulum igitur CEF, æquilaterum etiam est, & ipsi BCF, æquale, ob laterum æqualitatē. Non aliter demonstrabimus, triangulum BEF, esse æquilaterum, & ipsis BCF, FCE, æquale. Ex quo sequitur & BCE, triangulum æquilaterum esse, & aliis tribus æquale: quippe cum latera BE, CE, ipsi BC, ostensa sint æqualia. Pyramis ergo est EBCF, ex defin. 26. lib. 11. & in data sphæra descripta, cum eius anguli solidi E, B, C, F, in superficie sphæræ consistant. quod est propositum.

b 47. primi

COROLLARIVM.

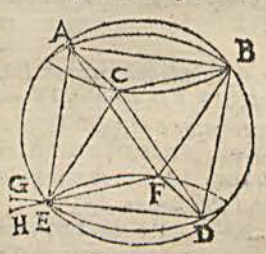
HINC sequitur, diametrum sphæræ potentia esse sesquialteram lateris pyramidis in ea sphæra descriptæ. Nam latus pyramidis est æquale diametro AD, vt ostendimus, & ex constructione diameter sphæræ potentia est sesquialtera diametri AD.

PROBL.

PROBL. 2. PROPOS. 2.

IN data sphæra octaedrum describere.

DESCRIBANTVR ex lemmate 6. in data sphæra duo circuli æquales & paralleli ABC, DEF, ita vt sphæræ diameter diametri cuiuslibet eorum potentia sit sesquialtera. a Descripto autem triangulo æquilatero ABC, in circulo ABC, ducatur per primum lemma, rectæ AB, in circulo DEF, parallela & æqualis DE, ad diuersas partes centrorum: quæ latus etiam erit triāguli æquilateri in circulo DEF, descripti, ob circulorum æqualitatem. Compleato ergo triangulo æquilatero DEF, erunt singula eius latera singulis lateribus triāguli ABC, æqualia & parallela: æqualia quidem, ob laterum AB, DE, æqualitatem; parallela vero, ex schol. propos. 10. lib. 11. Cum enim parallelæ sint AB, DE, & anguli ABC, DEF, æquales; productis rectis DE, FE, ad G. H. erunt quoque anguli ABC, GEH, æquales. Cum ergo parallelæ sint AB, GE, & BC, EH, ad easdē partes plani per AB, GE, ducti; erunt quoque BC, HE, hoc est, BC, EF, parallelæ ex illo scholio propos. 10. lib. 11. Eadem ratione parallela erit DF, ipsi AC. Connectantur denique AE, EC, CD, DB, BF, FA, vt in figura. Dico AD, octaedrum esse, hoc est, octo triangula ABC, CAE, ECD, DCB, BFA, AFE, EFD, DFB, æquilatera esse, & æqualia. Quoniam enim in circulis parallelis & æqualibus sphæræ, rectæ AB, DE, æquales sunt & parallelæ ad diuersas partes centrorū, erunt per 4. lemma, rectæ iunctæ AD, BE, (quas tamē confusionis vitādæ gratia nō duximus) diametri sphæræ, & rectæ AE, BD, æquales etiā erūt, ac perpendiculares ad ipsas AB, DE. b Quadratum igitur ex BE, duobus quadratis ex BD, DE, æquale erit: Posito autem quadrato



a 2. quarti.

b 47. primi

quadrato ex diametro sphæræ BE, 6. quadratum ex DE, est 3. (Nam cum per constructionem diameter sphæræ potentia sit sesquialtera diametri circuli DEF: posito quadrato ex BE, 6. erit quadratum diametri circuli DEF, 4. At posito quadrato diametri circuli DEF, 4. quadratum lateris trianguli æquilateri DE, est 3. quod ex coroll. 1. prop. 12. lib. 13. diameter circuli potentia sit sesquitertia lateris trianguli æquilateri.) Igitur & quadratum ex BD, est 3. ac proinde quadrata ex DE, BD, æqualia sunt, & rectæ ipsis DE, BD, æquales. Est autem DE, ipsi AB, per constructionem, & BD. ipsi AE, per 4. lemma, æqualis. Quatuor ergo rectæ AB, BD, DE, EA, æquales erunt, constituentq; quadratum ABDE, cum anguli ad A, B, D, E, recti sint ex eodem 4. lemmate.

RVRSVS quia BC, EF, parallelæ sunt & æquales ad diuersas partes centrorum; erũt quoque iunctæ rectæ BE, CF, non ad easdem partes, diametri sphæræ, ex 4. lemmate, & rectæ BF, CE, æquales inter se, atque ad BC, EF, perpendiculares, eritque rursus, vt prius, quadratum BCEF. Non aliter ostendemus, ACDF, quadratum esse; cum iunctæ rectæ AD, CF, sint quoque sphæræ diametri ex 4. lemmate, &c. Cum ergo tria quadrata AD, BE, CF, constructa sint super latera æqualia AB, BC, CA, nimirum super latera trianguli æquilateri, cũ AB, latus sit quadrati AD; & BC, quadrati BE; & CA, quadrati CF; erũt omnia triãgula octo ABC, CAE, ECD, DCB, BFA, AFE, EFD, DFB, æquilatera, & inter se æqualia. Octaedrum ergo est AD, ex defin. 27. lib. 11. & in data sphæra descriptum, cum eius anguli solidi, A, B, D, E, C, F, sphæræ superficiem attingant. quod est propositum.

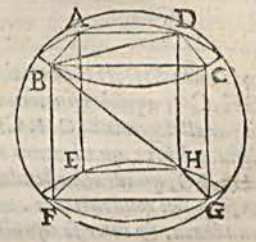
COROLLARIVM.

COLLIGITVR ex his, sphæræ diametrum potentia duplam esse lateris octaedri in ea sphæra descripti. Demonstratum enim est, quadratũ ex BE, diametro sphæræ duplum esse quadrati ex DE, latere octaedri.

PROBL. 3. PROPOS. 3.

IN data sphæra cubum describere.

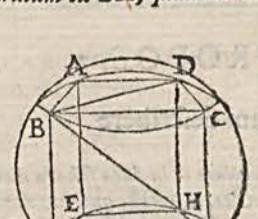
DESCRIBANTVR ex lemmate 6. in data sphæra duo circuli æquales ac parallelι ABCD, EFGH, quorum diametrorum potentia sit sesquialtera diameter sphæræ. [a] Descripto autem quadrato ABCD, in circulo ABCD, ducatur per 1. lẽma rectæ AD, in circulo EFGH, parallela EH, & æqualis ex eadẽ parte centrorum, quæ latus quoque erit quadrati in circulo EFGH, descripti, ob circulorum æqualitatem. Completo ergo quadrato EFGH, erunt singulæ eius latera singulis lateribus quadrati ABCD, æqualia, & parallela; æqualia quidem, ob laterũ AD, EH, æqualitatem; parallela vero ex scholio propos. 10. lib. 11. Nã quia parallelæ sunt AD, EH, suntq; anguli æquales ADC, EHG, nimirum recti; erunt quoque DC, HG, parallelæ, cum sint ad easdem partes plani per AD, EH, ducti, & sic de cæteris. Iungantur denique ad easdem partes centrorum rectæ AE, BF, CG, DH, quæ per lemma 3. ad plana circulorum rectæ erunt, & inter se parallelæ. Dico AG, esse cubum, hoc est, sex quadrilatera ABCD, EFGH, ADHE, BCGF, ABFE, CDHG, esse quadrata, & æqualia. Ductis enim rectis BH, BD, erit ex lemmate 4. BH, diameter sphæræ; at BD, diameter circuli ABCD, quippe quæ diameter sit quadrati circulo inscripti. Quoniam igitur per constructionem, quadratum ex BH, sesquialterum est quadrati ex BD; quadratum autem ex BD, quadrati ex BC, duplum, ex scholio propos. 47. lib. 1. si statuatur quadratum ex BH, 3, erit quadrati circulo inscripti 2.



[a] 6. quarti.

dratum ex BD, 2. & quadratum ex DC, 1. atq; adeo quadratum ex BH, quadrati ex DC, triplum erit. Rursus quia quadratum ex BH, est 3. & quadratum ex BD, 2. [a] estque quadratum ex BH, æquale quadratis ex BD, DH, quod angulus BDH, ex defin. 3. lib. 11. rectus sit, erit quadratum ex DH, 1. Quadratum igitur ex BH, triplū est quadrati ex DH. Fuit autem idem quadratū ex BH, triplum quadrati ex DC. Æqualia ergo sunt quadrata ex DC, DH, ac proinde rectæ DC, DH, æquales. [b] Cum ergo oppositis lateribus GH, CG, æquales sint; erunt omnia quatuor latera æqualia in parallelogrammo CH. Cum igitur & anguli recti sint, ex defin. 3. lib. 11. quadratum erit CH. Eadem ratione & BE, AH, BG, quadrata ostendentur: Sed & AC, EG, quadrata sunt ex constructione. Sunt ergo omnia sex quadrilatera quadrata, & inter se æqualia, ob laterum æqualitatem. Cubus igitur est AG, ex defin. 25. lib. 11. & in data sphæra descriptus, cum eius anguli solidi A, B, C, D, E, F, G, H, superficiem sphæræ contingant. quod est propositum.

[a] 47. primi.



COROLLARIVM.

CONSTAT ex his, diametrum sphæræ potentia triplam esse lateris cubi in ea sphæra descripti. Demonstratum enim est, quadratum ex diametro sphæræ BH, triplum esse quadrati lateris cubi DC, vel DH, vel AD, &c.

MANIFESTVM quoque est, eundē circulum comprehendere & quadratum cubi, & triangulum Octaedri in eadem sphæra descriptorum: quia videlicet circulus ABCD, huius figuræ æqualis est circulo ABC, figuræ antecedentis propositionis. Id quod demonstratum quoque est lib. 14. propositio. 21.

PRO-

PROBL. 4. PROPOS. 4.

IN data sphæra Icosaedrum describere.

REPERIATVR [a] recta linea, ad quam sic se habeat diameter sphæræ datæ, vt pentagoni latus ad latus hexagoni in eodem circulo cū pētagono descripti: Fiatq; ex coroll. prop. 6. lib. 10. vt numerus 3. ad 1. ita quadratum rectæ inuentæ ad quadratum alterius cuiusdā lineæ, ad cuius interuallum, veluti semidiametrum, circulus in data sphæra describatur. Hoc autem facili negotio ita fiet. Descripto maximo circulo in sphæra data, [b] accommodetur in eo recta, quæ inuenta semidiametri sit dupla, cum hæc recta minor sit diametro sphæræ, siue illius circuli maximi, vt infra probabitur. Nam si per eam rectā planum ducatur rectū ad circulum illū maximum, [c] faciet id circulū ABC, in sphæra, cuius semidiameter, ex constructione, potentia subtripla est rectæ initio inuentæ. Deinde [d] inueniatur rursus recta linea, ad quam ita se habeat data sphæra diameter, vt pentagoni latus ad latus decagoni in eodem circulo cum pentagono descripti; Fiatq; vt 3. ad 1. ita per coroll. prop. 6. lib. 10. quadratū rectæ inuentæ ad quadratum alterius lineæ, ad cuius interuallum alter circulus in sphæra describatur priori circulo ABC, parallelus: quod fiet, si in eodem illo circulo maximo accommodetur recta æqualis duplæ semidiametri inuentæ, & parallela prioris circuli diametro, ex iis, quę ad prop. 1. lib. 4. demōstrauimus, & per eam rectā planum extendatur priori circulo parallelum, hoc est, ad dictum circulum maximum rectū, ex scholio propos. 18. lib. 11. Nam per idem scholium, planum hoc erit circulo ABC, parallelū, [e] facietq; in sphæra circulū, cuius semidiameter semidiametro inuentæ æqualis est. His duobus circulis ex altera parte centri sphæræ alij duo æquales ac paralleli describantur GHI, KLM: quod facile fiet, si illorum diametris æquales rectæ, & parallelæ in eodem illo circulo maximo ducantur, &c. [f] Descripto autem in circulo DEF, triangulo æquilatero DEF, ducatur lateri EF, in parallelo circulo ABC, ex lemmate primo, recta linea AB, ex altera parte centri, parallela, quę æqualis sit vni lateri trianguli æquilateri in

[a] 12. sexti

[b] 1. quarti.

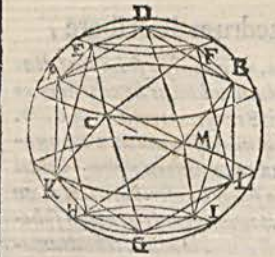
[c] 1. 1. Theodosii.

[d] 12. sexti

[e] 1. 1. Theodosii.

[f] 2. quarti.

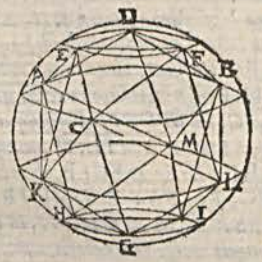
circulo ABC, descripti: Item huic AB, agatur ex altera parte centri, parallela KL, in circulo KLM, & æqualis: Ac denique huic KL, in circulo GHI, ducatur ex altera parte centri, parallela HI, & æqualis ipsi EF, hoc est, lateri trianguli æquilateri in circulo GHI, descripti. Completis ergo triangulis æquilateris ABC, KLM, GHI, erunt singula latera singulis lateribus trianguli DEF, parallela; nimirum AC, ML, GH, ipsi DF; at BC, MK, GI, ipsi DE: quod probabitur ex scholio propos. 10. lib. 11. vt in problemate secundo ostendimus parallelas esse BC, EF, ad diuersas partes centrorum ductas. In figura non descripsimus ea triangula in circulis ABC; KLM, ne multitudo linearum confusionem pareret, sed tantum laterum extrema puncta notauimus. Postremo ex quolibet 12. punctorum quatuor triangulorum æquilaterorum ad viciniora quinque puncta ducantur quinque lineæ rectæ; videlicet ex puncto D, rectæ DE, DA, DM, DB, DF: ex G, rectæ GH, GK, GC, GL, GI, &c. vt in figura apparet. Ex quolibet enim puncto quinque rectas lineas emissas esse cernis. Dico DG, esse Icosaedrum, hoc est, viginti triangula DEF, DEA, DAM, DMB, DFB, &c. esse æquilatera, & æqualia. Quod vt demonstretur, ostendendum prius est, Icosaedrum in sphæra descriptum (posse autem in sphæra data describi Icosaedrum, Euclides docuit propos. 16. lib. 13.) suos 12. angulos constituere in quatuor circulis parallelis, quos descripsimus, nimirum ternos angulos in singulis circulis, atque eo situ, quo eadem puncta notauimus.



SIT igitur in sphæra descripti Icosaedri DG, duodecim angulos statuēs in punctis D, E, A, K, H, G, I, L, B, F, M, C. Et quia quinq; rectæ DE, DA, DM, DB, DF, æquales sunt, cū sint latera triangulorū æquilaterorū æqualiū, si ex polo D, per E, in sphæra circulus describatur, transibit is per reliqua puncta A, M, B, F: ac propterea pentagonum EAMBF, in vno plano erit, nimirum in plano illius circuli. Cum ergo eius latera sint æqualia, vtpote latera Icosaedri, erit illud pentagonum etiam æquiangulum, ex iis, quæ ad finem lib. 4. demonstrata sunt a nobis. Eadem ratione pentagonum æquilaterum, & æquiangulum erit AKCFD, ob quinque rectas æquales EA, EK, EC, EF, ED: Et KHMDE, ob quinque latera Icosaedri inter se æqualia AK, AH, AM, AD, AE: Et HGCEA, ob quinq; latera Icosaedri æqualia KH, KG, KC, KE, KA: Et GIMAK, ob latera quinq; Icosaedri æqualia HG, HI, HM, HA, HK: Et ILCKH, ob quinque rectas æquales GI, GL, GC, GK, GH: Et LBMHG, ob rectas quinque æquales IL, IB, IM, IH, IG: Et BFCGI, ob quinque rectas æquales LB, LF, LC, LG, LI: Et FDMIL, ob quinque rectas æquales BF, BD, BM, BI, BL: Et DECLB, ob rectas quinque æquales FD, FE, FC, FL, FB: Et DAHIB, ob quinq; latera Icosaedri æqualia MD, MA, MH, MI, MB: Ac tandem GLFEK, ob quinque Icosaedri latera æqualia CG, CL, CF, CE, CK; sita vt 12. pentagona æquilatera, æquiangulaque inter se æqualia constituantur. Quoniam vero recta subtendens angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli opposito lateri æquidistat, vt in scholio propos. 8. lib. 13. demonstrauimus; erit iuncta recta AB, ipsi EF, parallela in pentagono EAMBF: & AC, iuncta ipsi DF, parallela in pentagono AKCFD: Et BC, iuncta parallela ipsi DE, in pentagono DECLB. [a] Plana ergo per rectas DE, EF, & CB, BA, ducta parallela sunt, [b] faciuntque circulos parallelos in sphæra DEF, ABC. Eodem modo erit iuncta KL, ipsi HI, parallela in pentagono ILCKH: Et iuncta KM, ipsi GI, in pentagono GIMAK: Et LM, iuncta ipsi GH, in pentagono LBMHG: Ac propterea circuli in sphæra paralleli erunt GHI, KLM. Non aliter erit AB, iuncta ipsi HI, parallela in pentagono DAHIB: Et iuncta KL, ipsi EF, in pentagono GLFEK, [c] Igitur EF, HI, cum sint eidem iunctæ AB, vel KL, parallelæ, inter se parallelæ sunt. Eademque ratione DE, GI, cum sint eidem iunctæ BC, vel KM, parallelæ, inter se parallelæ erunt; propterea quæ plana circulorum DEF, GHI, per rectas DE, EF, & HI, GI, ducta parallela erunt. Omnes ergo quatuor circuli in sphæra DEF, ABC, KLM, GHI, paralleli inter se

[a] 15. vnde.
[b] 1. 1. Theodosii.
[c] 8. duodec.

sunt; & tam circuli DEF, GHI, inter se æquales, ob triangula æquilatera in illis descripta æqualia, q̃ circuli ABC, KLM, inter se etiam æquales, ob triangula æquilatera æqualia in ipsis, quæ ex iunctis AB, BC, CA; & KL, LM, MK, constituuntur: quippe cum latera hæc sint rectæ subtendentes angulos pentagonorum æqualium.



QVIA vero iuncta recta KB, quæ connectit non ad easdem partes extrema K, B parallelarum KL, AB, in parallelis circulis non ad easdem partes centrorum ductarum, sphęræ diameter est, & angulus BAK, rectus, ex 4. lemmate, quod KA, connectat ad easdem partes extrema K, A, earundem parallelarum; [a] erit quadratum diametri KB, æquale duobus quadratis ex AB, AK. Rursus quia in pentagono EAMBF, recta iuncta AB, angulum AMB, subtendit: Vt autem recta angulum pentagoni subtendens ad latus pentagoni, ita est hexagoni latus ad latus decagoni in eodem circulo descriptorum, ex scholio propositionis 2. lib. 14. erit AB, iuncta ad EF, vel AK, ipsi EF, æqualem, vt hexagoni latus ad latus decagoni: Atque idcirco [b] cum latus pentagoni possit & latus hexagoni, & latus decagoni in eodem circulo descriptorum; erit diameter sphærę KB, (quæ ambas AB, AK, potest, vt ostendimus,) latus pentagoni in eo circulo, in quo AB, latus est hexagoni, & AK, vel EF, latus decagoni. Quare sphæra diameter KB, ad iunctã AB, proportionẽ habet, quã pẽtagoni latus ad latus hexagoni, at vero ad EF, eã, quã latus pẽtagoni habet ad latus decagoni: [c] Ac proinde cũ tã AB, latus triãguli æquilateri in circulo ABC, quã EF, latus trianguli æquilateri in circulo DEF, potentia triplum sit semidiametri sui circuli; erũt circuli DEF, ABC, ac proinde & GHI, KLM, qui illis æquales sunt, illi, quos in principio propositionis descripsimus. Ex quo patet, rectam, quæ dupla est semidiametri

[a] 47. primi.

[b] 10. tertij dec.

[c] 12. tertij dec.

tri initio inuentæ, minorem esse diametro sphæræ, vt supra diximus.

HIS demonstratis. facili negotio concludemus, solidam figuram a nobis descriptam DG, esse Icosaedrum, cum Icosaedro in sphæra descripto, cuius basis triangulum DEF, omnes eius anguli solidi cadant in terna puncta aliorum trium circulorum parallelorum, e quibus latera triangulorum eduximus; ac proinde singula horum latera singulis lateribus illius Icosaedri congruant.

COROLLARIVM I.

CONSTAT ex his, sphæra diametrum ad latus Icosaedri in ea descripti habere proportionem, quam latus pentagoni ad latus decagoni in eodem circulo descriptorum: adeo vt si diameter sphęrę fuerit latus pentagoni in aliquo circulo, latus Icosaedri sit latus decagoni in eodem illo circulo. Nam descripto Icosaedro DG, in sphæra, ostensum est esse diametrum sphęrę KB, ad EF, latus Icosaedri, vt latus pentagoni ad latus decagoni.

EX quo fit, latus Icosaedri maius esse semidiametro sphęræ: quemadmodum & latus decagoni maius est semisse lateris pentagoni, quippe cum duo latera decagoni cum vno latere pentagoni triangulum Isosceles constituant: [a] ac propterea duo latera decagoni maiora sint latere pentagoni, ideoque vnum latus decagoni maius dimidio lateris pentagoni.

[a] 20. primi.

COROLLARIVM II.

COLLIGITVR etiam ex demonstratis, diametrum sphærę esse potentia triplam lateris pentagoni in circulo ABC, descripti. Quoniam enim est, vt latus pentagoni ad latus hexagoni in eodem circulo ABC, descriptorum, ita diameter sphęrę KB, ad iunctam AB, ex constructione; erit permutando, vt latus pẽtagoni ad diametrum sphęrę, ita latus hexagoni ad iunctam AB: [b] Est autem latus hexagoni in circulo ABC, hoc est, semidiameter potentia subtriplum rectę iunctæ

[b] 12. tertij dec.

AB, quod AB, sit latus trianguli æquilateri. Igitur & latus pentagoni in eodem circulo ABC, potentia subtriplum est diametri sphæræ, hoc est, diameter sphæræ potentia tripla est lateris pentagoni in circulo ABC, descripti.

PROBL. 5. PROPOS. 5.

IN data sphæra Dodecaedrum describere.

DESCRIBANTVR in data sphæra quatuor circuli paralleli, vt in antecedenti propos. ABCDE, FGFGHIK, LMNOP, QRSTV, ita vt semidiametri circulorum ABCDE, QRSTV, sint potentia subtriplæ duarum rectarum, ad quas diameter ita se habeat, vt pentagoni latus ad latus decagoni; semidiametri vero circulorum FGHIK, LMNOP, potentia sint subtriplæ duarum rectarum, ad quas diameter sphæræ sic se habeat, vt pentagoni latus ad latus hexagoni. Descripto autem in circulo ABCDE, pentagono ABCDE, æquilatero, & æquiangulo, ducatur eius lateri CD, ad easdem partes centrorum parallela HI, in circulo FGHIK, & æqualis lateri pentagoni eiusdem circuli, ex 1. lemmate: Rectæ autem HI, ad diuersas partes centrorum agatur eodem modo parallela LP, in circulo LMNOP: Huic tandem LP, ad easdem centrorum partes ducatur parallela QV, in circulo QRSTV. Completis autem pentagonis in hisce tribus circulis, (quorum tamen latera, vt confusionem vitaremus, non duximus, sed eorum tantum extrema puncta notauimus.) erunt singula latera eorum singulis lateribus pentagoni ABCDE, parallela, eo ordine, quo lateri CD, parallelæ ductæ sunt: quod demonstrabitur, vt in probl. 2. ostendimus parallelas esse BC, EF, nimirum HG, PO, TV, latera tuncta, parallela erũt ipsi BC, &c. Postremo ex quolibet 20. punctorum quatuor pentagonorum ad viciniora tria puncta ducantur tres rectæ, vt in figura apparet. Ex quolibet enim puncto tres rectas vides esse emissas. Dico AS, Dodecaedrum esse, hoc est, duodecim pentagona ABCDE, DEKOI, OINST, STVQR, QRMGL, GLFAB, AFPKE, KPVTO, RSNHM, FLQVP, CDINH, BCHMG, æquilatera esse, æquiangula, & æqualia. Quod vt ostendatur, demonstrãdum prius est, Dodecaedrum in sphæra descriptum (posse autem in data sphæra Dodecaedrum describi, docuit Euclides propos. 17. lib. 13.) suos 20. angulos statuere in quatuor circulis parallelis, quos descripsimus, quinos videlicet in singulis circulis, atque in eo situ, quo eadem 20. puncta notauimus.

SIT ergo in sphæra descriptum Dodecaedrum AS, viginti angulos statuẽs in punctis A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V. Et quoniam recta subtẽdens angulum pentagoni æquilateri & æquianguli opposito lateri æquidistat, vt in scholio propos. 8. lib. 13. demonstrauimus, erit iuncta GH, lateri BC, parallela in pentagono BCHMG; & iuncta HI, lateri CD, in pentagono CDINH; & IK, lateri DE, in pentagono DEKOI; & KF, ipsi AE, in pentagono AEKPF, & FG, ipsi AB, in pentagono ABGLF; & sic de cæteris. Quia igitur rectæ AB, AE, rectis FG, FG, parallelæ sunt; [a] erit & planum per FG, FK, ductum plano pentagoni ABCDE, per AB, AE, ducto parallelum. Eadem ratione eidem plano pentagoni parallelũ erit planum per FG, GH, ductum; quod hæ rectæ rectis AB, BC, sint parallelæ. Igitur ex scholio propos. 16. lib. 11. plana per FG, FK, & per FG, GH, ducta, inter se parallela sunt, cum eidẽ plano pentagoni ABCDE, sint parallela; atque adeo, ex eodem scholio, cum conueniant in recta FG, vnum planum efficient. Non aliter ostendemus, planum quoque per FK, KI, & planum per KI, IH, & planum per IH, HG, cum plano per FK, FG, ducto vnum planum efficere. Plana igitur per puncta A, B, C, D, E, & per puncta F, G, H, I, K, ducta in sphæra [b] efficient duos circulos parallelos ABCDE, FGHIK. Eodemq; modo plana per puncta Q, R, S, T, V, & per puncta L, M, N, O, P, ducta circulos parallelos

[a] 15. vnde.

[b] 1. 1. Theodosii.

parallelos efficient QRSTV, LMNOP. Eruntq; tam duo circuli ABCDE, QRSTV, quam duo FGHIK, LMNOP, inter se æquales, ob pentagona æqualia ABCDE, QRSTV, & ob rectas FG, GH, HI, IK, KF; LM, MN, NO, OP, PL,

a 4. primi. [a] quæ omnes æquales sunt, cum subtendant angulos æquales in pentagonis æqualibus.

b 9. vndec. DEINDE quia ex scholio propos. 8. lib. 13. rectæ iunctæ ND, MB, lateri CH, parallelæ sunt in pentagonis CHNID, BGMHC; [b] erunt quoque ipsæ iunctæ ND, MB parallelæ. Sunt autem & æquales, quod æquales angulos in pentagonis æqua-

c 33. primi libus subtendant. [c] Igitur & iunctæ NM, BD, æquales erunt ac parallelæ. Eodem modo æquales erunt & parallelæ, iunctæ NO, CE, cum connectant duas NC, OE, æquales ac pa-

d 15. vnde. rallelas, quod vtraq; lateri DI, sit parallela. [d] Circulus igitur LMNOP, circulo ABCDE, parallelus est, cum ille ducatur per rectas NM, NO, hic vero per rectas BD, CE, quibus illæ parallelæ sunt ostensæ. Non secus ostendentur paralleli circuli QRSTV, FGHIK. Omnes ergo quatuor circuli paralleli sunt.

RVRSVS quoniam iunctæ rectæ EF, OV, cum ex scholio propos. 8. lib. 13. lateri PK, in pentagonis AEKPF, TVPKO, æquidistent, [e] parallelæ sunt; nec non & inter se æquales,

e 9. vndec. quod angulos æquales in pentagonis æqualibus subtendant, [f] erunt & rectæ iunctæ EO, FV, parallelæ & æquales. Quadri-

f 33. primi laterum ergo EFVO, in vno plano est, [g] cum EF, OV, in eo-

g 7. vndec. dem sint plano cum parallelis EO, FV. Est autem & in circulo, [h] propterea quod planum, in quo existit, in sphæra circulum

h 1. 1. Theodosii. efficit. Igitur ex ijs, quæ ad propos. 31. lib. 3. demonstrauimus, cum in eo quadrilatero opposita latera æqualia sint, quadrilaterum rectangulum est EFVO; ac proinde cum omnia latera æqualia sint, subtendentia angulos æquales in pentagonis æqualibus, quadratum erit. Iuncta ergo eius diameter FO, duplum potest lateris FE, ex scholio propos. 47. lib. 1. hoc est, rectæ iunctæ FG, quod æquales sint FG, FE, subtendentes angulos pentagonorum æqualium: ideoque qualium partium 1. statuetur quadratum rectæ FG, talium 2. erit quadratum rectæ FO, & ambo quadrata simul earundem partium 3. Quibus [a] cum æquale sit quadratum iunctæ rectæ OG, quæ diameter sphæræ est; (Nam cū æquales sint iunctæ FG, ON, subtendentes æquales angulos pentagonorum, & inter se parallelæ, quod duabus parallelis AB, ST, parallelæ sint, ex scholio propos. 8. lib. 13. erit ex lemmate 4. iuncta rectæ OF, ad FG, perpendicularis, & OG, diameter sphæræ.) erit quoque quadratum diametri sphæræ 3. qualium 1. est quadratum rectæ FG, hoc est, quadratum diametri sphæræ quadrati rectæ FG, triplum erit.

a 47. primi

[b] Est autem & quadratum trianguli æquilateri triplum quadrati semidiametri, hoc est, lateris hexagoni. Igitur erit, vt quadratum diametri sphæræ ad quadratum rectæ FG, ita quadratum lateris triāguli ad quadratum lateris hexagoni; [c] atque adeo vt diameter sphæræ ad rectā FG, ita latus triāguli æquilateri ad latus hexagoni: Vt autem recta FG, ad latus trianguli in eodem circulo FGHIK, ita est latus pentagoni eiusdem circuli ad latus trianguli, quod FG, sit latus pentagoni. Igitur ex æqualitate perturbata erit, vt diameter sphæræ ad latus trianguli æquilateri in circulo FGHIK, ita latus pentagoni ad latus hexagoni, vt in appositæ formulæ apparet. Cum ergo in figura præcedentis propos. sit quoque vt diameter sphæræ ad latus trianguli, hoc est, ad iunctam rectam AB, in illa figura, ita latus pentagoni ad latus hexagoni; erit vterque circulus ABC, KLM, illius figuræ vtrique circulo FGHIK, LMNOP, huius figuræ æqualis.

b 12. tertii dec.

c 22. sexti

Diam. sphæræ.	Latus pentag.
Recta FG.	Lat. triang.
Lat. triang.	Lat. hexag.

PRÆTEREA quia ex scholio propos. 2. lib. 14. est, vt iuncta recta FG, subtendens angulum pētagoni ABGLF, ad AB, latus pentagoni, ita latus hexagoni ad latus decagoni: Et vt FG, latus pentagoni in circulo FGHIK, ad AB, latus pētagoni in circulo ABCDE, ita latus triāguli in circulo FGHIK, ad latus triāguli in circulo ABCDE; erit quoq; vt latus triāguli in circulo FGHIK, ad latus triāguli in circulo ABCDE, ita hexagoni latus ad latus decagoni i eodē circulo

cum

cum hexagono descripti. Vt autem diameter sphæræ ad latus trianguli in circulo FGHIK, ita est latus pentagoni ad latus hexagoni in eodē circulo cū pētagono descripti, vt proxime demōstratū est. Igitur ex quo erit, vt diameter sphæræ ad latus trianguli in circulo ABCDE, ita latus pentagoni ad latus decagoni in eodē circulo cū pentagono descripti, vt in hac altera formula apparet. Cum ergo in figura præcedentis propos. sit quoque, vt diameter sphæræ ad EF, latus trianguli in circulo DEF, ita latus pentagoni ad latus decagoni; erit vterq; circulus DEF, GHI, figuræ antecedentis propos. vtrique circulo ABCDE, QRSTV, huius figuræ æqualis. Quare circuli ABCDE, FGHIK, LMNOP, QRSTV, sunt illi, quos in propos. antecedenti, & in hac descripsimus.

Diam. sphæræ.	Lat. pentagoni.
Lat. triang. in circulo FGHIK.	Lat. hexagoni.
Lat. triang. in circulo ABCDE.	Lat. decagoni.

QVIBVS demonstratis, nullo negotio probabimus, solidam figuram AS, a nobis descriptam esse Dodecaedrum: quippe cum Dodecaedro in sphæra descripto, cuius basis pentagonum ABCDE, omnes eius anguli solidi cadant in quina puncta aliorum trium circulorum parallelorum, e quibus latera pentagonorum eduximus; ac proinde singula horum latera singulis lateribus illius Dodecaedri congruant.

COROLLARIVM.

PERSPICVE colligitur ex his, eundem circulum comprehendere & triangulum Icosaedri, & pentagonum Dodecaedri in eadem sphæra descriptorum: quia videlicet circulus DEF, figuræ antecedentis propos. æqualis est circulo ABCDE, figuræ huius propos. Id quod demonstratum quoque est lib. 14. propos. 5.

MANIFESTVM quoque est, eosdem prorsus circulos sustinere & angulos solidos Icosaedri, & angulos solidos Dodecaedri.

SCHO-

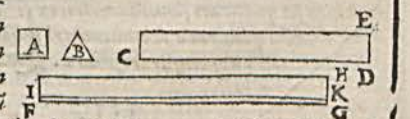
SCHOLIVM.

EX his, quæ hoc loco, & lib. 13. & 14. demonstrauimus, facile etiam ostendemus, si omnia quinque corpora regularia in vna eademque sphæra describantur, maximum omnium esse Dodecaedrum: Deinde Icosaedrum maius reliquis tribus: Tertio cubum maiorem reliquis duobus: Octaedrum denique Tetraedro esse maius. Ex quo constabit, Euclidem recto ordine quinque hæc corpora construxisse, cū post Tetraedrum statim octaedrum, non autem cubum, constituerit. Ita enim semper a minoribus ad maiora progressus est. Sed prius alia nonnulla demonstranda sunt. Hinc ergo exordiamur.

I.

SI quadratum, & triangulum æquilaterum æqualia habeant latera; erunt viginti triangula simul maiora, quam octo quadrata simul.

HABEANT quadratum A, & triangulum æquilaterum B, latera æqualia. Dico viginti triangula octo quadratis esse maiora. Sit enim rectangulum CE, cuius vnum latus CD, octuplum sit lateris quadrati A, & latus DE, lateri eiusdem quadrati æquale: Eritque rectangulū CE, octuplum quadrati A, cum sit, vt CD, ad latus quadrati A, ita rectāgulum CE, ad quadratum A, ob æqualem altitudinem. Sit quoque rectangulum FH, cuius vnum latus FG, decuplum sit lateris trianguli B, & latus GH, æquale perpendiculari ex vno angulo trianguli ad eius basem demissæ, hoc est, altitudini trianguli B. Et quoniam triangulum rectangulum, cuius vnum latus est vigecuplū lateris trianguli B, & alterum latus æquale ipsi GH, hoc est, altitudini trianguli B, vigecuplum est trianguli B; Ei autē triangulo rectangulo æquale est, ex scholio propos. 41. lib. 1. rectangulum

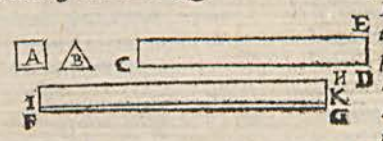


a 1. sexti

b 1. sexti

ctangulum FH, quippe cum basis FG, dimidium sit basis illius trianguli; erit quoque rectangulum FH, vigecuplũ trianguli B. Probandum igitur est, rectangulum FH, maius esse rectangulo CE. [a] Quoniam latus trianguli B, hoc est, latus DE, potentia sesquitertiũ est eius perpẽdicularis, hoc est, lateris GH: Latus autem FG, ad latus CD, potẽtia proportionẽ habet, quam 25. ad 16. quod FG, sit 10. & CD, 8, hoc est, FG, 5. & CD, 4. Erit maior proportio FG, ad CD, quam DE, ad GH. Est enim maior proportio 25. ad 16. supernõcupartiens sextasdecimas, quam 4. ad 3. sesquitertia, quod maior sit fractio $\frac{9}{16}$. quam $\frac{1}{3}$. [b] Fiat vt FG, ad CD, ita DE, ad HK; eritque maior quoque proportio DE, ad HK, quam ad GH; [c] ac proinde maior erit GH, quam HK. Ducta ergo KI, ipsi FG, parallela, erit vt IK, ipsi FG, æqualis ad CD, ita DE, ad HK. [d] Igitur erit IH, rectangulũ rectangulo CE, æquale: ideoq; FH, maius, quam CE. Quod est propositum.

[a] 12. quartidec.



[b] 12. sexti

[c] 10. quinti. [d] 14. vel 16. sexti.

II.

OCTO quadrata ex semidiametro sphæræ descripta æqualia sunt superficiei cubi in ea sphæra descripti.

[e] QVONIAM duo quadrata ex diametro sphæræ descripta superficiei cubi in ea sphæra descripti æqualia sunt: Duo vero eadem quadrata æqualia sunt octo quadratis ex semidiametro sphæræ descriptis, quod quadratum diametri quadruplum sit quadrati semidiametri, ex scholio propos. 4. lib. 2. efficitur, octo quadrata semidiametri sphæræ æqualia quoque esse superficiei cubi eiusdem sphæræ. Quod est propositum.

[e] 20. quartidec.

III.

SI octaedrum, cubus, & Icosaedrum in eadẽ sphæra describantur, erit perpendicularis e centro sphæræ ad vnam basim Icosaedri ducta, maior perpendiculari ex eodem centro sphæræ ad vnam basim octaedri, & cubi ducta.

NAM [a] quia latus octaedri maius est latere Icosaedri in eadem sphæra; erit vnum triangulum octaedri maius quoque vno triangulo Icosaedri. Quare si vtrumq; solidum ita intra sphæram constituantur, vt triangulum vnius triangulo alterius sit parallelum, longius a centro aberit Icosaedri triangulum, quam triangulum Octaedri; cum vtrumque tribus angulis superficiem sphæræ attingat: Ac proinde perpendicularis e centro sphæræ ad basim Icosaedri deducta maior erit perpendiculari ex eodem centro ad basim Octaedri. Cum ergo perpendicularis octaedri æqualis sit perpendiculari cubi; [b] quod basis cubi, & basis octaedri eodem circulo circumscribantur, ideoque æqualiter a centro distent; erit quoq; perpendicularis Icosaedri perpendiculari cubi maior. Quod est propositum.

[a] 18. tertiidec.

[b] 21. quartidec.

IIII.

SI Cubus & Icosaedrum in eadem sphæra describantur, superficies Icosaedri superficie cubi maior est.

QVONIAM viginti triangula æquilatera super semidiametro sphæræ maiora sunt octo quadratis ex eadẽ sphæræ semidiametro descriptis, vt theoremate 1. demõstrauimus: Sunt autem viginti triangula Icosaedri maiora viginti triangulis æquilateris super semidiametro sphæræ constructis, quod latus Icosaedri semidiametro sphæræ maius sit, ex corell. problematis 4. superioris. Igitur & viginti triangula Icosaedri multo maiora sunt octo quadratis ex sphæræ semidiametro descriptis. Quam ob rem, cum viginti triangula Icosaedri totam superficiem Icosaedri conficiant, at octo quadrata ex semidiametro sphæræ descripta, superficiei cubi æqualia sint, ex theoremate 2. paulo ante demonstrato; erit quoque Icosaedri superficies maior superficie cubi. Quod est propositum.

DE

DE COMPARATIONE Soliditatum quinque corporum Regularium in eadem sphæra descriptorum.

HIS præmissis, demonstremus iam, Dodecaedrum maius esse Icosaedro: Icosaedrum maius cubo: Cubum maiorem Octaedro: Octaedrum denique maius Tetraedro. quod hunc in modum fiet.

I.

DODECAEDRVM Icosaedro maius est.

QVONIAM est, [a] *vt cubi latus ad latus Icosaedri, ita Dodecaedrum ad Icosaedrum:* [b] *est autem latus cubi latere Icosaedri maius; maius quoque erit Dodecaedrum Icosaedro. Quod est propositum.*

[a] *11. quartidec.*
[b] *18. tertiædecimi*

II.

ICOSAEDRVM cubo maius est.

QVONIAM perpẽdicularis ex centro sphæræ in vnã basim Icosaedri cadens, maior est perpendiculari ex eodem centro in vnam basim cubi demissa. vt in 3. theoremate præmisso ostensum est: Item ex 4. theoremate, superficies Icosaedri superficie cubi maior quoque est; Erit solidum contentum sub perpendiculari ex centro sphæræ in vnam basim Icosaedri cadente, & tertia parte superficiei Icosaedri contentum, maius solido, quod sub perpendiculari ex eodem centro sphæræ in vnam basim cubi cadente, & tertia parte superficiei cubi continetur. Cum ergo, vt in scholio propos. 20. lib. 14. demonstrauimus, illud solidum Icosaedro sit æquale, & hoc cubo; maius quoque erit Icosaedrum, quam cubus. Quod est propositum.

CV-

III.

CVBVS Octaedro maior est.

QVONIAM est, [a] *vt latus cubi ad semidiametrum sphæræ, ita cubus ad Octaedrum: Est autem latus cubi semidiametro sphæræ maius. (Nam* [b] *cum latus cubi maius sit latere Icosaedri; & latus Icosaedri, ex coroll. 1. problematis 4. superioris, maius semidiametro sphæræ; erit latus cubi multo maius semidiametro sphæræ.) Igitur & cubus maior erit Octaedro. Quod est propositum.*

[a] *27. quartidec.*
[b] *18. tertiædec.*

IIII.

OCTAEDRVM Tetraedro maius est.

QVONIAM basis octaedri minor est basi Tetraedri, [c] *quod basis Tetraedri ad basem octaedri proportionem habeat sesquitertiam; erit perpendicularis ex centro sphæræ ad vnam basim octaedri demissa, maior perpendiculari ex eodem sphæræ centro ad vnam basim Tetraedri cadente: quod probabitur non aliter, quam supra theoremate 3. ostendimus, perpendicularem in Icosaedro maiorem esse perpendiculari in octaedro, & cubo. Est autem & superficies octaedri superficie Tetraedri maior,* [d] *cum illa huius sit sesquialtera. Igitur solidum contentum sub perpendiculari ex centro sphæræ in vnam basim Octaedri cadẽte, & tertia parte superficiei octaedri, maius est solido contento sub perpendiculari ex eodem centro sphæræ in vnam basim Tetraedri deducta, & tertia parte superficiei Tetraedri. Quocirca cum, ex scholio propos. 20. lib. 14. illud solidum octaedro sit æquale, hoc vero Tetraedro; erit quoque Octaedrum Tetraedro maius. Quod est propositum.*

[c] *14. quartidec.*
[d] *14. quartidec.*

ALITER. Quoniam est, [e] *vt latus Octaedri ad latus Tetraedri, ita Octaedrum ad triplum Tetraedri: Vt autem latus Tetraedri ad eius tertiam partem, ita est triplum Te-*

[e] *22. quartidec.*

traedri ad tertiam eius partem, id est, ad ipsum Tetraedrū. Igitur ex æqualitate erit quoque, vt latus Octaedri ad tertiam partem lateris Tetraedri, ita Octaedrum ad Tetraedrum. Cum ergo latus Octaedri maius sit tertia parte lateris Tetraedri; (Nam[a] quia quadratum lateris Tetraedri sesquitertium est quadrati lateris Octaedri; habebit latus Tetraedri ad latus Octaedri proportionem minorem sesquitertia, ideoque multo minorem tripla; [b] ac proinde tertia pars lateris Tetraedri minor erit latere Octaedri.) Erit quoque Octaedrum Tetraedro maius. Quod est propositum.

[a] 18. tertij dec.

[b] 10. quin.

ALITER. [c] Quoniam Tetraedrum ad Octaedrum se habet, vt rectāgulum sub linea potente $\frac{27}{64}$. quadrati lateris Tetraedri, & sub linea continente $\frac{3}{9}$. lateris Tetraedri, ad quadratum diametri sphæræ; Est autem rectangulum illud minus quadrato diametri sphæræ, quod eius latera minora sint sphæræ diametro; quippe quæ singula minora sint latere Tetraedri. Igitur & Tetraedrum Octaedro minus erit, hoc est, Octaedrum Tetraedro erit maius. Quod est propositum.

[c] 17. quartidec.

ALITER. [d] Quoniam cubus triplus est Tetraedri; minor vero quam triplus Octaedri: (Nam [e] cubus ad octaedrum est, vt latus cubi ad semidiametrum sphæræ; & latus cubi minus est, quam triplum semidiametri sphæræ, quod & tota diameter, qua cubi latere maior est, minorem proportionem habeat ad semidiametrum, quam triplam.) [e] Erit Octaedrum maius, quam Tetraedrum. Quod est propositum.

[d] 32. quartidec.

[e] 27. quartidec.

EODEM prorsus ordine se mutuo superant conuexa superficies eorundem corporum Regularium: hoc est, superficies conuexa Dodecaedri maior est superficie conuexa Icosaedri: Superficies conuexa Icosaedri maior superficie conuexa cubi: Conuexa superficies cubi superficie Octaedri maior: Octaedri denique superficies conuexa maior est conuexa superficie Tetraedri.

QVONIAM enim [f] est superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, vt latus cubi ad latus Icosaedri: Est autem cubi latus latere Icosaedri maius, [g] vt supra demonstratum est: Erit & superficies Dodecaedri superficie Icosaedri maior.

[f] 19. quartidec.

[g] 18. tertij dec.

SVPERFICIEM vero Icosaedri maiorem esse superficie Cubi, demonstratum est paulo ante theoremate quarto ante comparationem soliditatum quinque corporum Regularium.

DEINDE [a] quoniam est superficies cubi ad octaedri superficiem, vt latus cubi ad semidiametrum sphæræ: Est autem latus cubi semidiametro sphæræ maius, vt in theoremate tertio, quo ostendimus, cubum Octaedro maiorem esse, demonstratum est; Erit quoq; superficies cubi superficie Octaedri maior.

[a] 27. quartidec.

DENIQVE [b] quia superficies Octaedri sesquialtera est superficiei Tetraedri; perspicuum est, Octaedri superficiem maiorem esse Tetraedri superficie.

[b] 14. quartidec.

VIDES igitur superficies & soliditates corporum Regularium contrario ordine respondere eorundem lateribus: ita vt quo maius fuerit corpus, eo maiorem quidem habeat etiam superficiem, at eo minus latus. Nam [c] vt supra demonstratum est, Tetraedri latus est omnium maximum, eius vero superficies atque soliditas, vt hic demonstrauimus, omnium minima est: Item Dodecaedri latus omnium est minimum, eius vero conuexa superficies & soliditas omnium maxima. Denique quemadmodum, si Tetraedrum, Octaedrum, Cubus, Icosaedrum, & Dodecaedrum in eadē sphæra descripta sint, latera eorum, eo ordine, quo proposita sunt, atque ab Euclide descripta, se mutuo superant, [d] vt supra ostensum est; ita contrario ordine eorundem superficies conuexæ, atque soliditates se mutuo superant, vt hoc loco demonstrauimus.

[c] 18. tertij dec.

[d] 18. tertij dec.

CÆTERVM pretereundum non est hoc loco id, quod a Pappo demonstratum est lib. 5. Mathematicarum collectionum; soliditates videlicet quinque corporum Regularium, si isoperimetra sint, atque idcirco, non in eadem sphæra constructa, longe aliter se habere, quam a nobis demonstratum est. Nam corpus, quod plures habet bases, maius semper est corpore pauciorum basium: Ita vt Icosaedrum superet Dodecaedrum, Dodecaedrū maius sit Octaedro, Octaedrum superet Cubum, Cubus denique Tetraedro maius sit.

INVENTIO ANGVLI inclinationis duarum basium cuiuscunque solidi regularis, vnius ad alteram, ex Isidoro Hypsiclis præceptore.

I.

ANGVLVM inclinationis duarum Pyramidis basium, vnius ad alteram, inuenire.

SIT Pyramis A B C D, cuius latere B D, bifariam secto in E, ex angulis A, & C, lateri BD, oppositis rectæ ducantur A E, & C E; quæ cum perpendiculares sint ad B D, communem sectionem planorum ABD, CBD, in quibus existunt.

[a] 8. primi.

([a] Sunt.n.in triangulis AEB, AED, anguli ad E, æquales,&c.) angulũ inclinationis AEC, basiũ ABD, CBD, continebunt, ex defin. 6. lib. 11. Huic ergo æqualem exhibebimus in quolibet plano, hac ratione. Assumatur FGH, triangulum æquilaterum super rectam FG, lateri pyramidis æqualem constructum, atque idcirco triangulo cuicunque pyramidis propositæ, ipsi nimirum ABD, æquale, in quo ducta HI, perpendiculari ad FG, constituatur super FG, triangulum FGK, habens vtrumque latus FK, GK, æquale perpendiculari HI, hoc est, vtrique perpendiculari A E, CE, cum perpendiculares HI, AE, CE, sint æquales in triangulis æqualibus. Dico angulum FKG, æqualem esse angulo inclinationis AEC, basium ABD, CBD. Cum enim latera KF, KG, æqualia sint lateribus EA, EC; & basis FG, basi AC; æquales erunt anguli FKG, AEC. Dico insuper angulum inclinationis AEC, acutum esse. [b] Cum enim latus AD, vel illi æquale AC sesquitertium sit potentia vtriusque perpendicularis AE, CE; qualium partium 4. ponetur quadratum rectæ A C, talium 3. erit quadratum vtriusque rectæ AE, CE; ideoque earundem partiũ 6. erunt ambo simul quadrata rectarum AE, CE. Quare cũ in triangulo ABC, quadratum lateris A C, minus sit quadratis simul laterum A E, C E, acutus erit angulus A E C, vt in scholio propos. 13. lib. 2. demonstrauimus.

[a] 8. primi.

[b] 12. quartidec.

COROLLARIVM.

FACILE hinc colligemus, omnes inclinationes basium pyramidis æquales esse. Cum enim singuli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad bases oppositas ductis, cuiusmodi sunt AE, CE, subtendanturque a lateribus pyramidis, quale fuit AC; [c] *omnes erunt inter se æquales, quod & omnes illæ perpendiculares, quæ ipsos continent, æqua-*

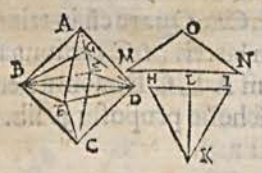
[c] 8. primi.

les sint, nec non & latera pyramidis eosdem subtendentia.

II.

ANGVLVM inclinationis duarum octaedri basium, vnius ad alteram, reperire.

EXHIBEATVR *O*ctaedrum *ABCDEF*, cuius diameter BD. Ex angulis B, & D, ad latus AE, triangulis *A*BE, *A*DE, commune, bifariamq; sectum in G, rectæ ducãtur BG, DG; quę cũ perpẽdiculares sint ad AE, communẽ sectionem planorum *AB*E, ADE, in quibus existũt, (quod in triãgulis B*G A*, B*G E*, anguli ad G, æquales sint, &c.) continebunt angulum BGD, inclinationis basium ABE, *A*DE, per defin. 6. lib. 11. Huic igitur æqualem exhibebimus in plano quolibet hac via. Sumatur HI*K*, triangulum æquilaterum super rectam *HI*, lateri octaedri æqualem fabricatum, ideoque triangulo cuicunque octaedri propositi, triangulo scilicet ABE, æquale, in quo ducta *K* L, perpendiculari ad HI, constituatur super recta MN, quæ æqualis sit diametro octaedri *B* D, hoc est, diametro



[a] *8. primi.*

metro quadrati *A*BCD, ex *A* B, latere octaedri descripti, triangulum *O*MN, habens vtrũque latus M*O*, N*O*, perpendiculari *K*L, æquale, hoc est, vtrique perdendiculari BG, DG, cum perpendiculares *K*L, BG, DG, in triangulis æqualibus æquales sint. Dico angulum MON, æqualem esse angulo inclinationis B G D, basium ABE, ADE. Cum enim latera *O*M, ON, æqualia sint lateribus G B, G D; & basis M N, basi BD; [a] Aequales erunt anguli M*O*N, B*G*D. Dico præterea, angulum inclinationis BGD, esse obtusum. [b] Cũ enim diameter octaedri BD, dupla sit potentia lateris *A*B; [c] latus vero A B, potentia sesquitertium rectæ B G: qualium partium 8. ponetur quadratum diametri B D, talium 4. erit quadratum lateris A B, earundemque 3. quadratum rectæ B G; ideoque ambo simul quadrata rectarum B *G*, D G, talium partium 6. erunt. Quare quadratum lateris *B* D, in triangulo *GB* D, maius est quadratis simul laterum G B, GD; Ac propterea angulus BGD, obtusus erit, vt in scholio propos. 12. lib. 2. ostendimus.

[a] *8. primi.*

[b] *14. tertij decimi*

[c] *12. quarti dec.*

COROLLARIVM.

HINC sit, omnes inclinationes basium octaedri æquales esse. Cum enim singuli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad bases oppositas ductis, quales

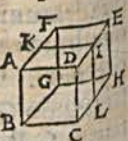
sunt BG, DG, subtendanturque ab octaedri diametris, cuiusmodi est BD; [a] *omnes inter se æquales erunt, quod & omnes illæ perpendiculares, quæ ipsos continent, æquales sint, necnon & diametri octaedri eosdem subtendentes.*

[a] 8. primi.

III.

ANGVLVM inclinationis duarum cubi basium, vnius ad alteram, inuenire.

SIT cubus ABCDEFGH, in quo secetur latus DE, bifariam in I, necnon & latera illi opposita in quadratis AE, EC, commune latus illud DE, habentibus, in punctis K, L. Deinde rectæ ducantur IK, IL; [b] quę cum æquales, ac parallelæ sint lateribus EF, EH, (quod & KF, IE, inter se, nec non & IE, LH, inter se æquales existant, & parallelæ) ideoque angulos rectos ad latus DE, efficiant, cõtinebunt KIL, angulum inclinationis basium AE, EC, ex defin. 6. lib. 11. Quoniam vero rectæ IK, IL, parallelæ existentes rectis EF, EH, & non in eodem cum illis plano, [c] angulum KIL, æqualem continent angulo recto FEH; Rectus erit angulus inclinationis basium cubi. Quare vt angulo inclinationis basium cubi æqualis in aliquo plano exhibeatur, cõstituendus erit angulus rectus. Hic enim, vt modo demonstrauimus, æqualis erit angulo inclinationis basium cubi.



[b] 33. primi

[c] 10. vnde.

C O-

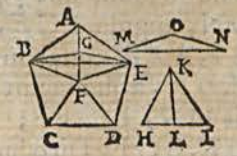
COROLLARIVM I.

QVOCIRCA, cum eodem argumento demonstrari possit, quarumlibet duarum basium cubi angulum inclinationis esse rectum; perspicue concluditur, omnes inclinationes basium cubi æquales inter se esse.

IIII.

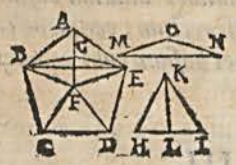
ANGVLVM inclinationis duarum basium Icosaedri, vnius ad alteram, inuenire.

ESTO pyramis ABCDEF, una ex 12. pyramidibus Icosaedri, cuius basis pentagonum ABCCE, ex quinque Icosaedri lateribus compositi situm, vertex autem F. Diuiso itaque latere AF, bifariam in G, ducantur ex triangulorum ABF, AEF, latus AF, commune habentium, angulis B, & E, lateri AF, oppositis rectæ BG, EG, quæ cum ex demonstratis in problemate 2. huius scholij, perpendiculares sint ad AF, communem sectionem planorum ABF, AEF, in quibus ducuntur, comprehendent



BGE,

BG*E*, angulum inclinationis baſium A*B*F, *A E*F, per 6. defin. lib. 11. Huic igitur in plano quouis exhibebimus æqualem, hac arte. Accipiatur triãgulum æquilaterum HIK, ſuper rectam HI, lateri Icoſaedri æqualem fabricatũ, hoc eſt, cuiuis triangulo Icoſaedri, ipſi videlicet A*B* F, æquale, in quo ducta recta K L, ad HI, perpendiculari, conſtruatur ſuper recta MN, quæ rectæ *B E*, angulum pentagoni A, ſubtendenti ſit æqualis, triangulum O MN, habens vtrumque latus M *O*, N *O*, perpendiculari KL, æquale, hoc eſt, vtrique perpendiculari *BG*, *EG*, cum perpendiculares *KL*, *BG*, *EG*, in triangulis æqualibus ſint æquales. Dico angulum M*O*N, angulo *BGE*, inclinationis baſium A B F, A *E*F, æqualem eſſe. Cum enim latera *O* M, *O* N, æqualia ſint lateribus G B, G *E*, & baſis MN, baſi B E; [a] Aequales erunt anguli M *O* N, B G E. Dico hunc etiam angulum inclinationis *BGE*, eſſe obtuſum. Cum enim *BG*, angulum rectum faciat *A G B*; [b] erit recta *A B*, maior quam recta *BG*; ad eundemque modum *A E*, maior erit quam *E G*. Quare rectæ *A B*, *AE*, maiores quoque erunt rectis *O*M, *O*N, cum hæ rectis GB, GE, poſitæ ſint æquales. Si itaque recta *B E*, ſuper rectam ſibi æqualem MN, intelli-



[a] 8. primi.

[b] 19. primi.

intelligatur poni; cadet angulus *A*, extra triangulum M*O*N, ita vt rectæ *AB*, *AE*, rectas *OM*, *ON*, prorſus includant. [a] Angulus ergo *O*, maior erit angulo B*AE*: At hic obtuſus eſt. (cum enim quinque anguli pentagoni ſex rectis ſint æquales, per ea, quæ a nobis ſunt demonſtrata in ſcholio propoſ. 32. lib. 1. comprehendet quilibet illorum rectum, ac inſuper vnius recti partem quintam, obtuſus ergo erit, cum recto ſit maior), Multo igitur magis obtuſus erit angulus M*O*N, hoc eſt, ſibi æqualis BGE.

[a] 21. primi

COROLLARIVM.

NON obſcure quoque ex his conſequitur, omnes baſium Icoſaedri inclinationes inter ſe æquales eſſe. Nam cum ſinguli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad baſes oppoſitas ductis, quales ſunt BG, EG, ſubtendanturque a rectis angulos pentagonorum ſubtendentibus, cuiuſmodi eſt B E: [b] *omnes inter ſe erunt æquales, quod & illæ omnes perpendiculares, quæ ipſos continent, æquales ſint, nec non & rectæ illæ omnes, quæ pentagonorum angulos ſubtendunt æquales æqualibus rectis comprehenſos,* [c] *æquales erunt.*

[b] 8. primi.

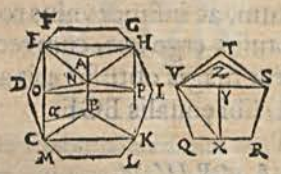
[c] 4. primi.

V.

ANGVLVM inclinationis duarũ baſium Dodecaedri, vnius ad alteram, reperire.

CVM

CVM per ea, quæ oſtendimus in propoſ. 8. lib. 15. quatuor latera cubi in Dodecaedro deſcripti ſubtendant quatuor angulos quatuor baſium Dodecaedri ad vnum latus coeuntium; ſint huiuſmodi pentagona ABCDE, EFGHA, AHIKB, BKLMC, ad latus AB, conuenientia;



duo quidem ABCDE, AHIKB, ſecundum idem latus cõmune AB; alia autẽ duo AEFGH, BCMLK, ſecundum angulos EAH, CBK. His porro pẽtagonis inſcriptum ſit quadratum cubi ECKH, cuius quatuor latera ſubtendant quatuor angulos pentagonorum D, B, I, A. Diuiſo autem latere AB, bifariam in N, ducantur ex N, in planis pentagonorum ABCDE, ABKIH, ad AB, perpendiculares NO, NP, ſecantes latera EC, HK, in O, & P, ad angulos quoque rectos, cum rectæ EC, HK, ipſi AB, ſint parallelæ, ex ſcholio propoſ. 8. lib. 13. Comprehendunt igitur NO, NP, angulum ONP, inclinationis baſium ABCDE, ABKIH. Cui æqualem in quouis plano hac arte conſtruemus. Super rectam QR, lateri Dodecaedri AB, æqualem conſtituatur pentagonum æquilaterum & æquiangulum QRSTV, hoc eſt, cuiuis pentagono Dodecaedri, nimirum ipſi ABCDE, æquale, cuius angulo T, recta

recta ſubtendatur VS, æqualis exiſtens rectæ EC, cum & latera TV, TS, lateribus DC, DE, æqualia ſint, anguloſque contineant æquales. Diuiſa deinde recta QR, bifariam in X, ducatur a puncto X, ad QR, perpendicularis XY; proptereaque perpendicularis ad VS, cum VS, ſit parallela ipſi QR, ex ſcholio propoſit. 8. libri 13. Ac poſtremo ſuper recta VS, triangulum fabricetur VZS, habens vtrumque latus ZV, ZS, perpendiculari XY, æquale. Dico angulum VZS, æqualem eſſe angulo inclinationis ONP. Ductis enim rectis NE, NH, VX; cum latera EA, AN, æqualia ſint lateribus HA, AN: Item lateribus VQ, QX, angulosque comprehendant æquales; [a] Aequales erunt & baſes NE, NH, VX, & anguli ANE, ANH, QXV; ideoque & reſidui ex rectis, anguli videlicet ENO, HNP, VXY, æquales erũt. Quoniã igitur anguli ENO, EON, trianguli ENO, æquales ſunt angulis HNP, HPN, trianguli HNP; nec nõ & angulis VXY, VYX, triãguli VXY; (ſunt. n. EON, HPN, VYX oſtenſi recti.) Et latus NE, lateribus NH, VX, æquale demonſtratum; [c] Aequalia erunt reliqua latera NO, OE, reliquis lateribus NP, PH; Item lateribus XY, YV. Quare rectæ ZV, ZS, æquales exiſtentes ipſi XY, rectis NO, NP, æquales erunt. Iam vero, quia OE, PH, æquales ſunt, ac parallelæ; [d] erit quoque recta coniuncta OP, æqualis & parallela ipſi EH, ideoque æqualis ipſi EC, hoc eſt, rectæ VS,

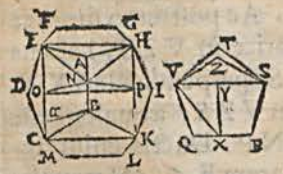
[a] 4. primi.
[b] 4. primi
[c] 26. primi.
[d] 33. primi

VS. Quam ob rem, cum latera ZV, ZS, lateribus NO, NP, æqualia sint; basis item VS, basi OP;[a] æqualis erit angulus VZS, angulo inclinationis ONP. Dico etiam angulum hunc ONP, inclinationis, esse obtusum. Nã ducta recta Bα, ipsi NO, parallela; cũ sit quoq; NB, ipsi Oα, parallela, ex scholio prop. 8. lib. 13. Parallelogrãmum erit NOαB, ideoq; recta Bα, ipsi NO, æqualis. Quia vero BC, latus pentagoni oppositum angulo CαB, qui rectus est, (æqualis nimirum interno CON,) maius est latere Bα, hoc est, recta NO, vel vtraque ZV, ZS, quæ ipsi NO, ostensæ sunt æquales; Erunt duæ rectæ TV, TS, maiores duabus rectis ZV, ZS. Cadit igitur punctum Z, intra triangulum TVS, ita vt rectæ TV, TS, rectas ZV, ZS, includant omnino; Atque proinde angulus VZS, ideoque illi æqualis ONP, maior est angulo pentagoni T: Hic vero, cum sit pentagoni angulus, paulo ante, cum de inclinatione basium Icosaedri ageremus, demonstratus est maior recto. Multo igitur maior recto erit angulus inclinationis ONP, ideoque obtusus.

[a] 8. primi.

[b] 34. primi.

[c] 29. primi.



COROLLARIVM.

PATET igitur ex his, omnes inclinationes basium Dodecaedri æquales esse inter se. Cum enim singuli

guli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus a medio puncto lateris Dodecaedri ad duo latera cubi in Dodecaedro descripti ductis; quales sunt NO, NP, subtendanturque a rectis, quæ cubi inscripti lateribus sunt æquales, vel certe, quæ rectis subtendentibus angulos pentagonorum æquales sunt, cuiusmodi est recta OP, lateri cubi inscripti EH, quod angulum pentagoni EAH, subtendit, æqualis;[a] Erunt omnes inter se æquales, cum & omnes illæ perpendiculares, quæ ipsos continent, æquales sint, nec non & rectæ illæ omnes, quæ eosdem subtendunt, latera videlicet cubi, inter se etiam sint æquales.

[a] 8. primi.

ELEMENTI DECIMISEXTI FINIS.

INDEX PROBLEMATVM,

QVAE HISCE COMMENT. CONTINENTVR.

QVORVM EA, QVAE EVCLIDIS sunt; eodem charactere sunt expressa, quo in propositionum demonstrationibus vsi sumus: quæ vero adiecta a nobis, charactere, quo scholia notauimus. Litera porro A, primum tomum, & litera B, secundum significat. Vt autem facilius quisque inueniat problemata, quæ cupit, digessimus ea secundum materias, de quibus proponuntur.

ACVTANGVLVM triangulum. vide. Triangulum.

AEQVIANGVLA, & æquilatera figura. vide. Figura intra & extra circulum, &c.

AEQVILATERA, & æquiangula figura. vide. Figura intra & extra circulum, &c.

AEQVILATERVM triangulum. vide. Triangulum.

ANGVLI proportionales. vide. Figuræ, anguli, & lineæ proportionales.

ANGVLVS.

Angulum datum rectilineum bifariam secare. pag. 97. A

Angulum datum rectilineum in quotuis partes æquales diuidere. pag. 99. & 902. A

Angulum rectum datū in tres angulos æquales partiri. 176. A

Angulum rectum ad pũctum in data recta linea datum constituere. 103. A
Angulum rectum ad extremũ punctum lineæ rectæ constituere. pag. *104. & 168. A*
Angulum rectum in data recta per lineam ex puncto extra rectam dato ductam constituere. 105. & 106. A
Angulum rectũ in data recta constituere per lineam ductam ex puncto extra rectam dato, quando punctum vicinum est datæ rectæ, vel prope extremum plani cuiuspiam, vel quando recta data prope extremum plani est, vel denique quando & datum punctum est uicinum extremo plani, et recta data est prope aliud extremum plani. 107. & 168. A
Angulus propositus, rectus ne sit, an obtusus, acutusve, cognoscere. pag. *40 & 41. A*
Angulum dato angulo rectilineo æqualem ad datã rectam lineam, datumque in ea punctũ constituere. 131. & 132. A
Angulos rectilineos, & arcus circulorum reperire incommensurabiles. 918. A
Ex tribus angulis planis, quorũ duo quomodocũque assumpti reliquo sunt maiores, solidũ angulum cõstituere. Oportet autem illos tres angulos quatuor rectis minores esse. pagina 579. B
Ad datam rectam lineam, ciusq; punctum angulum solidũ constituere solido angulo dato æqualem. 590. B

ARCVS. vide. Circulus.

CIRCVLVS.

Circuli dati centrum reperire. pag. 327. A
Per datum punctum in circumferentia rectam, quæ circulũ tangat, ducere. 353. A
A dato puncto rectam lineam ducere, quæ datum circulũ tangat. 388. & 432. A
Circulis duobus datis, quorum neuter alterum includat; rectam lineam ducere, quæ utrumque circulum tangat. 389. A
Circulum per datum punctum describere, qui alium datum circulum tangat. 391. A
Lineæ rectæ, quæ circulum secat, lineam parallelã ducere, quæ eundem circulum tangat. 394. A
Circuli segmento dato, describere circulum, cuius est segmentum. 410. A
Circulum per tria puncta non existentia in linea recta, describere. 412. *& 465. A*
Arcum datum secare bifariam. pag. 425. A
Circuli segmẽtum super datam rectam describere, in quo angulus existens sit æqualis dato angulo rectilineo. 436. A
A dato circulo segmentum abscindere

scindere capiens angulum angulo dato rectilineo æqualem pag. 437. A
Circulis duobus datis, quorũ unus non sit totus intra alium; circulum, qui utrumque tangat, describere. 449. A
In circulo dato rectam accommodare datæ rectæ, quæ diametro maior nõ sit, æqualem. pag. 456. A
In circulo rectam accommodare æqualem datæ rectæ, quæ circuli diametro maior non sit, & alteri rectæ parallelam. 457. A
Dato circulo, & duobus punctis, siue extra circulum, siue intra, dummodo neutrũ sit in circumferentia; per ea puncta duas rectas ducere ad aliquod unũ punctum circumferentiæ, ita ut rectæ coniungens duo puncta, quibus duæ illæ rectæ circumferentiã secant, parallela sit rectæ data duo puncta connectenti. 890. A
Datum arcum circuli in datã proportionem diuidere. 900. A
Datum arcum, vel angulum rectilineum in quotuis partes æquales partiri 902. A
Dato arcui circuli, ex cuius quadrante quadratrix descripta est, rectam lineam inuenire æqualem. 905. A
Dato circulo quadratum æquale constituere. 908. A
Dato quadrato, circulũ æqualem describere. 911. A
Circulum cuicũque rectilineo æqualem describere: Et circulo figurã rectilineam æqualem constituere, quæ cuicunque alteri similis sit. 912. A
Datæ rectæ lineæ circumferentiam circuli æqualem reperire. 912. A
Datis duobus circulis inæqualibus, datoque arcu in uno eorum; ex altero arcum æqualem abscindere. 913. A
Arcus circulorum, & angulos rectilineos inuenire incommensurabiles. 918. A

CIRCVMFERENTIA. vide. Circulus.

COMMENSVRABILES, & incommensurabiles magnitudines.

An duæ quæcunque magnitudines propositæ sint commensurabiles, nec ne, explorare. 293. B
Duabus magnitudinibus commẽsurabilibus datis, maximã earum communem mensuram inuenire. 294. B
An quotlibet magnitudines propositæ sint commensurabiles nec ne, considerare. 295. B
Tribus magnitudinibus commẽsurabilibus datis, maximã earum mẽsuram communem inuenire. 297. B
Propositis duabus magnitudinibus commensurabilibus, quam proportionem habeant in numeris, inuenire. 301. B
Rectam inuenire, ad quam ita se habeat

habeat quęuis alia data recta, vt numerus ad numerũ. 303. B
Rectam inuenire, ad cuius quadratum ita se habeat quadratum alterius datæ rectę, vt numerus ad numerum. 303. B
Propositæ rectæ lineæ inuenire duas rectas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantum, alteram vero etiam potentia. 319. B

COMPOSITI inter se numeri. vide. Numerus par, &c.

COMPOSITVS numerus. vide. Numerus par, &c.

CONVS, & Cylindrus. vide. Parallelepipedum, &c.

CORPVS Regulare. vide. Figura intra & extra circulum, &c.

CVBVS numerus. vide. Numerus planus, &c.

CYLINDRVS, & Conus. vide. Parallelepipedum, &c.

DIAMETER circuli. vide. Circulus.

FIGVRA intra, & extra circulum, sphæram, atque aliam figuram.

In circulo dato triangulum describere dato triãgulo ęquiangulum. 458. A
Circa datum circulum triangulum describere dato triangulo æquiangulum. 459. A
In dato triangulo circulum describere. 460. A
Trianguli lateribus cognitis, inuenire puncta, in quibus circulus inscriptus ipsa latera tangere debet. 462. A
Circulum circa datum triangulum describere. 463. A
In dato circulo quadratum describere. 465. A
Circa datum circulum quadratum describere. 466. A
In dato quadrato circulum describere. 467. A
Circa datum quadratum circulum describere. 467. A
In dato circulo pentagonũ ęquilaterum & æquiangulum inscribere. 470. A
Super datam rectam pentagonum æquilaterum, & æquiangulum describere. 471. A
Circa datum circulum, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum describere. 473. A
Circa circulum describere quamcunque figuram regularem, quę circulo inscribi potest. 474. A
In dato pentagono æquilatero & ęquiangulo circulum inscribere. 475. A
In quacunque figura regulari circulum describere. 476. A
Circa pentagonum æquilaterum & æquiangulum circulum describere. 477. A
Circa quamcunque figuram regularem circulũ describere. 477. A
In circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum describere. 478. A
In circulo quintidecagonũ ęquilaterum, & æquiangulum describere. 480. A
Figura quacunque regulari circulo inscripta, describere similem circa circulum, & in ea circulum inscribere, & circa eandem circulum describere. 492. A
Figura quacunque regulari circulo inscripta, inscribere aliam duplo plurium laterum. 492. A
Figuras regulares imparium laterum circulo inscribere beneficio Isoscelium, quorum anguli ad basim angulorum ad verticem multiplices sunt. 492. A
Figuras regulares parium laterum circulo inscribere beneficio Isoscelium, quorum anguli ad basim angulorum ad verticem multiplices sesquialteri sunt. 493. A
Figuram quamcunque regularem absque beneficio Isoscelium circulo practice inscribere. 494. A
Figuram quamcunque regularem super datã rectam practice describere. 495. A
Latus pentagoni, & decagoni in eodem circulo, ex Ptolemæo inuenire. 497. A. & 713. B
Quadratricem lineam intra quadrantem, & quadratum describere. 895. A
Duobus circulis circa idem centrum existentibus, in maiori circulo polygonum æquilaterum & parium laterum inscribere, quod non tangat minorem circulum. 675. B
Ex quo fit, perpendicularem ad diametrum ductam ab extremitate lateris polygoni inscripti, quod cum diametro conuenit, totam extra minorem circulum cadere. 676. B
Duabus sphæris circa idem centrum existentibus, in maiori sphæra solidum polyedrũ inscribere, quod non tangat minoris sphærę superficiẽ. 676. B
Ex quo fit, si in quauis alia sphæra describatur solidum polyedrum simile prædicto polyedro, proportionem polyedri in vna sphæra ad polyedrum in altera sphæra esse triplicatam eius, quam habent sphærarum diametri. 682. B
Pyramidem constituere, & data sphæra complecti. 720. & 925. B
Octaedrum constituere, & sphæra complecti, qua & pyramidem. 725. & 927. B
Cubum constituere, & sphęra cõplecti, qua priores figuras. pag. 729. & 929. B
Icosaedrum constituere, & sphæra complecti, qua & ante dictas figuras. 733. & 931. B
Dodecaedrũ constituere, & sphę

ra complecti, qua & prædictas figuras. 739.& 936.B
Latera quinque corporum Regularium exponere, & inter se comparare. 749.B
Numerum laterum, & angulorum solidorum cuiusq; corporis Regularis expedite cognoscere. 756.B
In dato cubo pyramidem describere. 827.B
In data pyramide octaedrũ describere. 828.B
In dato cubo octaedrum describere. 829.B
In dato octaedro cubum inscribere. 831.B
In dato Icosaedro Dodecaedrũ inscribere. 833.B
In dato octaedro pyramidem describere. 836.B
In dato Dodecaedro Icosaedrum describere. 838.B
In dato Dodecaedro cubum describere. 840.B
In dato Dodecaedro octaedrum describere. 841.B
In dato Dodecaedro Pyramidem describere. 842.B
In dato Icosaedro cubum describere. 843.B
In dato Icosaedro Pyramidem describere. 844.B
In dato cubo Dodecaedrum describere. 844.B
In dato cubo Icosaedrum describere. 853.B
In dato Icosaedro octaedrum describere. 856.B
In dato octaedro Icosaedrum describere. 857.B
In dato octaedro Dodecaedrum describere. 862.B
In data pyramide cubum describere. 863.B
In data pyramide Icosaedrum describere. 869.B
In data pyramide Dodecaedrum describere. 870.B
In dato solido Regulari sphæram describere. 871.B
Datis duobus circulis in sphæra parallelis, dataque in vno eorum linea recta, ducere in altero diametrum huic rectæ datæ parallelam: vel etiam aliam rectam, quæ datæ rectæ sit æqualis et parallela, dũmodo recta data maior nõ sit diametro posterioris circuli. 918.B
In data sphæra duos circulos æquales, ac parallelos describere, ita vt diameter sphæræ sit vtriusque diametri potentia sesquialtera. pag. 924.B
Angulum inclinationis duarum basium cuiusque corporis Regularis inuenire. 948.B

FIGVRAE, anguli, & lineæ proporortionales.

A data recta linea imperatã partem auferre. 768.A
Datam rectam lineã similiter secare, vt data altera recta secta fuerit. 769.A
Datã rectam in quotuis partes æquales secare. 210.& 770.A
Datã rectã secare in duas partes datam

datam proportionem habentes. pag. 773.A
Datam rectam in quotuis partes Arithmetice proportionales secare. 776.A
Datis duabus rectis, tertiã proportionalem inuenire. 777.A
Quotuis rectas in data proportione continue proportionales reperire. pag. 778.A
Datis tribus rectis, quartã proportionalem inuenire. 780.A
Datis duabus rectis, alias duas in eadem cum illis proportione reperire. 781.A
Datis tribus rectis, quartam inuenire, quæ sit ad tertiam, vt prima ad secundam. 781.A
Datis duabus rectis, mediam proportionalem inuenire. 782.A
Data recta, aliam rectam (quæ minor non sit, quàm dupla illius) ita secare, vt data recta sit media proportionalis inter segmenta huius. 783.A
Secta recta in duas partes vtcunq; alterutram earum ita rursus partiri in duas partes, vt omnes tres partes sint continue proportionales. 789.A
Datis duabus rectis, mediam proportionalẽ in Arithmetica proportionalitate inuenire. 792.A
Datis duabus rectis, minorem extremitatem in Arithmetica proportionalitate inuenire. 792.A
Datis duabus rectis, maiorem extremitatem in proportionalitate Arithmetica inuenire. 793.A
Datis duabus rectis, mediam proportionalem in Geometrica proportionalitate inuenire. 793.A
Datis duabus rectis, minorẽ extremitatẽ in Geometrica proportionalitate inuenire. 794.A
Datis duabus rectis, maiorem extremitatem in Geometrica proportionalitate inuenire. 794.A
Datis duabus rectis, mediam proportionalem in Harmonica proportionalitate inuenire. 795.A
Datis duabus rectis, minorem extremitatem in Harmonica medietate inuenire. 796.A
Datis duabus rectis, maiorem extremitatem in proportionalitate Harmonica inuenire. 797.A
A data recta dato rectilineo simile, similiterque positum rectilineum describere. 810.A
Dato rectilineo simile, similiterque positum, & alteri dato æquale idem constituere. pag. 839.A
Ad datam rectam, dato rectilineo, quod maius non sit parallelogrammo ad dimidiam applicato, æquale parallelogrãmum applicare deficiens figura parallelogramma, quæ similis sit alteri parallelogrammo dato. 846.A
Ad datam rectam, dato rectilineo æquale parallelogrammũ applicare, excedens figura parallelogramma, quę similis sit parallelogrammo alteri dato. pag. 849.A

Datâ rectâ terminatâ extrema, ac media rônc secare. 850.A
A dato rectilineo imperatam partem auferre, ita tamen, vt & ablatū, & id, quod relinquitur, simile sit cuiuis rectilineo dato, similiterque positum. 869.A
Datis duobus rectilineis, tertium proportionale inuenire. 870.A
Datis tribus rectilineis, quartū proportionale inuenire. 870.A
Datis duobus rectilineis, medium proportionale inuenire. 871.A
Dato rectilineo, duo rectilinea æqualia constituere, quæ similia sint similiterque descripta cuicunque rectilineo, habeantq; datam proportionem inter se. 872.A
Dato rectilineo, duo rectilinea æqualia exhibere, quę cuiuis rectilineo similia sint, similiterq; descripta, lateraque eorum homologa habeant inter se datam proportionem. 873.A
Datis duobus rectilineis, æquale rectilineum constituere, quod simile sit, similiterque positum dato rectilineo. 874.A
A dato puncto in latere trianguli rectam ducere, quæ triangulum diuidat in duo segmenta secundum datam proportionem. pag. 879.A
Dato rectilineo simile, similiterque positum rectilineum describere, maius vel minus, secundum datam proportionem. 881.A
In dato quadrato aliud quadratum describere in data proportione, quæ dupla maior non sit. pag. 885.A
Datum arcum circuli in datâ proportionem diuidere. 900.A
Isosceles triangulum constituere, cuius vterque angulorum æqualiū ad reliquum habeat proportionem datam. 902.A

FIGVRAE planę quadrilateræ. vide. Parallelogrammum, &c.

FRACTIONES numerorum. vide. Minutiæ numerorum.

FRACTVS numerus. vide. Minutiæ numerorum.

IMPAR numerus. vide. Numerus par, &c.

INCOMMENSVRABILES magnitudines. vide. Commensurabiles, & incommensurabiles magnitudines.

IRRATIONALES magnitudines. vide. Rationales, & irrationales magnitudines.

ISOSCELES. vide. Triangulum.

LINEA perpendicularis. vide. Recta linea.

LINEA recta. vide. Recta linea.

LINEAE parallelæ. vide. Recta linea.

LINEAE proportionales. vide. Figuræ, Anguli, & lineæ proportionales.

MAGNITVDINES commensurabiles, & incommensurabiles. vide. Commensurabiles, & incommensurabiles magnitudines.

MAGNITVDINES proportionales in communi.
Proportionem ex duabus, vel pluribus proportionibus componere. pag. 831.A
Proportionem minorem ex maiore auferre. 831.A

MINVTIAE numerorum.
Duas minutias diuersarum denominationum ad alias duas eiusdem denominationis illis æquales reducere. 249.B
Integrum numerum quemcunque ad dati denominatoris minutiā reducere. 249.B
Datam minutiam duplare, ac dimidiare. 250.B
Minutiam minutiæ, aut minutiam minutiarum ad simplicem minutiam reducere. 253.B
Datis duabus minutijs, alterutram earum ad aliam æqualem reducere, ita vt alterius numeri numeros huius inuentæ numerent, per numeros ex numeratore datæ minutiæ reductæ in denominatorem alterius minutiæ datæ, & ex numeratore alterius huius minutię datę in denominatorem illius reductæ productos. 254.B
Datam minutiam ad minimos terminos reducere. 257.B
Datam minutiam ad aliam æqualem datæ denominationis, quando id fieri potest, revocare. 257.B
Minutias plures in vnam summam colligere. 259.B
Minutiam minorem ex maiore detrahere. 261.B
Minutiam per minutiam multiplicare. 263.B
Minutiam per minutiam diuidere. 264.B
Minutiam in minutiam inferere. pag. 267.B

NVMERI proportionales in communi.
Ex datis duobus numeris, tres numeros Harmonice proportionales inuenire, quorum extremi eandem proportionem habeant, quam dati duo numeri. 800.A
Datis duobus numeris, mediū Harmonice proportionalem inuenire. pag. 802.A
Datis duobus numeris, minorē extremitatem in proportionalitate Harmonica inuenire. 803.A
Datis duobus numeris, maiorē extremitatem in proportionalitate Harmo-

Harmonica inuenire. 803.A
Datis duobus numeris, maiorem extremitatē in Harmonica proportionalitate inuenire, 805.A
Datis numeris quotcunque, repe rire minimos omniū eandem rationem habentium cum ipsis. 95.B
Duos minimos numeros reperire in proportione quotuis numerorum continue proportionalium. pag. 96.B
Numeros reperire deinceps proportionales minimos quotcū que quis iusserit in data ratione. 110.B
Numeros quotcunque integros, & minimos continue proportionales aliter reperire, in proportione data non multiplici. 114.B
Datis quotcunque rationibus in minimis numeris, reperire numeros deinceps minimos in datis rationibus. 117.A
Duobus numeris datis, considerare, an possit ipsis tertius proportionalis inueniri. pagina 210.A
Tribus numeris datis, considera re, an ipsis quartus proportionalis possit inueniri. 211.B
Datis quotlibet numeris, considerare, an ipsis possit alius proportionalis adiungi. 213.B
Summam quotcunque numerorum continue proportionalium inueni re. 230.B
Inuenire quotcūq; numeros cōtinue proportionales in data proportione, quorum summa æqualis sit numero, qui ex primo in vltimum gignitur, vel ex quibuslibet duobus, qui ab extremis æqualiter distant. 239.B
Item quorum summa sit numerus quadratus, cuius radix sit medius terminus. 239.B
Duos numeros in data proportione inuenire, quorum summa æqualis sit numero producto ex vno in alium. pag. 239.B

NVMERVS fractus. vide. Minutiæ numerorum.

NVMERVS Par, Impar, Primus, Pariter par, Pariter par & impariter: Pariter impar, Perfectus.

Dati duo numeri an sint primi, inter se, necne, considerare. 34.B
Datis duobus numeris non primis inter se; maximam eorum communem mensuram reperire. 35.B
Dati quotuis numeri sint ne primi inter se, an non, considerare. pag. 36.B
Datis tribus numeris nō primis inter se, maximā eorū communem mensuram reperire. 37.B
Datis duobus numeris, minimū numerum ab eis numeratum reperire. 97.B
Tribus numeris datis, reperire minimum ab eis numeratum. pag. 100.B

Datis quotuis numeris, inuenire minimum ab eis numeratum. pag. 102.B
Numerū reperire, qui minimus cum sit, habeat datas partes. pag. 103.B
Numerum reperire, qui minimus cum sit, habeat datas partes, hac lege, vt qualibet pars contineat partem subsequentem. 106.B
Primis numeris datis quotcunque, inuenire alium primum numerum ab illis diuersum. 216.B
Omnes pariter pares tantum reperire. 226.B
Omnes pariter impares tantum inuenire. 227.B
Omnes pariter pares, & pariter impares inuenire. 229.B
Omnes numeros perfectos inuenire. pag. 233.B

NVMERVS Planus, Solidus, Quadratus, Cubus, similes plani, ac solidi numeri.

Quadratum numerum inuenire, cū quo datus quiuis numerus quadratum quoque numerum constituat: Et a quo idem datus numerus subtractus relinquat quadratū. 265.268.272.& 278.A
Planos numeros, vel solidos duos nō similes reperire. 171.B
Planos, vel solidos numeros quotcunque non similes inuenire. pag. 318.B
Duos numeros planos similes inueni re, pares, vel impares, vel vnū pa rem, & alterū imparem. pag. 366.B
Duos numeros quadratos inuenire, ita vt compositus ex ipsis quadratus etiam sit. pagina 367.B
Duos numeros quadratos inuenire, ita vt excessus eorum quadratus etiam sit. 368.B
Duos numeros quadratos inuenire, quorum excessus non sit quadratus. 368.B
Duos numeros quadratos inueuire, ita vt compositus ex ipsis non sit quadratus. 369.B
Duos numeros inuenire, ita vt compositus ex ipsis ad neutrum ipsorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. pag. 372.B

OBTVSANGVLVM triangulum. vide. Triangulum.

PARALLELAE lineæ. vide. Recta linea.

PARALLELEPIPEDVM, & plana parallela.

Dato plano, per datum punctum, quod in eo nō est, parallelum planum ducere. 365.B
A data recta linea, dato solido parallelepipedo simile & similiter positum solidum parallelepipedum describere. pagina 592.B

PARALLELOGRAMMVM, & aliæ figuræ planæ quadrilateræ.

Parallelogrammum constituere, cuius vnus angulorum æqualis sit dato angulo rectilineo, lateraque circa illum angulum datis duabus rectis æqualia. 165. A

Parallelogrammum secare bifariã per rectam per quoduis punctum ductam, quod non sit in diametro, nisi quando diametrum secat bifariam. 183. A

Parallelogrammum dato triangulo æquale constituere in dato angulo rectilineo. 218. A

Parallelogrãmo dato æquale triãgulum constituere in dato angulo rectilineo. 218. A

Parallelogrammum dato triangulo æquale cõstituere super datam rectam, & in dato angulo rectilineo. 221. A

Parallelogrãmo dato æquale triangulum constituere super datam rectam, & in dato angulo rectilineo. 223. A

Parallelogrammum dato rectilineo æquale constituere super datam rectam, & in dato angulo rectilineo. 224. A

Parallelogrammum datis quotcunque rectilineis æquale constituere super datam rectam, & in dato angulo rectilineo. 225. A

Rectilineis duobus inæqualibus datis, excessum maioris supra minus inquirere. 226. A

Quadratum supra datam rectam constituere. 226. A

Quadratis duobus inæqualibus datis, inuenire alia duo quadrata, quæ & æqualia inter se sint, & simul sumpta æqualia duobus datis simul sumptis. 236. A

Quadratis quotlibet datis, siue æqualibus, siue inæqualibus, inuenire quadratum omnibus illis æquale. 238. A

Quadratis duobus datis, alteri illorum adiungere figuram, quæ reliquo quadrato sit æqualis, ita ut tota figura composita sit etiã quadrata. 238. A

Quadratum dato rectilineo æquale constituere. 315. A

Dato excessu diametri alicuius quadrati supra latus eiusdem: Inuenire latus ipsius quadrati. pag. 317. A

Dato circulo quadratũ æquale constituere. 908. A

Dato quadrato, circulum æqualem describere. 911. A

PAR, & impar numerus. vide. numerus par, &c,

PARITER par, pariter par & impariter, ac pariter impar. vide. Numerus par, &c.

PERFECTVS numerus. vide. Numerus par, &c.

PERPENDICVLARIS linea. vide. Recta linea.

PLA-

PLANA figura intra, & extra circulum, atq; aliam figuram. vide. Figura intra & extra circulum, &c.

PLANAE figuræ quadrilateræ. vide. Parallelogrammum, &c.

PLANA parallela. vide. Parallelepipedum, &c.

PLANI numeri similes. vide. Numerus planus, Solidus, Quadratus, &c.

PLANVS angulus. vide. Angulus.

PLANVS numerus. vide. Numerus planus.

PORTIO circuli. vide. Circulus.

PRIMI inter se numeri. vide. Numerus par, &c.

PRIMVS numerus. vide. Numerus par, &c.

PRISMA. vide. Parallelepipedum, &c.

PROPORTIO Figurarũ, Angulorum, & Linearum. vide. Figuræ, Anguli, & lineæ proportionales.

PROPORTIO magnitudinum in communi. vide. Magnitudines proportionales in communi.

PROPORTIONALES Magnitudines in communi. vide. Magnitudines proportionales in communi.

PROPORTIONALES numeri in communi. vide. Numeri Proportionales in communi.

PROPORTIO numerorum in communi. vide. Numeri proportionales in communi.

PYRAMIS. vide. Parallelepipedum. &c.

QVADRATVM. vide. Parallelogrammum, &c.

QVADRATVS numerus. vide. Numerus Planus, Solidus, &c.

QVADRILATERAE figuræ planæ. vide. Parallelogrammum.

RATIONALES, & Irrationales magnitudines.

Duas Rationales longitudine & inter se, & expositæ Rationali com

m en-

mensurabiles inuenire, quarum vna Rationali expositæ sit aqualis, 342. B

Duas Rationales lōgitudine & inter se, & expositæ Rationali commensurabiles inuenire, quarum neutra Rationali expositæ æqualis sit. 342. B

Duas Rationales longitudine quidem inter se, potentia vero tantū expositæ Rationali commensurabiles inuenire. 343. B

Rationales quotcūque longitudine inter se commensurabiles inuenire. 343. B

Duas Rationales potentia tantum inter se commensurabiles inuenire, quarum altera expositæ Rationali sit æqualis. 348. B

Duas Rationales potentia tantum inter se commensurabiles inuenire, quarū neutra sit expositæ Rationali æqualis. 348. B

Rationales quotcunque potētia tantum inter se commensurabiles reperire. 349. B

Datis quotcunque Rationalibus potentia solum commēsurabilibus, inuenire aliam Rationalem illis omnibus potentia tantum commensurabilem. 350. B

Duas Medias rectas longitudine commensurabiles: Ité duas potentia tantum commensurabiles inuenire. 357. B

Medias inuenire potentia tantū commensurabiles, quę Rationale comprehendant. pagina 364. B

Medias inuenire potentia tantū commensurabiles, quę Medū contineant. 365. B

Duas Rationales inuenire potentia tantum commensurabiles, ita vt maior, quā minor, plus possit quadrato rectæ longitudine sibi commensurabilis. pag. 373. B

Duas Rationales inuenire potentia tantum commensurabiles, ita vt maior, quā minor plus possit quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. pag. 374. B

Duas Medias inuenire potentia tantum commēsurabiles, quę Rationale contineant, ita vt maior plus possit, quā minor, quadrato rectæ sibi longitudine cōmensurabilis, vel incommensurabilis. 376. B

Duas Medias inuenire potentia solum commensurabiles, quæ Medium cōtineant, ita vt maior plus possit, quam minor, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. 378. B

Duas rectas inuenire potētia incommensurabiles, quæ faciāt compositum quidem ex ipsarum quadratis, Rationale, rectangulum vero sub ipsis contentum, Medium. pagina 382. B

Duas rectas inuenire potētia incommensurabiles, quæ faciāt compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; Rectangulum vero sub ipsis contentum, Rationale. 384. B

Duas rectas inuenire potētia incommensurabiles, quæ faciāt & compositum ex ipsarū quadratis Mediū, & rectangulum sub ipsis contentum, Medium, incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis. pag. 386. B

Duas Medias inuenire longitudine, & potentia incommensurabiles. 387. B

Sex genera linearum Irrationalium, quæ ex binis nominibus dicuntur, inuenire. 409. B

Sex genera linearum Irrationalium, quæ Apotomæ dicuntur, inuenire. 469. B

RECTA LINEA.

Rectæ datæ lineæ æqualem rectam lineam ad datum punctū ponere. 80. A

Rectam lineam æqualē datæ minori ex maiore detrahere. pag. 81. A

Rectam lineam datam finitā bifariam secare. 101. A

Rectam perpendicularem ad rectam lineam ex puncto in ea dato educere. 102. A

Rectam perpendicularem ad rectā in puncto extremo erigere. pag. 104. & 106. A

Rectam perpendicularem ad rectam ducere ex puncto extra eam dato. 105. & 106. A

Rectam perpendicularem ad rectā ducere ex puncto extra eam dato, quando punctum datum est vicinum datæ rectæ, vel prope extremū plani cuiuspiā, vel quādo recta data prope extremum plani est, vel denique quādo & datum punctum est vicinum extremo plani, & recta data est prope aliud extremum plani. pagina 107. & 168. A

Rectæ datæ parallelam rectam a dato puncto ducere. 164. A

Rectam lineam a puncto extra datam rectam lineā proposito ducere, quæ cū data recta angulum efficiat dato angulo rectilineo æqualem. 165. A

Rectam lineam datæ rectæ parallelam ducere per punctum datæ rectæ vicinum. 167. A

Inter duas rectas infinitas angulū facientes lineā rectam datæ lineæ æqualem collocare, quæ cum vtralibet earū faciat angulum dato angulo æqualem, dummodo datus angulus, & angulus cō prehēsus datis rectis minores sint duobus rectis. 184. A

Rectam datam lineam finitam, in quotlibet partes æquales secare. pag. 210. & 770. A

Rectis duabus inæqualibus datis, inuenire id, quo plus potest maior, quam minor. 237. A. & pag. 326. B.

Datis duab. rectis, siue æqualibus, siue inæqualibus, inuenire rectā, quæ

qua illas pōt. 236. A. & 327. B
Rectam lineam datam secare, vt rectangulum sub tota, & altero segmēto æquale sit quadrato reliqui segmenti. 286. A
Datis duabus rectis, alterutri earū rectam adiungere, vt rectangulum sub tota composita, & adiuncta, æquale sit quadrato alterius. 446. A
Rectam lineam cuilibet arcui circuli, ex cuius quadrāte Quadratrix linea describitur, æqualem inuenire. 905. A
Duabus datis rectis inæqualibus quartam partem quadrati ex minore descripti ad maiorem applicare, ita vt deficiat figura quadrata. 332. B
Datam rectam lineam ita secare, vt rectangulū sub segmentis contentū æquale sit dato rectilineo, quod tamen maius non sit, quam quadratum a dimidia linea descriptum. 334. B
A dato pūcto in sublimi ad subiectum planum perpendicularem rectam ducere. 560. B
Dato plano, a puncto, quod in illo datum est, perpendicularē rectam excitare. 561. B
Per rectam in plano quouis datam planum ducere, quod ad ipsum planum sit rectum. 571. B

RECTANGVLVM parallelogrammum. vide. Parallelogrammum, &c.

RECTANGVLVM triangulum. vide. Triangulum.

REGVLARIS figura. vide. Figura intra & extra circulum, sphæram, &c.

SCALENVM triangulum. vide. Triangulum.

SEGMENTVM circuli. vide. Circulus.

SIMILES plani ac solidi numeri. vide. Numerus planus, &c.

SOLIDA Figura intra, & extra sphæram, atq; aliam figuram. vide. Figura intra, & extra circulum, &c.

SOLIDI numeri similes. vide. Numerus planus, &c.

SOLIDVM Regulare. vide. Figura intra, & extra circulum, &c.

SOLIDVS angulus. vide. Angulus.

SOLIDVS numerus. vide. numerus planus, &c.

SPHAERA. vide. Figura intrā & extra circulum, sphæram, &c.

TRA-

TRAPEZIVM. vide. Parallelogrammum, &c.

TRIANGVLVM.

Triangulum æquilaterum super data recta linea terminata cōstituere. 75. A
Isosceles super data recta constituere. 77. A
Scalenum super data recta constituere. 78. A
Triangulum ex tribus rectis lineis, quæ sunt tribus datis rectis lineis æquales, quarum quælibet duæ reliqua sint maiores, constituere. 129. A
Triangulum alteri dato triangulo æquilaterum, & æquiangulum constituere. 130. A
In scaleno, & Isoscele, cuius basis minor nō sit vtrouis latere, duas rectas intra triangulum ducere, quarū vtraque simul vtrique lateri simul sit æqualis. 185. A
In æquilatero, vel Isoscele, cuius basis vtrouis latere minor sit, quælibet duæ linea intra triangulum ductæ sunt simul minores duobus lateribus simul. 187. A
In Scaleno, & Isoscele, cuius basis minor non sit vtrouis latere, duas rectas intra triangulum ducere, quarum vtraque vtrique lateri sit, æqualis, vel maior. pag. 188. A
Triāgulum bifariam secare per lineam a quouis puncto in vno latere dato ductam. 199. A
Triangulo dato æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo. 218. A
Triangulum dato parallelogrammo æquale constituere in dato angulo rectilineo. 218. A
Triangulo dato parallelogrammum æquale cōstituere super datam rectam, & in dato angulo rectilineo. 221. A
Triangulum dato parallelogrammo constituere æquale super datam rectam, & in dato angulo rectilineo. 223. A
Trianguli rectanguli cognitis duobus lateribus, in cognitionem reliqui lateris peruenire. 239. A
Amblygonium triangulum cōstituere, in quo propos. 12. lib. 2. numeris possit accommodari. 293. A
Oxygonium triangulum construere, in quo prop. 13. lib. 2. numeris possit accommodari. 303. A
Trianguli cuiusuis aream cognoscere. 312. A
Isosceles construere, quod habeat vtrumque angulorum ad basim reliqui duplum. 468. A
Isosceles oxygonium construere, cuius tertium latus vtrouis æqualium sit maius. 479. A
In dato triangulo quocunque quadratum describere. 884. A

FINIS.

INDEX THEOREMATVM, QVAE HISCE COMMENT. CONTINENTVR:

QVORVM EA, QVAE AB EVCLIDE demonstrantur, eodem charactere sunt notata, quo in propositionum demonstrationibus vsi sumus: quæ vero a nobis adiecta, charactere, quo scholia excusimus. Litera porro A, primum tomum, & litera B, secundum significat. Vt autem facilius quisque inueniat theoremata, quæ cupit, digessimus ea secundum materias, de quibus demonstrantur.

ACVTANGVLVM triangulum. vide. Triangulum.

AEQVIANGVLA, & æquilatera figura. vide. Figura intra & extra circulum, &c.

AEQVILATERA, & æquiangula figura. vide. Figura intra & extra circulum, &c.

AEQVILATERVM triangulum. vide. Triangulum.

ANGVLI proportionales. vide. Figuræ, anguli, & lineæ proportionales.

ANGVLVS.

Anguli recti omnes sunt inter se æquales. 66.A

Anguli oppositi ad verticē duarum rectarum se intersecantium sunt æquales. 111.A

Anguli quatuor a duabus rectis se intersecantibus facti, sunt quatuor rectis æquales. 112.A

Anguli quotcunq; circa idem punctum quatuor rectis sunt æquales. 112.A

Angulus externus trianguli maior est vtrouis interno opposito. 114.A

Angulus externus figuræ quadrilateræ maior esse potest quouis interno opposito. 115.A

Anguli duo trianguli quomodocunque sumpti duobus rectis sunt minores. 117.A

Anguli duo trianguli orthogonij, & amblygonij sunt acuti. 118.A

Anguli omnes trianguli æquilateri, & duo Isoscelis supra basem, acuti sunt. 119.A

Anguli tres cuiuscunque trianguli æquales sunt duobus rectis: Et externus æqualis est duobus internis oppositis simul. 169.A

Anguli omnes interni cuiuscunque figuræ rectilineæ quot rectis angulis æquentur. 171. & 172.A

Anguli omnes externi cuiuscunq; figuræ rectilineæ, productis singulis lateribus ordinatim versus eandem partem, quatuor rectis sunt æquales. 173.A

Anguli quinque, q̄ fiunt ex cōcursu binorū laterū pētagoni p̄ductorū æquales sūt duobus rectis. 174.A

Angulus cōtactus vere angulus est, contra Peletarium, vbi eius sophismata dissoluuntur. 354. *vsque ad* 387.A

Angulo quouis contactus dari potest alius minor, & hoc alius minor vsq; in infinitū: Item maior, & hoc alius maior i infinitū. 361.A

Anguli contatus, quo modo inter se sint æquales, & qui æquales sint. pag. 363.A

Anguli cōtactus, quotquot sint, efficiunt aggregatū omni rectilineo acuto angulo minus. 365.A

Anguli contactus Apologia aduersus Peletariū. 366. *vsq; ad* 387.A

Angulus quispiam potest in infinitum augeri, & alius in infinitū minui; & tamē augmētū illius, quantūcunq; sit, minus semper erit decremento huius. 387.A

A minori angulo trāsitur ad maiorē, et per oēs intermedios, nūquā tamē p̄ æqualē. 387. & 430.A

Anguli oppositi in quadrilatero intra circulū descripto æquales sūt duobus rectis. 401.A

Angulus externus quadrilateri in circulo, æqualis est ei, qui opponitur angulo ei deinceps. 407.A

Angulus rectus in cētro insistit quadrāti; acutus uero arcui quadrāte minori; & obtusus maiori. Et cōtra, angulus in cētro quadrāti insistēs, rectus est; insistēs uero arcui quadrāte minori, acutus; & maiori, obtusus. 417.A

Angulus curuilineus angulo rectilineo æqualis esse potest. 634.A

Si duæ rectæ se mutuo tāgētes, ad duas rectas se mutuo tāgētes sint parallelę, non autē in eodē plano; illę angulos æquales cōprehendent. 558.B

Idem eueniet, si omnes illæ rectæ sint in vno plano. 558.B

Si solidus angulus tribus angulis planis contineatur, Ex his duo quilibet vtut assūpti tertio sunt maiores. 573.B

Omnis solidus angulus sub minoribus, quam quatuor rectis angulis planis cōtinetur. 574.B

Si fuerint tres anguli plani, quorū duo vtlibet assumpti reliquo sint maiores, cōphendāt aūt ipsos rectę lineę æquales; fieri potest, vt ex lineis æquales illas rectas cōnectentibus triangulū cōstituatur. 576.B

Si fuerint duo plani anguli æquales, quorum verticibus sublimes rectæ lineæ insistant, quæ cum lineis primo positis angulos contineant æquales, vtrumq. vtrique; in sublimibus aūt lineis quælibet sumpta fuerint puncta, & ab his

ad plana, in quibus consistunt anguli primum positi, ductæ fuerint perpẽdiculares; a punctis vero, quæ in planis a perpendicularibus fiunt, ad angulos primum positos adiunctæ fuerint rectæ lineæ: Hæ cum sublimibus æquales angulos comprehendent. 609.B

Si fuerint duo anguli plani æquales, quorum verticibus sublimes rectæ æquales cum lineis primum positis angulos continentes æquales, vtrumque vtrique: Erunt a punctis extremis linearum sublimiũ ad plana angulorum primum positorum demissę perpendiculares, inter se æquales. 611.B

ARCVS. vide. Circulus.

CIRCVLVS.

Circulus a diametro bifariam diuiditur. 45.A

Circulus a recta, quæ diameter non sit, diuiditur non bifariã. 46.A

Si in circulo recta aliqua linea rectam quampiam bifariam secet, & ad angulos rectos: in secante centrum erit circuli, pag. 328.A

Si in circuli peripheria duo puncta coniungantur linea recta; cadet hæc recta intra circulum. 328.A

Recta circulum in vno tantum puncto tangit, si ita tangat, vt eum non secet. 329.A

Si in circulo recta linea per centrum ducta secet aliã non per centrum ductam bifariam; & ad angulos rectos ipsam secabit. Et si ad angulos rectos eã secet; bifariam quoque eam secabit. 330.

Duobus circulis ex eodẽ centro descriptis, si ab aliquo puncto circumferentiæ exterioris recta ducatur interiorem circumferentiã secans: erunt eius segmenta inter vtramq. circumferẽtiam æqualia. 331.A

In circulo duæ rectæ non per centrum extensę, se mutuo bifariam non secant. 332.A

Duo circuli se mutuo secantes non habent idem centrum, pag. 333.A

Duo circuli se mutuo interius tangentes non habent idem centrum. 333.A

Si in diametro circuli a puncto, quod centrum non sit, plurimæ rectæ cadãt: maxima omnium erit, in qua centrum, minima vero reliqua: aliarum autẽ propinquior ei, quæ per centrum, remotiore semper maior est: Duæ autem solum rectæ æquales ab eodem puncto in circulum cadunt ad vtrasque partes minimæ vel maximæ. 334.A

Si intra circulum punctum sumatur, ab eoque in circulum rectarum cadentium vna quidem sit maxima, vna vero minima, & reliquarum aliæ sint inæquales, aliæ æquales: Maxima quidem per centrum transibit, minima vero erit reliqua pars diametri; & aliarum maiores quidẽ erunt maximæ propinquiores, æquales autem a minima vel maxima æqualiter distabunt. 336.A

Si extra circulum sumatur punctum quodpiam, ab eoq; puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum vna quidem per centrum protendatur, reliquæ vero vt libet: In cauam peripheriã cadentiũ rectarum, maxima quidem est illa, quæ per centrum ducitur; aliarum autẽ propinquior ei, quæ per centrũ transit, remotiore semper maior est, &c. 338.A

Ex puncto extra circulum sumpto, in peripheriam concauam duæ tantum lineæ rectæ æquales cadunt ad vtrasque partes maximæ lineæ. 340.A

Si ex puncto extra circulum ducatur recta tangens circulum, erit ea minor omnibus ex eodem puncto in concauam peripheriam cadentibus, maior vero omnibus in conuexam peripheriã cadentibus. 340.A

Punctũ in circulo, a quo plures quam duæ rectæ æquales ad peripheriam ducuntur, centrum circuli est. 341.A

Circulus circulum in pluribus punctis, quam duobus, non secat. 342.A

Recta per centra duorum circulorum se interius tãgentium ducta, cadit in circulorũ contactum. 343.A

Recta per centra duorum circulorum se exterius tangentiũ ducta, transit per circulorum contactum. 344.A

Circulus circulum non tangit in pluribus pũctis, quam vno. pag. 345.A

Si in semidiametro circuli producta punctum vltra centrum sumatur, circulus ex eo puncto, vt centro, per extremum semidiametri punctum descriptus, tanget priorem circulum in eo puncto extremo, totusq. extra eundem cadet. 347.A

In circulo æquales rectæ æqualiter a centro distant. Et quæ æqualiter a centro distant, sunt æquales. 348.A

In circulo maxima quidem linea est diameter; aliarum autem propinquior centro, remotiore semper maior. 349.A

Ex puncto circumferentiæ in concauam peripheriam duæ tãtum rectæ æquales cadunt ad vtrasq. partes diametri. 351.A

Quæ ab extremitate diametri cuiusque circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipsum circulum cadet; & in locũ inter ipsam rectam, & peripheriã comprehensum, altera re-

cta non cadet: Et semicirculi quidem angulus quouis acuto rectilineo angulo maior est, reliquus autem minor. 351.A
Recta ad extremũ diametri ppẽdicularis circulũ tãgit. 353.A
Si circulũ recta tangat; recta ad cõtactũ ducta, perpẽdicularis est ad tãgentẽ lineam. 394.A
Circulis duobus ex eodẽ centro descriptis; rectæ interiorẽ tãgentes, & vsq; ad exteriorẽ extẽsę, inter se æquales sunt, bifariãq; in punctis cõtactuum secantur. 395.A
Si circulũ tetigerit recta; ppẽdicularis ad tãgentem in puncto cõtactus, p cẽtrũ trãsit. 395.A
In circulo, angulus ad centrum duplus est anguli ad peripheriam, si fuerit eadem peripheria basis angulorum. 396.A
In circulo spatium ad cẽtrũ, duplũ est anguli ad peripheriã, cũ fuerit eadem peripheria basis spatij, & anguli. 399.A
In circulo, qui in eodẽ segmento sunt, anguli sunt inter se æquales. 399.A
Si a duobus punctis quatuor rectæ ducantur, ex singulis binæ, quæ in concursu contineãt duos angulos æquales: circulus per duo illa puncta, & alterutrum illorum angulorũ descriptus, per alterũ quoq; angulum trãsibit. 401.A
In circulo quadrilaterũ quodcũque habet angulos oppositos duobus rectis æquales. 401.A
Si in quadrilatero anguli oppositi sint duobus rectis æquales; circulus circa ipsũ describi põt. 402.A
Si ex semicirculis, aut circulis similia segmẽta detrahãtur; reliqua segmẽta similia etiã sũt. 403.A
Arcus, quibus anguli æquales, siue ad centra, siue ad peripherias insistunt, similes sunt: Et anguli arcubus similibus insistentes siue ad centra, siue ad peripherias, æquales sunt. 404.A
Si duo aut plures circuli idem habeant centrum: Rectæ ex centro ductæ abscindunt arcus similes. pag. 405.& 862.A
Si duo aut plures circuli se mutuo tangant interius; Rectæ a puncto contactus ductæ abscindunt arcus similes. 406.A
Si vnum latus quadrilateri in circulo producatur; angulus externus æqualis est angulo, qui opponitur angulo ei deinceps. 407.A
Segmenta similia, & inæqualia non constituentur super eadem recta linea. 407.A
Segmẽta similia super æqualibus rectis, sunt æqualia. 408.A
Segmenta similia, & æqualia, sunt constituta super æquales rectas, vel super eandem rectã. 409.A
In circulis æqualibus, vel eodẽ anguli æqualibus peripherijs insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias. 413.A
In circulis æqualibus, uel eodẽ maior angulus, maiori peripheriæ insistet. 414.A
In circulis æqualibus, vel eodẽ anguli æqualibus peripherijs insistẽtes, sũt æquales. 415.A
In circulis æqualibus, vel eodem angulus maiori peripheriæ insistẽs maior est. 415.A
In circulo, duæ rectæ se nõ intersecãtes, et intercipientes arcus æquales, parallelæ sũt: Et parallelæ intercipiũt arcus æquales. 416.A
Recta, quæ ex medio pũcto arcus alicui⁹ ducit tãgẽs circulũ, parallela est chordę illius arcus. 416.A
Angulus rectus in cẽtro insistit quadrãti; acutus vero, arcui minori quadrante; & obtusus, maiori. Et contra, angulus in centro insistens quadrãti, rectus est; insistẽs vero arcui quadrante minori, acutus; et maiori obtusus. 417.A
Recta e centro secans rectam aliã bifariam, secat quoq; arcum bifariam. Et secans arcum bifariam, secat quoque chordã bifariam. 418.A & 712.763.B
In circulis æqualibus, vel eodem rectæ æquales, auferunt arcus æquales. 419.A
In circulis æqualib. vel eodẽ, maior linea maiorẽ arcũ aufert, si de arcubus semicirculo minoribus sermo fiat: minorẽ vero, si de segmẽtis maioribus agatur. 420.A
In circulis æqualibus, vel eodẽ, si arcus sint æquales, erunt & rectæ æquales. 420.A
In circulis æqualibus, vel eodẽ maior arcus habet chordã maiorẽ, si de arcubus semicirculo minoribus loquamur: minorem vero, si de maioribus. 421.A
Circuli, e qb. æquales rectæ auferũt similes arcus, æquales sũt. 422.A
Ex circulis inæqualibus rectæ æquales auferũt arcus dissimiles. 422.A
Ex circulis inæqualibus lineæ rectę auferentes arcus similes, inæquales sunt. 422.A
Rectæ lineæ auferẽtes arcus similes inæquales ex quibusuis circulis, inæquales sunt. 423.A
Si in diametro circuli prater cẽtrũ sumaꝰ pũctũ, ab eoq; in peripheriã duæ rectæ nõ in easdẽ partes cadẽtes efficiãt ad diametrũ angulos æquales; rectæ illæ æquales erũt, et arcus abscindẽt æquales. Et si lineæ sint æquales, cõstituẽt ad diametrũ angulos æquales, abscindẽtq; arcus æquales. Si deniq; abscindãt arcus æquales, erũt rectę illæ æquales, angulosq; ad diametrũ æquales cõstituẽt. 423.A
Si in diametro circuli prater cẽtrũ sumatur pũctũ, a quo ad easdẽ partes duo anguli æquales constituantur, insistent hi anguli arcubus inæqualibus, maiorque erit ille, qui a minori portione diametri remotior est. 425.A
In semicirculo angul⁹ rectus est: In maiore segmẽto acutus: Et in minore obtusus. Angulus item maioris segmenti recto maior: minoris vero segmenti recto minor. 426.A
Segmẽtũ circuli, in quo angulus rectus ẽ, est semicirculus, in quo vero acutus, segmẽtũ maius est: & ẽ quo obtusus, segmẽtũ minus. Et segmẽtũ, cuius angulus est recto maior, ẽ maius; cuius vero angulus ẽ recto minor, ẽ minus. 431.A

Circulus ex puncto medio lateris recto angulo oppositi in triangulo rectangulo descriptus per vnũ angulũ,trãsit quoq; p reliquos.431.A
Si per centrum circuli alius circulus describatur, & per vtriusq. centrum recta ejiciatur: a puncto vero,ubi hæc recta posteriorẽ circulũ secat, ducatur recta vtcunq;,secabitur eius portio intra priorẽ circulum bifariã.432.A
Si circulum tangat recta,& a cõtactu ducatur linea vtcunque secans: anguli ad contingentem æquales sunt angulis in alternis segmentis. 434.A
Si recta ducta ad extremitatem rectæ circulum secantis faciat cũ ea angulos æquales angulis in alternis segmentis;recta illa ducta circulum tangit. 435.A
Si in circulo duæ rectæ se secẽt: rectãgulũ sub segmẽtis vnius æquale est rectangulo sub segmentis alterius. 438.A
Si duæ rectæ ita se secent, vt rectangulum sub segmentis unius æquale sit rectãgulo sub segmentis alterius: describi poterit per quatuor earum puncta extrema circulus. 439.A
Si extra circulum sumatur punctum,a quo ducatur recta tangens,& altera secãs:erit quadratũ tangẽtis æquale rectãgulo sub tota secante, & eius segmento exteriore. 440.A
Si a puncto extra circulũ ducãtur plures rectæ secantes;rectangula sub totis secantibus, & segmẽtis exterioribus æqualia sũt.442.A
Duæ rectæ tãgẽtes circulũ ab eodẽ pũcto ductæ,sũt æquales.442.A
Ab eodẽ puncto duæ tantũ rectę circulũ tangẽtes duci possũt.443.A
Si duæ rectæ æquales ducantur ab eodem puncto ad circulum, vna autem earum sit tangens, erit & altera tangens. 443.A
Si a puncto duæ rectæ egrediẽtes ita secentur in binas partes singulæ, vt rectãgula sub totis,& segmẽtis prope punctũ,æqualia sint:describi poterit circulus per extrema reliquorũ segmẽterũ.445.A
Si extra circulum pũctum sumatur,a quo ducatur recta secãs, & altera incidẽs, vsq; ad circumferentiã conuexã; sit aũt quadratum incidẽtis æquale rectãgulo sub tota secante, & eius segmẽto exteriore: Incidẽs circulum tanget. 447.A
Si a puncto duæ tangentes ad circulum ducantur,aut duæ secantes æquales:Recta ab eodem puncto per centrũ ducta diuidit angulũ ab eis cõprehensum,bifariam. Et contra,Recta secãs angulum bifariam,per centrum circuli transit. 448.A
Æquales rectæ ex circulis inæqualibus auferũt arcus inæquales,maiorque est arcus minoris circuli, quam vt similis sit arcui circuli maioris. 863.A
Æquales rectæ ex circulis inæqualibus auferunt arcus simpliciter inæquales

inæquales, maiorq; est arcus circuli minoris simpliciter, & non solum maior,quam vt similis sit arcui circuli maioris. 864.A
Si in circulo,ductis duabus diametris sese ad angulos rectos secãtibus,altera earũ producatur,eiq; ex vna parte quotquot parallelæ agantur diuidentes vtrumque quadrantem in partes æquales, ac denique ex puncto extremo alterius diametri per extremũ punctum proximæ parallelæ recta ducatur cõueniens cũ diametro producta: Erit tota recta inter punctũ concursus,& cõcauã peripheriã circuli,oibus parallelis,vna cum diametro,quæ producta est, simul sumptis,æqualis. 865.A
Si ad diametrum circuli in extremis punctis duæ perpendiculares excitentur, & ab eisdem extremis per vnum idemq; punctum duæ aliæ rectæ circulum secantes ducantur, occurrentes duabus perpẽdicularibus; erit rectãgulũ sub vtralibet secãtiũ, & eius segmẽto interiore cõprehensum quadrato diametri æquale.887.A
Si in circulo duæ diametri sese ad rectos angulos secẽt, & ab vnius extremo recta ducatur vtcunque secans circumferentiam, & alteram diametrũ siue productam, siue intra circulum; erit rectangulum sub duobus segmentis huius lineæ ductæ, quorum vnum inter extremũ prioris diametri, & secundam diametrum, alterum vero inter idem punctũ extremum, & circumferẽtiam interiicitur,æquale quadrato intra circulum descripto. 888.A
Circumferentia circuli ad eius diametrum quã proportionem plus minus,habeat. 907.A

CIRCVMFERENTIA. vide. Circulus.

COMMENSVRABILES & incommensurabiles magnitudines.

Duabus magnitudinibus inæqualibus ꝓpositis, si a maiore auferatur maius quã dimidium; & ab eo quod reliquũ est,rursus detrahatur maius quam dimidiũ:& hoc semper fiat:relinquetur tandẽ quędã magnitudo, quæ minor erit proposita minore magnitudine. 289.B
Idem eueniet,si dimidium auferatur,&c. 290.B
Si duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione, & reliqua minime præcedẽtẽ metiatur: incommensurabiles erũt ipsę magnitudines. 291.B
Si duabus magnitudinibus incõmẽsurabilibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadã detractione: nunquã reit qua præcedentẽ metietur. 293.B
Si duabus magnitudinibus commensurabilibus propositis, detrahatur semper

semper minor de maiore, alterna quadã detractione: nunquã reliqua præcedentẽ metietur. 293. B

Si duabus magnitudinibus commẽ mensurabilibus propositis, detrahatur sæpe minor de maiore, alterna quadã detractione metietur quadã reliqua præcedẽtẽ. 293. B

Magnitudo metiens duas magnitudines, metitur & maximam earũ mẽsurã communẽ. 295. B

Magnitudo metiẽs tres aut quotcũque magnitudines, metitur quoque maximam earum mensuram communem. 298. B

Si sint quotcunque magnitudines, & totidẽ numeri, qui bini in eadem ratione sumãtur, in qua binæ magnitudines: et ex æqualitate in eadem ratione erunt magnitudines & numeri. 298. B

Commẽsurabiles magnitudines inter se rationem habent, quã numerus ad numerum. 300. B

Commẽsurabiles magnitudines proportionem habent eãdem, quam numeri, per quos earum mensura communis maxima ipsas metitur. 301. B

Si duæ magnitudines inter se proportionem habeant, quam numerus ad numerum, commensurabiles erunt magnitudines. 302. B

Incommensurabiles magnitudines inter se proportionem nõ habent, quam numerus ad numerum. 304. B

Si duæ magnitudines inter se proportionem non habeant, quam numerus ad numerum: incommensurabiles erunt magnitudines. 305. B

Si sint tres quãtitates continue proportionales, & aliæ tres continue quoq; proportionales, sitq; vt prima illarum ad tertiã, ita prima harũ ad tertiã; erit & vt prima illarum ad secundam, ita prima harum ad secundam. 306. B

Idem sequitur si plures quantitates sint, quam tres, &c. 306. B

Quæ a rectis lineis longitudine commensurabilibus fiũt quadrata, inter se proportionem habent, quã quadratus numerus ad quadratũ numerũ: Et quadrata inter se proportionẽ habẽtia, quã quadratus numerus ad quadratũ numerũ; & latera habebũt lõgitudine cõmensurabilia. Quæ vero a rectis lineis longitudine incõmensurabilibus fiũt quadrata; inter se proportionẽ non habent, quã quadratus numerus ad quadratũ numerũ: Et quadrata inter se proportionem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratũ numerũ; neq; latera habebũt lõgitudine cõmẽsurabilia. 307. B

Rectæ longitudine commẽsurabiles, omnino & potẽtia sunt cõmensurabiles; quæ vero potentia cõmensurabiles sunt, non omnino & lõgitudine cõmẽsurabiles sunt. Et q̃ lõgitudi

dine sunt incõmensurabiles, nõ oĩno & potentia incõmensurabiles sunt, quæ vero potẽtia incõmensurabiles sunt, omnino & lõgitudine incommensurabiles sunt. 310. B

Si quatuor magnitudines sint ꝓportionales, prima vero secũdæ sit cõmẽsurabilis; & tertia quartæ cõmensurabilis erit. Et si prima secundæ sit incommensurabilis, & tertia quartæ incommẽsurabilis erit. 315. B

Recta media proportionalis inter duas rectas potẽtia tantũ cõmensurabiles, vtrilibet illarũ incõmensurabilis est lõgitudine et potẽtia ac proinde appellabitur Irrationalis, si alterutra illarũ statuatur Rationalis. 321. B

Quæ eidẽ magnitudini sunt cõmensurabiles, & inter se sunt commensurabiles. 321. B

Si sint duæ magnitudines commensurabiles, altera verò sit vni cuiꝓiã commẽsurabilis; erit & reliqua eidẽ cõmensurabilis. 323. B

Si sint duæ magnitudines, & altera quidẽ eidẽ sit cõmensurabilis, altera vero incõmensurabilis; incommensurabiles erũt magnitudines. 324. B

Si sint duæ magnitudines cõmensurabiles, altera autem ipsarũ magnitudini cuꝓiã incõmensurabilis fuerit; Et reliqua eidẽ incõmẽsurabilis erit. 325. B

Quæ incommensurabilibus sunt cõmensurabiles; & inter se incommensurabiles erunt. 326. B

Si quatuor rectæ ꝓportionales fuerint, prima vero tãto plus possit, q̃ sẽda, quantũ est quadratũ rectæ sibi cõmensurabilis lõgitudine; Et tertia tanto plus poterit q̃ quarta, quantũ est quadratũ rectæ sibi lõgitudine cõmẽsurabilis. Qd' si prima tãto plus possit q̃ sẽda q̃tũ est quadratũ rectę sibi incõmẽsurabilis lõgitudine; Et tertia tãto plus poterit q̃ quarta q̃tũ est quadratũ rectę sibi lõgitudine incõmẽsurab. 328. B

Si duæ magnitudines cõmensurabiles cõponantur; & tota magnitudo vtriq; ipsarũ cõmensurabilis erit. Quod si tota magnitudo vni ipsarũ cõmẽsurabilis fuerit, & quæ a principio magnitudines commensurabiles erunt. 329. B

Si tota magnitudo ex duabus cõposita, cõmensurabilis sit alteri ipsarum; eadem & reliquæ commensurabilis est. 330. B

Si duæ magnitudines incõmẽsurabiles cõponant; & tota magnitudo vtriq; ipsarũ incõmẽsurabilis erit. Quod si tota magnitudo vni ipsarũ incõmensurabilis fuerit, & quæ a principio magnitudines incommensurabiles erunt. 330. B

Si tota magnitudo ex duabus cõposita incõmensurabilis sit alteri ipsarũ; eadem & reliquæ incommensurabilis est. 331. B

Si sint duæ rectę inæquales, quartæ aũt ꝑtẽ quadrati; qd sit a mino-

minore, æquale parallelogrãmũ ad maiorẽ applicetur, deficiẽs figura quadrata, & in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidat; Maior tãto plus poterit quam minor, quantum est quadratum rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si maior tãto plus possit quam minor, quantum est quadratum rectæ sibi longitudine commensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit a minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata; In partes longitudine commensurabiles ipsam diuidet. 336.B

Si sint duæ rectæ inæquales, quartæ autẽ parti quadrati, quod fit a minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata, & in partes incommensurabiles longitudine ipsam diuidat; Maior tanto plus poterit quam minor, quantum est quadratum rectę sibi longitudine incommensurabilis. Quod si maior tanto plus possit, quantum est quadratum rectæ sibi longitudine incommensurabilis, quartę autẽ parti quadrati quod fit a minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiẽs figura quadrata; In partes longitudine incommensurabiles ipsam diuidet. 338.B

Diameter quadrati longitudine incommensurabilis est lateri. pag. 656.A. & 130.B. & 516.B

Inuentis rectis lineis lõgitudine incommensurabilibus, inuenientur & aliæ quam plurimæ magnitudines, planæ scilicet, atque solidæ incommensurabiles inter se. pag. 519.B

COMPOSITI inter se numeri. vide. Numerus par, &c.

COMPOSITVS numerus. vide. Numerus par, &c.

CONVS, & Cylindrus. vide. Parallelepipedum, &c.

CORPVS Regulare. vide. Figura intra & extra circulum, &c.

CVBVS numerus. vide. Numerus planus, &c.

CYLINDRVS, & Conus. vide. Parallelepipedum, &c.

DIAMETER circuli. vide. Circulus.

FIGVRA intra, & extra circulum, sphæram, atque aliam figuram.

Quadrilaterũ in circulo habet oppositos angulos duobus rectis æquales. 401.A

Si in

Si in quadrilatero anguli oppositi sint duobus rectis æquales; circulus circa ipsum describi potest. pag. 402.A

Quadrilateri in circulo angulus externus æqualis est ei, qui opponitur ei deinceps. 407.A

Quadrilaterũ in circulo, cuius duo latera opposita sunt parallela, & æqualia, parallelogrammum est rectangulum. 433.A

In omni triangulo, cui circulus inscribitur, duo quauis latera superant reliquum recta linea, cuius quadratum quadruplum est rectanguli comprehensi sub recta ab angulo illis lateribus comprehenso in cauam peripherium ducta, & sub segmento eius exteriore. Quod si angulus cõprehensus sit rectus, superabunt duo illa latera latus recto angulo oppositũ diametro circuli triangulo inscripti. Vel duo quauis latera superant reliquum duabus rectis tangentibus inter angulum illorum laterum, & circulum interpositis. 462.A

Si centrum circuli triangulo circũscripti cadit intra triangulum, omnes eius anguli acuti sunt: Si in vnum latus, angulus oppositus rectus est: Si denique extra vnũ latus, angulus oppositus obtusus est. 464.A

In triangulo acutangulo centrum circuli circumscripti cadit intra: In rectangulo, in latus recto angulo oppositum: In obtusangulo denique extra latus angulo obtuso oppositum. 464.A

Quadratũ circulo circumscriptum duplum est quadrati eidem circulo inscripti. 468.A

Pentagoni circulo inscripti, hoc est, æquilateri, & æquianguli, angulus quilibet continet tres quintas duorum rectorum, vel sex quintas vnius recti. 471.A

Si in circulo figura quauis æquilatera & æquiangula describatur, & ad extrema semidiametrorum excitentur perpendiculares, constituent hę perpendiculares similem figuram circulo circumscriptam. 474.A

Hexagoni circulo inscripti latus, æquale est semidiametro circuli. 479.A

Si in circulo ab eodem puncto inscribantur latera duarũ figurarum regularium; continebit arcus inter illa inclusus tot latera alterius figura inscribenda in eodem circulo, quot vnitatibus inter se differunt denominatores eorundem laterum: Figura autem inscribenda continebit tot latera, quot vnitates sunt in numero ex multiplicatione denominatorum producto. 482.A

Omnis figura æquilatera circulo inscripta, est quoque æquiangula: at non omnis figura æquilatera circulo circũscripta, æquiangula quoque est, nisi quando numerus angulorum ipsius est impar, &c. 483.A

Omnis

Omnis figura æqui angula circulo circũscripta, est quoq; æquilatera: at non omnis figura æquiãgula circulo inscripta, æquiangula quoque est, nisi quando numerus laterum ... &c. 488. A

Si bifariã sectiones laterũ regularis figuræ rectis coniũgantur, inscripta erit similis figura, idem centrum habens. 497. A

Solum triangulum æquilaterum, quadratum, & Hexagonum æquilaterum atque æquiangulũ, ex omnibus figuris regularibus, locum replent. 499. A

In figura æquilatera, & æquiangula, si quidem angulorum numerus impar est, recta linea ex quouis angulo demissa secans oppositum latus bifariam, diuidit quoque angulum bifariam: Et contra, recta linea diuidens angulũ bifariam, secat quoque latus oppositum bifariam. Si vero numerus angulorum est par, recta linea ex quouis angulo ad oppositum angulũ ducta secat vtrumque angulum bifariam: Et contra, recta linea secans quemuis angulum bifariam, cadit in oppositum angulum, eumque bifariam etiam diuidit. 866. A

Si basis quadratricis intra quadratem & quadratum descripta statuatur semidiameter alicuius circuli; eius latus, siue semidiameter quadrantis æquabitur quadranti illius circuli, &c. pagina 906. A

Quæ in circulis polygona similia, inter se sunt, vt a diametris quadrata. 625. B

Si pentagoni æquilateri tres anguli, siue qui deinceps, siue qui non deinceps sint, æquales fuerint; æquiangulum erit ipsum pentagonum. 704. B

Si pentagoni æquilateri, & æquianguli duos angulos, qui deinceps sint, subtendant lineæ rectæ; hæ extrema & media ratione se mutuo secant, & maiora ipsarum segmenta æqualia sunt pentagoni lateri. pag. 705. B

Recta subtendens vnum angulum pentagoni æquilateri & æquianguli, parallela est opposito lateri. pag. 706. & 841. B

Si hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo descriptorum componantur; tota recta linea extrema atque media ratione secatur, & maius eius segmentum est hexagoni latus. 707. B

Si latus hexagoni secetur extrema ac media ratione; maius illius segmentum est latus decagoni. pag. 708. B

Si lineæ diuisæ extrema ac media ratione maius segmentum fuerit latus hexagoni alicuius circuli, erit minus segmẽtum latus decagoni eiusdem circuli. Quod si minus segmentum fuerit latus decagoni alicuius circuli; erit maius segmentum latus hexagoni eiusdem circuli. 708. B

Si in circulo pentagonum æquilaterum describatur; pentagoni latus potest & latus hexagoni, & latus decagoni, in eodem circulo descriptorum. pag. 710. B

Diameter circuli ex angulo quouis pentagoni, vel alterius figuræ æquilateræ imparium laterum, diuidit & latus oppositum bifariã, & ad angulos rectos, & arcum, quem illud latus subtendit. pag. 712. B

Si in circulo triangulum æquilaterum describatur; Trianguli latus potẽtia triplum est eius lineæ, quæ ex centro circuli ducitur. 717. B

Diameter circuli potentia est sesquitertia lateris trianguli æquilateri in eo circulo descripti. 718. B

Si in circulo triangulum æquilaterum describatur; diameter ex vno angulo ducta diuidit & angulum bifariam, & latus oppositum, ac insuper ad angulos rectos: Semidiameter quoque vicissim bifariam, & ad angulos rectos secabitur a latere opposito. pag. 719. B

Sphæræ diameter potentia est sesquialtera lateris pyramidis in ea descriptæ. pag. 720. & 926. B

Diameter sphæræ potentia est quadrupla sesquialtera semidiametri circuli circa basem pyramidis in ea sphæra existentis descripti. 723. B

Perpendicularis ex cẽtro sphæræ ad basim pyramidis in ea sphæra existentis demissa, sexta pars est diametri sphæræ, & tertia pars semidiametri. 723. B

Altitudo pyramidis intra sphæram continet duas tertias partes diametri. Et diameter potentia est dupla sesquiquarta altitudinis pyramidis. 724. B

Sphæræ diameter potẽtia est dupla lateris octaedri in ea descripti. 725. & 928. B

In octaedro tres diametri se mutuo ad angulos rectos secant. pagina 726. B

Octaedrum diuiditur in duas pyramides similes & æquales; quarum basis communis quadratum lateris octaedri, altitudo vero semidiameter sphæræ vel octaedri pag. 727. & 795. B

Si tetraedrum, & octaedrũ in eadem sphæra describantur, erit tetraedri latus potentia sesquitertium lateris octaedri. pag. 728. & 749. B

Octaedri bases oppositæ sunt inter se parallelæ. 728. & 927. B

Sphæræ diameter potẽtia est tripla lateris cubi in ea descripti. 729. & 930. B

Omnes diametri cubi æquales sunt, seseq; bifariam secant in centro sphæræ. Itẽ rectæ coniungentes cẽtra basiũ oppositarũ se mutuo bifaria secãt in eodẽ cẽtro. 731. B

Potentia diametri sphæræ, seu cubi æqualis est potentiis laterum tetraedri & cubi simul. 732.B

Si diameter sphæræ sit Rationalis linea; latus Icosaedri in ea est Irrationalis linea, quæ vocatur Minor. 733.B

Sphæræ diameter potentia est quintupla semidiametri circuli quinque latera Icosaedri ambientis. pagina 738.B

Diameter sphæræ composita est ex latere hexagoni, & duobus lateribus decagoni eiusdem circuli. pagina 738.B

Icosaedri latera opposita sunt parallelæ. 739. & 931.B

Si diameter circuli sit Rationalis linea; latus Dodecaedri in ea descripti est Irrationalis linea, q̃ vocat Apotome. 739.B

Si latus cubi secetur extrema ac media ratione, maius segmẽtum est latus Dodecaedri eiusdẽ sphæræ. 746.B

Latus cubi æquale est rectæ subtendenti angulum pentagoni Dodecaedri eiusdem sphæræ. 746.B

Si recta secetur extrema ac media rõne, minusq; segmentũ sit latus Dodecaedri; maius segmẽtũ erit latus cubi eiusdẽ sphæræ. 747.B

In Dodecaedro sunt sex latera, quorum bina opposita sunt parallela, bifariamque secantur, & ad angulos rectos à tribus lineis rectis æqualibus sese in centro Dodecaedri bifariã quoque, & ad angulos rectos secantibus. 747 B

Si recta diuidẽs opposita latera Dodecaedri bifariam, & ad angulos rectos, secetur extrema ac media ratione; maius segmẽtum est latus cubi, minus vero, latus Dodecaedri eiusdem sphæræ. 748.B

Plura corpora Regularia, quam quinque, constitui non possunt. pag. 754.B

Cubus & octaedrum: Item Icosaedrum & Dodecaedrum, reciprocantur, quod ad numerũ basium & angulorum attinet. Solum tetraedrum tot bases habet, quot angulos solidos. 757.B

Quæ ex cẽtro circuli cuiuspiam in pentagoni eidem circulo inscripti latus perpendicularis ducitur, dimidia est vtriusque lineæ simul, & lateris hexagoni, & lateris decagoni eidem circulo inscripti. 761.B

Perpendicularis ex centro ad latus pentagoni ducta æqualis est vtriusque rectæ simul, & ei, quæ ex cẽtro ad latus trianguli æquilateri eiusdem circuli ducitur, perpendiculari, & dimidio lateris decagoni. 763.B

Latus hexagoni ad latus decagoni eiusdem circuli eandem proportionem habet, quã recta subtendens angulum pentagoni, ad latus ipsius pentagoni. 765.B

Si linea perpendicularis ex centro circuli ad latus pentagoni ducta secetur extrema ac media ratione, maius segmentum æquale est perpendiculari ex eodẽ centro ad latus trianguli æquilateri ducta, minus vero æquale est dimidio lateris decagoni eiusdem circuli. 766.B

Si in circulo pentagonum æquilaterum describatur, quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni subtenditur, recta linea, vtraque simul quadrata, quintupla sunt eius, quod ex semidiametro describitur, quadrati. 767.B

Si in sphæra eadem cubus, & Dodecaedrum inscribantur; quadratũ lateris cubi, et quadratũ lateris Dodecaedri, vtraque simul, quintupla sunt quadrati semidiametri circuli pẽtagonũ dodecaedri circũscribentis. 768.B

Si latus hexagoni alicuius circuli secetur extrema ac media rõne; maius illius segmentũ erit latus decagoni eiusdẽ circuli. 768.B

Idem circulus comprehendit & Dodecardri pentagonum, & Icosaedri triangulum, eidem sphærę inscriptorum. pagina 769.& 940.B

Si ex centro circuli pẽtagonum Dodecaedri circumscribentis, perpendicularis ducatur ad vnum latus pentagoni; erit quod sub dicto latere; & perpendiculari comprehẽditur, rectangulũ trigesies sumptum Dodecaedri superficiei æquale. 771.B

Si ex cẽtro circuli triangulum Icosaedri circumscribentis, perpendicularis ducatur ad vnum latus trianguli; erit quod sub dicto latere, & perpendiculari comprehẽditur, rectangulum trigesies sumptum, Icosaedri superficiei æquale. 773.B

Superficies cuiuslibet Dodecaedri ad superficiem Icosaedri cuiuscunque, etiamsi non describantur ambæ figuræ in eadem sphæra, est sicut rectangulum sub latere Dodecaedri, & perpendiculari ex centro pentagoni Dodecaedri in latus illud ducta contentum ad rectangulum contentũ sub latere Icosaedri, & perpẽdiculari ducta ex cẽtro triãguli Icosaedri in illud latus. 774.B

Si ex centro circuli triangulum Tetraedri, vel octaedri, siue quadratum cubi, circumscribentis perpẽdiculares ducatur ad vnũ latus; Erit quod sub dicto latere & perpendiculari continetur, in Tetraedro quidem sumptum sexies, superficiei Tetraedri: In octaedro vero & cubo, duodecies sumptum superficiei octaedri, & cubi æquale. 774.B

Rectangulum contentum sub tribus quartis partibus diametri alicuius circuli, & quinque sextis partibus lineę subtendentis angulum pentagoni æquilateri in eodem circulo descripti, æquale est dicto pentagono. 776.B

Rectangulum contentum sub perpendiculari ex angulo trianguli Icosaedri ad vnum eius latus ducta, & sub quinque sextis partibus lateris cubi in eadem sphæra cum Icosaedro descripti, æquale est pentagono Dodecaedri eiusdem sphæræ. 777. B

Superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri in eadē sphæra descripti, eandem proportionem habet, quam latus cubi ad latus Icosaedri. pag. 778. B

Si recta linea secetur extrema ac media rōne; erit vt recta potens id, quod a tota, & id, qđ a maiori segmēto, ad rectam potentem id, quod a tota, & id, quod a minore segmento, ita latus cubi ad latus Icosaedri eidem sphæræ cum cubo inscripti. 780. B

Quam proportionem habent latera cubi & Icosaedri eiusdem sphæræ, eandem habent latera cubi & icosaedri in quauis alia sphæra descriptorum. 782. B

Si sphæra plano quopiam secetur, communis sectio circulus erit. pag. 783. B

Si planum secans transit per centrum sphæræ, fit circulus idem centrum habens cum sphæra: Si vero non transit per centrum, fit circulus, cuius centrum punctū est, in quod cadit perpendicularis ex centro sphæræ ad circulum ducta. 785. B

Circuli in sphæra æquales æqualiter distant a centro sphæræ: Et circuli æqualiter distantes a centro sphæræ, æquales sunt. 785. B

Dodecaedrum ad Icosaedrum in eadem cum ipso sphæra descriptum est, vt cubi latus ad latus Icosaedri, in vna eadēque sphæra. 786. B

Eadem proportio est lateris cubi ad latus Icosaedri, quæ superficiei Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, & lineæ potentis totam quamcunque sectam extrema ac media ratione, & eius segmentum maius, ad potentem totam eandem, & eius segmentum minus; & Dodecaedri ad Icosaedrum eiusdem sphæræ. pag. 788. B

Basis Tetraedri sesquitertia est basis octaedri eiusdem sphæræ: Superficies autem octaedri sesquialtera superficiei Tetraedri. 792. B

Recta ex angulo Tetraedri per centrum sphæræ ducta, cadit in centrum basis oppositæ, estque perpendicularis ad basim. 793. B

Tetraedrum ad octaedrum eiusdem sphæræ se habet, vt rectangulum sub linea potente viginti septē sexagesimas quartas partes lateris Tetraedri, & sub linea cōtinente octo nonas partes eiusdem lateris comprehensum, ad quadratum diametri sphæræ. 797. B

Sphæræ semidiameter potentia tripla est eius perpendicularis, quæ ex centro sphæræ in basim octaedri eiusdē sphæræ cadit. 802. B

Duplū quadrati ex diametro sphæræ descripti, æquale est superficiei cubi eiusdem sphæræ: perpendicularis autem a centro sphæræ in basim cubi demissa, æqualis est dimidio lateris cubi. 803. B

Solidum, quod fit ex dimidio lateris cubi in duas tertias partes quadrati diametri sphæræ dictū cubum comprehendentis, æquale est cubo. Item quod fit ex latere cubi in tertiā partem eius quadrati. 804. B

Solidum, quod fit ex perpendiculari è centro cuiuscunque corporis Regularis in basim demissa, in tertiam partem superficiei ipsius corporis, æquale est proposito corpori Regulari. 804. B

Idem circulus cōprehendit & cubi quadratū, & octaedri triangulū eiusdē sphæræ. 805. *et* 930. B

Rectæ coniungentes centra basium oppositarum tam in cubo, quam in octaedro, æquales sunt. 806. B

Octaedrum ad triplum Tetraedri eiusdē sphæræ est, vt latus octaedri ad latus Tetraedri. 807. B

Altitudo Octaedri ad altitudinē Tetraedri eiusdem sphæræ est, vt latus Octaedri ad latus Tetraedri: Item diameter sphæræ ad latus Tetraedri, vt latus Octaedri ad latus cubi. 809. B

Si recta proposita potuerit totam aliquam rectam extrema ac media ratione sectam, et maius eius segmentum: Item totam aliam similiter sectam, & minus eius segmentum; Erit maius segmentum prioris lineæ latus Icosaedri; minus autem segmentum posterioris lineæ latus dodecaedri eius sphæræ, cuius recta posita diameter est. 809. B

Si latus Octaedri potuerit maius & minus segmentum rectæ extrema ac media ratione sectæ; poterit latus Icosaedri eiusdem sphæræ duplum minoris segmenti. 811. B

Si recta diuisa extrema ac media ratione, cum minore segmento angulum rectum constituat, cui recta subtendatur; erit recta, quæ potentia sit subdupla eius rectæ subtensæ, latus Octaedri eius sphæræ, in qua dictum minus segmentum latus est Dodecaedri. 813. B

Si recta secetur extrema ac media ratione, & alia recta potentia huius sesquialtera sit latus Octaedri, maius segmentum erit latus Dodecaedri eiusdem cum Octaedro sphæræ. 814. B

Cubus ad Octaedrum eiusdē sphæræ est, vt superficies cubi ad Octaedri superficiem. Item vt latus cubi ad semidiametrū sphæræ. 815. B

Alia inuentio laterum quinq; corporum Regularium in eadem sphæra descriptorum. 817. B

Quadratum cubi ad triangulum

Tetraedri eiusdem sphæra est, vt latus Tetraedri ad perpendicularē ex vno angulo, trianguli Tetraedri ad latus oppositum ductam. 822.B
Latus Tetraedri potentia sesquialterum est axis, uel altitudinis ipsius: Axis vero Tetraedri potentia sesquitertius est lateris cubi eiusdem sphæræ. 823.B
Diameter sphæræ sesquialtera est axis Tetraedri illius sphæræ. pag. 824.B
Axis Tetraedri ad latus cubi eiusdem sphæra est, vt latus Tetraedri ad perpēdicularem ex vno angulo basis ad latus oppositum ductam. 825.B
Cubus triplus est Tetraedri eidem sphæræ inscripti. 825.B
Prisma eandem habens & basim, & altitudinem cum Tetraedro, æquale est cubo eiusdem sphæræ. pag. 826.B
Si in Tetraedro Octaedrum inscribatur; Tetraedrum bifariam secatur tribus quadratis æqualibus, quæ Octaedrum bifariam quoque, & sese ad angulos rectos intersecant. 829.B
Rectæ connectentes centra basium cubi oppositarum se mutuo secāt & bifariam, & ad angulos rectos. 831.B
Idē est centrum Icosaedri, atq; sibi inscripti Dodecaedri. 835.B
Si Tetraedrum Octaedro inscribatur; erunt quatuor bases Tetraedri octo basibus Octaedri parallelæ, singulæ binis. 837.B
Item rectæ centra basium octaedri oppositarum coniungens, sesquialtera est axis Tetraedri. 838.B
Diameter Dodecaedri duo latera potest, ipsius scilicet Dodecaedri & cubi, in quo Dodecaedrū inscribitur. 851.B
Si latus cubi secetur extrema ac media ratione; minus segmentum latus est Dodecaedri in cubo descripti: Maius vero segmentum latus cubi in hoc Dodecaedro descripti. 851.B
Latus cubi æquale est duobus lateribus, Dodecaedri videlicet in ipso descripti, et Dodecaedri circa eundem cubum descripti. pagina. 852.B
Recta duos angulos pentagonorum Dodecaedri communi lateri oppositos connectens est æqualis lateri cubi, cui Dodecaedrum inscribitur. 852.B
Diameter Icosaedri potest & latus Icosaedri & cubi Icosaedri ambientis. 854.B
Bifariæ sectiones sex oppositorū laterum Icosaedri coniunguntur tribus rectis æqualibus, sese in centro Icosaedri bifariam, & ad angulos rectos secantibus. pag. 855.B
Si latus cubi extrema ac media ratione secetur; maius segmentum latus est Icosaedri in eo cubo descripti. 855.B
Icosaedri tam latera, q̄ triangula opposita sunt parallela. 855.B

Idem

Idem est centrū Icosaedri, & octaedri in eo descripti. 857.B
Idem est centrum basis octaedri, & basis Icosaedri in eo descripti. quod intelligendum est de octo basibus Icosaedri in octo basibus octaedri collocatis. 861.B
Idem est centrum octaedri, & Icosaedri in eo descripti. 862.B
Idem est centrum pyramidis, & cubi in ea descripti. 867.B
Recta coniungens bifarias sectiones oppositorum laterum pyramidis, transit per centrum pyramidis, estque tripla lateris cubi in pyramide descripti. 867.B
Idem est centrum pramidis, & octaedri in ea descripti. 868.B
Idem est centrum basis pyramidis, & basis octaedri in ea descripti. quod intelligendum est de quatuor basibus octaedri in quatuor basibus pyramidis iacentibus. pag. 868.B
Quæ solida Regularia, in quibus proprie describantur, & quæ nō: Et alia de hac inscriptione mutua. 871.B
Si in Dodecaedro cubus describatur, & in hoc cubo aliud Dodecaedrum; erit proportio Dodecaedri exterioris ad interius Dodecaedrum triplicata proportionis, quam habet maius segmentum ad minus rectæ lineæ extrema ac media ratione diuisæ. 874.B
Si ab angulis trianguli pyramidis ducantur rectæ secantes opposita latera extrema ac media ratione, ita vt prope quemuis angulum sit maius segmentum vnius lateris, & minus alterius: Hæ sectionibus suis in medio producent basim Icosaedri in ea pyramide descripti, inscriptam quidem alij triangulo æquilatero, cuius anguli latera trianguli pyramidis secant extrema ac media ratione, & latera ipsa bifariam secantur ab angulis basis Icosaedri productæ. pag. 876.B
Latus Icosaedri octaedro inscripti, maius segmentum est rectæ diuisæ extrema ac media ratione, quæ ab vno angulo basis octaedri ducta secat latus oppositum extrema quoque ac media ratione. 878.B
Minus segmentum lateris pyramidis extrema ac media ratione secti, potentia duplum est lateris Icosaedri in ea descripti. pag. 879.B
Latus cubi potentia dimidium est lateris pyramidis in eo descriptæ: Latus vero pyramidis duplum est lōgitudine lateris octaedri sibi inscripti: Latus denique cubi duplum est potentia lateris sibi inscripti octaedri. 880.B
Latus Dodecaedri maius segmentum est rectæ, quæ potentia dimidium potest lateris pyramidis sibi inscriptæ. 881.B
Si in cubo describaī & Icosaedrū, & Dodecaedrū; Latus Icosaedri mediū ꝓportionale erit inter

Universidad de Deusto Biblioteca

latus cubi, & latus Dodecaedri pag. 881. B
Latus pyramidis potentia octodecuplum est lateris cubi in ea descripti. 882. B
Latus pyramidis potentia octodecuplum est rectæ extrema ac media ratione sectæ, cuius maius segmentum latus est Dodecaedri in pyramide descripti. pagina 882. B
Si in octaedro Icosaedrum describatur; erit latus Icosaedri potentia duplum minoris segmenti lateris octaedri extrema ac media ratione diuisi. 883. B
Latus octaedri potentia est quadruplum sesquialterum est lateris cubi in ipso descripti. 883. B
Latus octaedri potentia est quadruplum sesquialterũ rectæ extrema ac media ratione sectæ, cuius maius segmẽtum latus est Dodecaedri octaedro inscripti. pag. 884. B
Latus Icosaedri maius segmentum est rectæ extrema ac media ratione sectæ, quæ potentia dupla est lateris octaedri in Icosaedro descripti. 885. B
Latus cubi ad latus Dodecaedri in ipso descripti proportionem habet duplicatam eius, quam habet maius segmentum ad minus rectæ extrema ac media ratione sectæ. Latus vero Dodecaedri ad latus cubi in ipso descripti proportionem habet, quam minus segmentum ad maius eiusdem rectæ lineæ. 885. B
Latus octaedri sesquialterum est lateris sibi inscriptæ pyramidis. pag. 886. B
Si ex quadrato diametri Icosaedri auferatur triplum quadrati lateris cubi in eo descripti; relinquitur quadratum sesquitertiũ quadrati lateris Icosaedri. pag. 887. B
Diameter Icosaedri binas rectas potest, diametrum scilicet cubi in eo descripti, & diametrum circuli triangulum Icosaedri ambientis. 889. B
Latus Dodecaedri minus segmentum est rectæ extrema ac media ratione sectæ, quæ duplum potest lateris Icosaedri in eo descripti. 889. B
Diameter Icosaedri potest & suiipsius lateris sesquitertium, & lateris pyrumidis in eo descriptæ sesquialterum. 890. B
Latus Dodecaedri ad sibi inscripti Icosaedri latus se habet, vt minus segmentum lineæ perpendicularis ab vno angulo pentagoni ad latus oppositum ductæ, atque extrema ac media ratione sectæ, ad partem eiusdem lineæ inter centrum pentagoni, & latus eiusdem positæ. 891. B
Si dimidium lateris Icosaedri extrema ac media ratione secetur, minusque eius segmentum, a toto latere Icosaedri detrahatur; a reliqua quoq; recta pars rursum tertia dematur; relinquetur latus Dodecaedri in Icosaedro descripti. 892. B
Cubus sibi inscriptæ pyramidis triplus est. 894. B
Pyramis sibi inscripti octaedri dupla est. 895. B
Cubus sibi inscripti octaedri sextupla est. 896. B
Octaedrum sibi inscripti cubi quadruplum sesquialterum est. pag. 897. B
Idem est centrum Octaedri, atque cubi in eo descripti. 899. B
Octaedrum ad sibi inscriptum cubum est, vt quadratum lateris Octaedri ad quadratum lateris cubi in eo descriptl. 899. B
Octaedrum sibi inscriptæ pyramidis tredecuplum sesquialterum est. 900. B
Pyramis sibi inscripti cubi noncupla est. 900. B
Cubus ad cubum descriptum in pyramide, quæ in priori cubo describitur, est ut 27. ad 1. pag. 902. B
Octaedrum ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet, quam duæ bases Octaedri ad quinque bases Icosaedri. 902. B
Icosaedrum ad sibi inscriptum Dodecaedrum proportionem habet compositam ex proportione lateris Icosaedri ad latus cubi in eadem cum Icosaedro sphæra descripti, & ex proportione triplicata eius, quam habet diameter Icosaedri ad rectam centra basium Icosaedri oppositarũ coniungentem. 905. B
Dodecaedrum excedit cubum sibi inscriptum parallelepipedo, cuius quidem basis à quadrato cubi deficit rectangulo contento sub latere cubi, tertiaque parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi: at vero altitudo ab altitudine, siue latere cubi, minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit. 906. B
Dodecaedrum a duplo cubi sibi inscripti deficit duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri cubi est æqualis, latitudo autem tertiæ parti minoris segmenti eiusdem lateris cubi, altitudo denique a latere cubi deficit minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus segmentum existit: alterius vero & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis est, altitudo autem minus segmentum eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit; ita vt amborum altitudines simul altitudini, siue lateri cubi sint æquales. 911. B
Dodecaedrum ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet compositam ex proportione triplicata eius, quam habet diameter Dodecaedri ad rectam centra basium Dodecaedri oppositarum copulantem, & proportione lateris cubi ad latus Icosaedri in eadem sphæra cum

cubo descripti. 912.B
Dodecaedrum pyramidis, in qua describitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri cubi in eadem pyramide descripti æqualis est, latitudo vero tertiæ parti minoris segmenti lateris eiusdem cubi, altitudo denique a latere eiusdē cubi desicit minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiusdem minus segmentum existit: alterius autem & longitudo, & latitudo lateri cubi prædicti est æqualis, altitudo vero minus segmentū eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiusdē segmentū minus existit, ita vt amborū altitudines simul altitudini, siue lateri eiusdē cubi sint æquales. 913. B
Octaedrum excedit sibi inscriptum Icosaedrū parallelepipedo, cuius basis est quadratū lateris Icosaedri, altitudo vero maius segmētū semidiametri octaedri extrema ac media rōne sectæ. 914. B
Pyramis excedit duplum Icosaedri sibi inscripti parallelepipedo, cuius basis quadratū lateris Icosaedri, altitudo vero recta bifarias sectiones oppositorum laterū Icosaedri coniungens. 916. B
Si in sphæra sint duo circuli paralleli, & æquales, in quibus ductæ sint duæ rectæ parallelæ & æquales, ad easdem partes cētrorum; rectæ harum parallelarum extrema puncta ad easdem partes coniungentes, æquales quoque & parallelæ sunt, & ad plana circulorum perpendiculares. 920. B
Si in sphæra sint duo circuli paralleli & æquales, in quibus ductæ sint duæ rectæ parallelæ & æquales, non ad easdem partes centrorum; rectæ harum parallelarum extrema puncta non ad easdem partes coniungentes, in centro sphæræ se intersecant, ac proinde diametri sphæræ erunt, & inter se æquales: rectæ vero earundem parallelarum extrema pūcta ad easdem partes connectentes, & æquales ac parallelæ inter se sūt, & cum parallelis rectos angulos constituunt. 921. B
Si in sphæra sint duæ rectæ parallelæ; rectæ earum puncta extrema ad easdem partes coniungentes, æquales inter se erunt. Et si parallelæ fuerint æquales, coniungentes non solum æquales, sed & parallelæ erūt, rectosque cum ipsis angulos conficient. 923. B
Sphęræ diameter ad latus Icosaedri in ea descripti est, vt latus pentagoni ad latus decagoni eiusdē circuli cuiuslibet. 935. B
Latus Icosaedri maius est semidiametro sphæræ, in qua describitur. 935. B
Sphæræ diameter potentia est tripla lateris pentagoni descripti in circulo, qui per tres angulos Icosaedri eius sphæræ incedit, parallelusque est vni triangulo Icosaedri. 935. B

Idem

Idem circuli sphæræ sustinent & angulos Icosaedri, & angulos Dodecaedri in ea sphæra descriptorum. 940 B
Si quadratum, & triangulū æquilaterum æqualia habeant latera; erūt viginti triangula simul maiora, quam octo quadrata simul. 941. B
Octo quadrata ex semidiametro sphæræ descripta, æqualia sunt superficiei cubi in ea sphæra descripti. 942. B
Si octaedrū, cubus, & Icosaedrum in eadem sphæra describantur; erit perpēdicularis ex cētro sphęræ ad vnam basim Icosaedri ducta maior perpendiculari ex eodem centro sphæræ ad vnam basim octaedri, & cubi ducta. pagina. 943. B
Icosaedri superficies maior est superficie cubi in eadem sphæra descripti. 943. B
Dodecaedrum Icosaedro maius est. pag. 944. B
Icosaedrum cubo maius est. pagina. 944. B
Cubus Octaedro maior est. 945. B
Octaedrum Tetraedro maius est. pag. 945. B
Superficies Dodecaedri superficiem Icosaedri superat, & hæc superficiem cubi, & hæc superficiem Octaedri, atque hæc denique superficiem Tetraedri. 946. B
Latus Tetraedri maius est latere Octaedri, & hoc maius latere cubi, & hoc maius latere Icosaedri, atque hoc denique maius latere Dodecaedri. 749. B
Si corpora regularia sint Isoperimetra illud, quod plures habet bases, maius est: Vt Icosaedrū maius Dodecaedro, & hoc maius Octaedro, & hoc maius Cubo, atque hoc denique maius Tetraedro. 947. B
Omnes inclinationes duarum basium cuiusque corporis Regularis æquales sunt. 948. B

FIGVRAE, anguli, & lineæ proporortionales.

Triangula & parallelogramma, quorum eadem est altitudo, ita se habent inter se, vt bases. 752. A
Triangula & parallelogramma, quæ ita se habent inter se, vt bases, æquales habent altitudines, vel eandem. 754. A
Triangula & parallelogramma, quorum æquales sunt bases, vel eadem, ita se habent inter se, vt altitudines. 754. A
Triangula & parallelogramma, quæ ita se habent inter se, vt altitudines, æquales habent bases, si vnam & eandem non habeant. 755. A
Si ad vnū triāguli latus parallela ducta sit, hęc secabit duo latera reliqua ꝓportionaliter. Et si duo latera secta sint ꝓportionaliter; recta linea sectiones iungens,

iungẽs, parallela erit reliquo lateri. 756.A
Si trianguli angulus bifariam sectus sit, secãs autem angulum recta linea secet & basim: basis segmenta ita se habebunt inter se, vt reliqua duo latera. Et si basis segmenta ita se habeant, vt reliqua duo latera: recta a vertice ad sectionẽ ducta, bifariam secabit angulum trianguli. 758.A
Aequiangulorum triangulorum proportionalia sũt latera circa æquales angulos, & homologa sunt latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur. pag. 759.A
Recta linea vni lateri trianguli parallela aufert triangulum toti triangulo simile. 760.A
Si ex duobus punctis rectę, quorum alterum sit extremum, alterum vero intra lineã, duæ parallelæ inter se educantur ad easdem partes, ita vt habeant eandem proportionem, quam rectæ inter ipsas, & alterum punctum extremum inclusæ: Recta coniungẽs extremum vnius earum, cum extremo prioris lineæ transibit per extremum alterius lineæ. 761.A
Si in triangulo parallela vni lateri agatur, recta ex angulo opposito ducta secat parallelam, & latus illud in easdem rationes. pag. 762.A
Si duo triangula latera proportionalia habeant; æquiangula erunt, & æquales habebũt eos angulos, sub quibus homologa latera subtẽduntur. 763.A
Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, & circa æquales angulos latera proportionalia habeant; æquiangula erunt, æqualesque habebunt angulos, sub quibus latera homologa subtenduntur. pag. 764.A
Si duo triãgula vnum angulum vni angulo æqualem, circa autem alios angulos latera proportionalia habeant; reliquorum vero simul vtrumque aut minorem, aut non minorem recto: æquiangula erunt, & æquales habebunt eos angulos, circa quos proportionalia sunt latera. 765.A
Si in triangulo rectãgulo ab angulo recto in basim perpendicularis ducta sit: quę ad perpẽdicularem triangula tum toti triangulo, tum ipsa inter se similia sunt. 767.A
Item tam perpẽdicularis est media proportionalis inter duo basis segmenta, quam vtrumlibet laterum circa rectum angulum inter totam basim, & segmẽtum basis ei lateri adiacens. 768.A
Si duæ rectæ secentur in binis punctis proportionaliter: Erunt quoque intermediæ sectiones in eadem proportione cum quibuslibet segmentis duobus 774.A
Si recta in quotcunque partes Arithmetice proportionales secta sit, & alia recta secetur in totidem partes, quæ eaſdem inter se, quas illę, proportiones habeant: Erunt quoq; partes huius lineæ Arithmetice proportionales. 775.A
Si duæ rectæ inæquales ad alias duas eandem habeant proportionem, minor ad minorem, & maior ad maiorem: Erit quoq; excessus priorum ad excessum posteriorum, vt priorum vna ad vnam posteriorum. 776.A
Recta a quouis puncto diametri ducta perpendicularis vsq; ad circumferentiam semicirculi, media proportionalis est inter diametri segmenta. 782.A
Aequalium, & vnum vni æqualem habentium angulum, parallelogrammorum, reciproca sunt latera circa æquales angulos. Et quorum reciproca sunt latera circum æquales angulos, illa sunt æqualia. 784.A
Aequalium & vnum vni æqualẽ habentium angulum, triangulorum, reciproca sunt latera circum æquales angulos. Et quorum reciproca sunt latera circa æquales angulos, illa sunt æqualia. 785.A
Si quatuor rectę proportionales sint; rectangulũ sub extremis æquale est rectangulo sub medijs. Et si rectangulum sub extremis æquale sit rectangulo sub medijs, illę quatuor rectæ proportionales sunt. 786.A
Idem eueniet, si parallelogramma non sint rectangula, sed tantum æquiangula. 787.A
Si tres rectæ sint proportionales; rectãgulum sub extremis quadrato mediæ æquale est. Et si rectangulũ sub extremis quadrato mediæ sit æquale; illæ tres proportionales sunt. pag. 788.A
Recta, cuius quadratum æquale est rectangulo sub duabus rectis quibuscunque, media proportionalis est inter eas duas rectas. pag. 788.A
Idem eueniet, si parallelogramma non sint rectangula, æquiangula tamen. 789.A
Triangula similia inter se sunt in duplicata ratione homologorum laterum. 814.A
Si tres rectæ sint proportionales; vt est prima ad tertiã, ita est triangulum super primam ad triangulum super secundã simile, similiterque descriptũ pag. 815.A
Similia polygona in similia triãgula diuiduntur, & numero æqualia, & homologa totis: Et polygona duplicatam habẽt rationem homologorum laterum. 817.A
Si tres rectæ sint proportionales; vt est prima ad tertiam, ita

ita est polygonum super primam, ad polygonum super secundam simile similiterq; descriptum. 819.A

Similia polygona æquilatera, & æquiangula, diuiduntur in similia triangula, & numero æqualia, & homologa totis; ductis rectis a centris circulorum ipsa circumscribentium ad omnes angulos. 821.A

Quæ eidem rectilineo sunt similia, & inter se sunt similia. pag. 823.A

Si quatuor rectæ sint proportionales: Et ab eis rectilinea similia similiterque descripta, proportionalia sunt. Et si a rectis similia similiterque descripta rectilinea, proportionalia sint: ipsæ etiam rectæ proportionales erunt. 823.A

Æqualia rectilinea similia, similiterque descripta, sunt super æquales rectas. 825.A

Si tres rectæ sint proportionales; erũt quoque rectilinea similia similiterque descripta ab eis proportionalia, &c. 826.A

Æquiangula parallelogramma inter se rationem habent ex lateribus compositam. 837.A

Triangula vnum angulum vni angulo æqualem habentia proportionem habẽt ex lateribus circa æqualẽ angulũ cõpositã. 830.A

Triangula vnũ angulũ vni angulo æqualẽ habentia, eandẽ proportionem habent, quam rectangula sub lateribus circa angulũ æqualem contenta. 832.A

Parallelogramma æquiangula eandem rationem habent, quam rectangula sub lateribus circa angulũ æqualem contenta. 833.A

Triangula & parallelogramma inter se rationem habent compositam ex proportione basium, & proportione altitudinum. pagina. 833.A

In parallelogrammo parallelogramma circa diametrum, & toti, & inter se sunt similia. pag. 835.A

Datis duobus parallelogrammis æquiangulis, sed non similibus: ex quouis illorum alteri simile resecare. 837.A

Si a parallelogrammo parallelogrammum ablatum sit simile toti, & similiter positum, cõmunem cum eo habens angulum; hoc circa eandem cum toto diametrum consistit. pag. 840.A

Idem eueniet, si angulũ habeant non communem. 842.A

Parallelogrammorum secundũ eandem rectam lineam applicatorum, deficientiumq; figuris parallelogrammis similibus, similiterq; positis ei, qd a dimidia describitur; maximum id est, quod ad dimidiũ applicatur, parallelogrammum simile existens defectui. pag. 844.A

In rectangulis triangulis, figura quæuis

quæuis a latere rectum angulum subtendẽte descripta æqualis est figuris, quæ priori illi similes, & similiter positæ a lateribus rectum angulũ cõtinẽtibus describũtur. 852.A

Si figura, q̃ ab vno latere triãguli describitur, æqualis sit eis, quæ a reliquis duobus lateribus describuntur, figuris similibus similiterque positis: angulus sub reliquis his lateribus comprehensus, rectus est. 854.A

Si duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, secundum vnum angulũ composita fuerint, ita vt homologa eorum latera sint parallela; tũ reliqua latera in rectam lineam collocata reperientur. 855.A

In circulis æqualibus, anguli eã dem habent rationem cũ peripherijs, quibus insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant: Insup vero & sectores, quippe qui ad centra consistunt. 856.A

In circulis æqualibus, est sector ad sectorẽ, vt angulus ad angulum in centro. 859.A

Vt est angulus in centro ad quatuor rectos, ita est arcus illi angulo subtensus ad totã circunferentiã. Et cõtra. 859.A

Similia circulorum segmenta eandem habent proportionem ad totas circumferentias. 861.A

Si duo aut plures circuli idem habeant centrum: Rectæ ex centro ductæ abscindunt arcus similes. pag. 405, & 862.A

Si in circulo duæ rectæ se mutuo secent: erunt segmenta vnius segmẽtis alterius reciproca. 875.A

Si extra circulum sumatur pũctũ aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ circulum secantes; erunt totæ, & segmenta extra circulum reciproca. Quod si ab eodem puncto rectæ ducatur circulum tangens; erit hæc media proportionalis inter quamlibet rectam, quæ circulum secet, et eius segmẽtũ exterius. 875.A

Si duæ rectæ se mutuo secent, & a duobus earum terminis perpendiculares sibi mutuo demittantur: erunt duæ lineæ, quarũ vna inter vnum terminorum, & sectionem, altera vero inter sectionẽ, & prioris lineæ assumptæ perpendicularẽ interijcitur, alijs duabus eodem modo inclusis reciprocæ. 876.A

In parallelogrammo duæ rectæ lateribus parallelę se mutuo secantes, diuidũt parallelogrammum in quatuor parallelogrãma proportionalia. 877.A

Omne quadrilaterũ a duab. diametris diuiditur in quatuor triãgula proportionalia. 877.A

In triãgulo rectãgulo, in quo perpẽdicularis ab angulo recto demissa secat basim extrema ac media ratione; tria latera sunt continue proportionalia. Et si tria

latera

latera trianguli rectanguli sint continue proportionalia; perpendicularis ad basim ex angulo recto demissa, secat basim extrema ac media ratione. 878.A

Si ex centro per quæuis puncta lineæ Quadratricis ducantur rectæ vsque ad peripheriam quadrantis ex eodem centro descripti, & ex eisdem punctis ad basim demittantur perpendiculares, & aliæ rectæ eidem basi parallelæ: Erunt arcus quadrantis inter semidiametros interiecti, perpendicularibus, vel segmẽtis semidiametri intra parallelas positis, proportionales. 898.A

Si quadrãtis & Quadratricis idẽ centrum sit; erunt arcus quadrantis, semidiameter, & basis Quadratricis, continue proportionales. 904.A

Circumferentiæ circuli ad eius diametrum, proportio in numeris plus minus, quæ sit. 907.A

Si sint duæ rectæ, erit vt prima ad secundam, ita quadratum primæ ad rectangulum sub illis duabus contentum. Et vt secunda ad primam, ita rectãgulum sub ipsis ad quadratum primæ. 344.B

Si sint duæ rectæ inæquales, erit vt prima ad secundam, ita rectangulum sub ipsis ad quadratum secundæ. 375.B

Si sint tres rectæ, erit vt prima ad tertiam, ita rectangulum sub prima & secunda contentum, ad id, quod sub secunda & tertia continetur. 377.B

Si recta linea secetur in partes duas inæquales; erit vt alterutra pars ad alteram, ita rectãgulum sub tota & priore parte assumpta, ad rectangulum sub tota, & altera parte contentum. 380.B

Si recta sit secta vtcunque; erit rectangulum sub partibus cõtentum, medium proportionale inter earum quadrata. Item rectangulum sub tota, & vna parte contẽtum, mediũ proportionale inter quadratum totius lineæ, & quadratũ dictæ partis. 416.B

Si duæ rectæ parallelis planis secentur; In easdẽ rationes secabuntur. 568.B

Si solidum parallelepipedũ plano secetur aduersis planis parallelo: Erit quemadmodum basis ad basim, ita solidum ad solidum. 585.B

Idem conuenit in omne prisma. pag. 587.B

Si prisma quodcunque secetur plano oppositis planis æquidistante, sectio est figura æqualis, & similis planis oppositis. 590.B

Solida parallelepipeda sub eadẽ altitudine; inter se sunt, vt bases. 602.B

Si parallelepipeda inter se sint, vt bases; ipsa erunt sub eadem altitudine. 603.B

Similia solida parallelepipeda, inter

inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterũ. pag. 603.B

Si sint quatuor rectæ continue proportionales, vt est prima ad quartam, ita est parallelepipedum super primã descriptum, ad parallelepipedum simile, similiterque descriptum super secundam. 605.B

Æqualium solidorum parallelepipedorum bases & altitudines reciprocãtur. Et quorum solidorum parallelepipedorũ bases & altitudines reciprocantur; illa sunt æqualia. pag. 605.B

Hæc quinque, quæ proxime de parallelepipedis dicta sunt, conueniunt etiam prismatis, in quibus duo plana opposita sunt triãgula. 608.B

Si tres rectæ sint proportionales; quod ex illis fit solidum parallelepipedum, æquale est descripto a media linea solido parallelepipedo, qđ æquilaterum quidem sit, æquiangulum vero prædicto. 612.B

Si *parallelepipedum ex tribus rectis descriptum, æquale sit parallelepipedo sibi æquiangulo a media recta descripto; erunt tres rectæ continue proportionales.* pag. 613.B

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint; & solida parallelepipeda, quæ ab ipsis & similia, & similiter describuntur, proportionalia erunt. Et si solida parallelepipeda, quę & similia, & similiter describuntur, fuerint proportionalia; & ipsæ rectæ lineę proportionales erunt. 614.B

Eodem modo si fuerint tres rectæ proportionales, erunt & parallelepipeda similia, similiterque descripta ex eis, proportionalia, etc. pag. 616.B

Idem quoque quadrat in prismata triangularium planorum oppositorum ex quatuor rectis, vel tribus, continue proportionalibus descripta, si similia, similiterque posita sint. 616.B

Circuli inter se sunt, quemadmodum a diametris quadrata. 626.B

Circulus ad circulum est, vt polygonum in illo descriptũ ad polygonum simile in hoc descriptum. 629.B

Sub eadem altitudine existẽtes pyramides, & triangulares habentes bases; inter se sunt, vt bases. 635.B

Si pyramides triangulares inter se sint, vt bases; ipsæ erunt sub eadem altitudine. 637.B

Sub eadem altitudine existentes pyramides, & polygonas habentes bases, inter se sunt, vt bases. 638.B

Idem verum est de pyramidibus eiusdem altitudinis, quarum vna basim habet plurium angulorum, quam altera. 639.B

Pyra-

Pyramides quarumlibet basium, quæ inter se sunt, vt bases; eandem habent altitudinẽ. 641.B
Pyramis quælibet tertia pars est prismatis, quod eandem cum illa habet & basim, & altitudinem. Siue prisma quodlibet triplum est pyramidis, quæ eandem cum ipso habet & basim & altitudinẽ, 642.B
Eodem modo pyramis tertia pars est prismatis habentis basem basi, & altitudinem altitudini æqualem. 644.B
Prismata eiusdem altitudinis super quascunque bases, inter se sunt, vt bases. 644.B
Si prismata quarumcũque basium inter se sint, vt bases; ipsa erunt sub eadem altitudine. 645.B
Quæ de prismatis dicta sunt, intelligi debent de ijs, quę habent plana opposita basibus æqualia, & similia. 646.B
Similes pyramides, quæ triangulares habent bases, in triplicata sunt homologorũ laterum ratione. 647.B
Similes pyramides, quarum bases plura latera, quã tria continent, habent proportionem homologorum laterũ triplicatam. 648.B
Similia prismata triplicatam proportionem habent laterum homologorum. 649.B
Pyramides multangulæ similes diuiduntur in pyramides triangulares similes, & numero æquales, & homologas totis. 651.B
Prismata multangula similia diuiduntur in prismata similia triãgulares bases habentia, & numero æqualia, & homologa totis. pag. 651.B
Æqualium pyramidum, & triangulares bases habentium, reciprocantur bases & altitudines. Et quarum pyramidum triangulares bases habẽtium reciprocantur bases, & altitudines; illæ sũt æquales. 651.B
Æqualium pyramidum, quarum bases non sunt triangulares, reciprocantur bases & altitudines. Et quarum pyramidum triangulares bases non habentium reciprocantur bases & altitudines, illæ sunt æquales. 652.B
Idẽ conuenit prismatibus. 654.B
Sub eadẽ altitudine existẽtes coni & cylindri, inter se sunt, vt bases. 658.B
Atque hoc verum est, siue coni & cylindri recti sint, siue scaleni. pag. 661.B
Si coni & cylindri quicunque inter se sint, vt bases, ipsi sub eadem altitudine erunt. 661.B
Coni & cylindri similes, in triplicata ratione sunt diametrorũ, quæ in basibus. 662.B
Idem hoc locum habet in conis & cylindris scalenis. 665.B
Si cylindrus plano secetur aduersis planis parallelo; erit vt cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem. 667.B
Idem

Idem intelligatur de cylindro scaleno. 668.B
Super æqualibus basibus existentes coni, & cylindri, inter se sunt, vt altitudines. 668.B
Idem conuenit conis & cylindris scalenis. 669.B
Item prismatis, parallelepipedis, & pyramidibus super æquales bases constitutis. 670.B
Coni et cylindri tã recti, q̃ scaleni: Itẽ prismata, parallelepipeda, & pyramides, proportionẽ habẽtes eãdem, quam altitudines, bases habebunt æquales. 672.B
Æqualium conorum, & cylindrorum reciprocantur bases, & altitudines. Et quorum conorum & cylindrorũ reciprocantur bases & altitudines, illi sunt æquales. 672.B
Idem conuenit conis & cylindris scalenis. 674.B
Sphęrę inter se sũt in triplicata rõne suarũ diametrorũ. 685.B
Ex quo fit, ita esse sphæram ad sphæram, vt polyedrum in illa descriptum, ad polyedrum simile in hac descriptũ. 688.B
Si recta linea secũdũ extremã & mediam rationẽ secetur; maius segmẽtũ assumẽs dimidiã totius, quintuplũ potest eius, quod a dimidia totius describitur, quadrati. 689.B
Si recta linea suijpsius segmenti quintuplũ possit; Duplæ prædicti segmẽti extrema ac media ratione sectæ, maius segmentum reliqua pars est eius, quæ a principio, rectæ. 691.B
Si recta linea secũdum extremã & mediam rationem secetur; minus segmẽtum assumens dimidiã maioris segmenti, quintuplum potest eius, quod a dimidia maioris segmenti describitur, quadrati. 693.B
Si recta inæqualiter secetur, & minus segmentũ assumens dimidiũ maioris segmẽti quintuplũ possit eius, quod a dimidia maioris segmenti describitur, quadrati: Recta illa linea secta erit extrema & media ratione. 695.B
Si recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur; quod a tota, quodq; a minore segmento, simul vtraque quadrata, tripla sũt eius, quod a maiore segmento describitur, quadrati. 696.B
Si recta inæqualiter secetur, sitque quadratum totius, vna cum quadrato minoris segmenti, triplum quadrati ex maiore segmento descripti: Recta illa linea extrema ac media ratione secabitur. 697.B
Si recta secũdũ extremã et mediã rationem secetur, tota linea assumens minus segmentũ, quintuplũ põt eius, q̃ a maiori segmẽto describitur, quadrati. Et si recta inæqualiter secetur, totaq; assumens minus segmentum possit quintuplum eius, quod a maiori segmento describitur, quadrati; Recta illa secundũ extremã & mediã rationẽ secta est. 698.B

Si recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur; apponaturq; ei æqualis maiori segmento: Tota recta linea secundum extremam & mediam rationem secatur, & maius segmentum est, quę a principio, recta linea. 699.B

Si recta secetur extrema ac media ratione, detrahaturque ex maiori segmento segmẽtum minus; erit maius segmentum sectũ extrema ac media ratione, et maius segmẽtum est illa linea, quæ prioris lineæ minus segmentum erat. 700.B

Si recta secetur extrema ac media ratione, atque ex dimidio illius auferatur dimidia maioris segmenti; erit quoq; dimidia totius diuisa extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit dimidium maioris segmenti totius lineæ. 701.B

Si ad rectam perpendicularis ducatur, quæ sit media proportionalis inter segmenta lineæ; semicirculus circa illam lineam rectã descriptus transibit per extremum punctum lineæ perpendicularis. 722.B

Si binæ rectæ extrema ac media ratione secẽtur; ipsę similiter secabuntur, in easdẽ scilicet proportiones. 763.B

Si sint quatuor rectæ continue proportionales, necnon & aliæ quatuor, ita vt eadem sint antecedẽtę omnium; erit proportio tertiæ ad tertiam proportionis secundæ ad secundam duplicata; & proportio quartæ ad quartam eiusdem proportionis secundæ ad secundam triplicata. 819.B

Si duo latera trianguli æquilateri secentur extrema ac media ratione, ita vt vnius maius segmẽtum, alterius vero minus sit prope angulum ab ipsis comprehensum; recta connectens puncta sectionum duplum potest minoris segmenti. 861.B

Perpendicularis ex angulo pentagoni æquilateri & æquianguli in latus oppositum demissa, secatur a recta illum angulum subtendente, extrema ac media ratione. 875.B

FIGVRAE planę quadrilateræ. vide. Parallelogrammum, &c.

FRACTIONES numerorum. vide. Minutiæ numerorum.

FRACTVS numerus. vide. Minutiæ numerorum.

IMPAR numerus. vide. Numerus par, &c.

INCOMMENSVRABILES magnitudines. vide. Commensurabiles, & incommensurabiles magnitudines.

IRRATIONALES magnitudines. vide. Rationales, & irrationales magnitudines.

ISOSCELES. vide. Trian gulum.

LINEA perpendicularis. vide. Recta linea.

LINEA recta. vide. Recta linea.

LINEAE parallelæ. vide. Recta linea.

LINEAE proportionales. vide. Figuræ, Anguli, & lineæ proportionales.

MAGNITVDINES commensurabiles, & incommensurabiles. vide. Commensurabiles, & incommensurabiles magnitudines.

MAGNITVDINES proportionales in communi.

Si sint tres rectæ Arithmetice proportionales: rectangulum sub extremis, vna cum quadrato excessus, æquale erit quadrato lineæ mediæ. 271.A

Proportionum rationalium genera, & inuentio: Et proportionalitatis Arithmeticæ, Geometricæ, atque Harmonicæ, siue Musicæ, proprietates variæ. a 505. *vsque ad* 632.

Euclides cur in defin. 6. & 8. lib. 5. quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales per earum æque multiplicia definierit. 643.A

Si sint quotcunq; magnitudines quotcunq; magnitudinũ ęqualium numero, singulæ singularum, æque multiplices; quam multiplex est vnius vna magnitudo, tã multiplices erunt & omnes omnium. 675.A

Si prima secũdę ęque fuerit multiplex, atq; tertia quartæ, fuerit autem & quinta secundæ æque multiplex, atque sexta quartæ: erit & composita prima cum quinta, secũdæ æque multiplex, atque tertia cum sexta quartæ. 676.A

Idem sequitur, si prima & tertia, æquales sint secundæ & quartę; at quinta & sexta, æque multiplices secundæ & quartę: Vel prima et tertia, ęque multiplices secundę & quartę; at quinta & sexta, æquales secundæ ac quartæ: Vel denique si tam prima & tertia, quam quinta ac sexta, æquales sint secundæ ac quartæ. pag. 677.A

Si sit prima secũdæ æque multiplex, atq; tertia quartæ: sumãtur autẽ ęque multiplices primæ ac tertiæ: Erit & ex ęquo, sumptarum vtraque vtriusq; æque multiplex, altera quidẽ

secundæ, altera autem quartæ. 678.A
Si prima ad secundã habeat eandẽ rationem, quam tertia ad quartam: Etiam æque multiplices primæ & tertiæ, ad æque multiplices secundæ & quartæ, iuxta quamuis multiplicationem eandem habebũt rationem, si prout inter se respondent, ita sumptæ fuerint. pag. 679.A
Magnitudines quatuor proportionales, conuertendo quoq; proportionales sunt. 681.A
Si magnitudo magnitudinis æque fuerit multiplex, atque ablata ablatæ: Etiam reliqua reliquæ ita multiplex erit, vt tota totius. 683.A
Si duæ magnitudines duarũ magnitudinum sint æque multiplices, & detractæ quædã sint earundem æque multiplices: Et reliquæ eisdem aut æquales sunt, aut æque ipsarũ multiplices. 685.A
Æquales ad eãdem, eandem habent rationem: Et eadem ad æquales. 687.A
Eodem modo, æquales ad æquales eandẽ habent rationem. 688.A
Inæqualium magnitudinum maior ad eandem, maiorẽ rationem habet, quam minor: Et eadem ad minorem, maiorem rationem habet, quam ad maiorẽ. 688.A
Quæ ad eandem, eandẽ habent rationem, æquales sunt: Et ad quas eadem eandem habet rationem, eæ æquales quoque sunt. 691.A
Ad eandem magnitudinẽ rationẽ habentiũ, quæ maiorem rationem habet, illa maior est: Ad quam autem eadem maiorem rationem habet, illa minor est. 692.A
Quæ eidẽ sunt eędẽ rationes, & inter se sunt eædem. 693.A
Quæ eisdem sunt eadẽ rationes, & inter se sunt eadem. 694.A
Si sint magnitudines quotcunq; proportionales: quemadmodum se habuerit vna antecedentium ad vnã consequẽtiũ, ita se habebunt omnes antecedentes ad omnes cõsequentes. 695.A
Si prima ad secundam, eandẽ habuerit rationẽ, quam tertia ad quartam, tertia vero ad quartam maiorem rationẽ habuerit, quam quinta ad sextam: Prima quoque ad secundam, maiorem rationem habebit, quã quinta ad sextam. 696.A
Si prima ad secundã, eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia vero ad quartam, minorem rationem habuerit, quam quinta ad sextam: Prima quoque ad secundam, minorẽ rationem habebit quam quinta ad sextã. 697.A
Si prima ad secundam, maiorẽ habuerit rationem, quã tertia ad quartam; tertia itẽ ad quartã, maiorẽ habuerit, quam quinta ad sextam: Prima quoq; ad secundam, maiorem habebit, quã quinta ad sextam. Quod si prima ad secundam, minorem habuerit rationem, quã tertia ad quartam; tertia item ad quartam, minorẽ, quam quinta ad sextam: Prima quoq; ad secundam, minorem rationẽ habebit, quã quinta ad sextam. 697.A
Si prima ad secundã sit, vt tertia ad quartam; sit autem prima maior, quam tertia: erit & secũda maior quam quarta. Et si æqualis, æqualis: Et si minor, minor. 698.A
Eodẽ modo, si secũda maior fuerit quã quarta, erit et prima maior quã tertia: Et si æqualis, æqualis: Et si minor, minor. 699.A
Partes cũ pariter multiplicibus in eadẽ sunt ratione, si prout sibi mutuo respondent, ita sumantur. 700.A
Magnitudines quatuor proportionales, vicissim quoq; proportionales sunt. 701.A
Si *sint quatuor magnitudines proportionales, sit aũt prima maior q̃ secunda: erit quoq; tertia maior q̃ quarta: Et si æqualis, æqualis: Et si minor, minor.* 702.A
Si compositæ magnitudines fuerint proportionales, hæ quoque diuisæ proportionales erunt. 703.A
Si diuisæ magnitudines sint proportionales, hæ quoq; cõposite ꝓportionales erunt. 705.A
Si sit, vt totum ad totũ, ita ablatum ad ablatum: erit quoque reliquum ad reliquum, vt totum ad totum. 708.A
Si sint quatuor magnitudines ꝓportionales; hæ quoque per conuersionem rationis proportionales erunt. 709.A
Si sint tres magnitudines, & aliæ tres, quæ binæ & in eadẽ ratione sumantur; sit autem ex æquo prima maior, quam tertia; erit & quarta maior quã sexta; Et si æqualis, æqualis: Et si minor, minor. 710.A
Si sint tres magnitudines, & aliæ tres, quæ binæ & in eadem ratione sumantur, fueritq; perturbata earum proportio; ex æquo aũt prima maior fuerit q̃ tertia: Erit & quarta maior quã sexta: Et si æqualis, æqualis: Et si minor, minor. 711.A
Si sint quotcũq; magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, q̃ binæ in eadẽ rõne sumãtur: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt. 713.A
Si sit prima ad secundã, vt tertia ad quartã: habebũt æquemultiplices primæ ac tertiæ ad secũdã & quartam, eãdem rationem: Itẽ æquemultiplices secundæ & quartæ ad primã ac tertiã. Et contra, eandem rationem habebũt secunda & quarta ad æquemultiplices primæ ac tertiæ: Itẽ

prima ac tertiia, ad æque multiplices secundæ & quartę. 715. A
Si sint tres magnitudines, alięq; ipsis æquales numero, quę binæ in eadem ratione sumantur, fuerit autem perturbata earum proportio: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt. 716. A
Si sit prima ad secundam, vt tertia ad quartam; Item quinta ad secũdam, vt sexta ad quartam: Etiam composita prima cum quinta ad secũdam erit, vt composita tertia cum sexta ad quartam. 717. A
Si duæ magnitudines ad duas eandem habeant rationem, & detractæ ex prioribus ad easdẽ posteriores eandem quoque habeãt rationem: Et reliquæ ad easdem posteriores eandem rationem habebunt. 718. A
Si quatuor magnitudines sint proportionales: Maxima & minima reliquis duabus maiores erunt. 719. A
Si tres magnitudines sint proportionales: Maxima & minima maiores erũt, quam dupla reliquæ. pag. 720. A
Si prima ad secundam habeat maiorem rationẽ, quam tertia ad quartam: habebit conuertendo secũda ad primam, minorem rationẽ, quã quarta ad tertiam. 721. A
Si prima ad secundã habeat maiorem rationẽ, quã tertia ad quartam: habebit quoq; vicissim prima ad tertiã, maiorẽ rationem, quã secunda ad quartã. 722. A
Si prima ad secundam habeat minorem rationem, quã tertia ad quartam: habebit quoq; vicissim prima ad tertiam, minorem rationem, quam secunda ad quartam. 722. A
Si primã ad secundã habeat maiorem rationem, quam tertia ad quartam: habebit quoq; composita prima cum secunda, ad secundam maiorem rationem, quam composita tertia cum quarta, ad quartam. 723. A
Si prima ad secundam habeat minorem rationem, quã tertia ad quartam: habebit quoq; composita prima cum secunda, ad secundam minorem rationem, quam composita tertia cum quarta, ad quartam. 724. A
Si composita prima cum secũda ad secundam, maiorem habeat rationem, quam composita tertia cum quarta ad quartam: habebit quoque diuidendo prima ad secundam maiorem rationem, quam tertia ad quartam. pag. 724. A
Si prima cum secunda ad secundam minorem rationẽ habeat, quam tertia cũ quarta ad quartam: habebit conuertendo secũda ad primã, maiorẽ rõnẽ, quã quarta ad tertiam. 721. A
Si prima ad secundã habeat maiorem rationẽ, quã tertia ad quartam: habebit quoq; vicissim prima ad tertiã, maiorẽ rationem, quã secunda ad quartã. 722. A
Si prima ad secundam habeat minorem rationem, quã tertia ad quartam: habebit quoq; vicissim prima ad tertiam, minorem rationem, quam secunda ad quartam. 722. A
Si primã ad secundã habeat maiorem rationem, quam tertia ad quartam: habebit quoq; composita prima cum secunda, ad secundam maiorem rationem, quam composita tertia cum quarta, ad quartam. 723. A
Si prima ad secundam habeat minorem rationem, quã tertia ad quartam: habebit quoq; composita prima cum secunda, ad secundam minorem rationem, quam composita tertia cum quarta, ad quartam. 724. A
Si composita prima cum secũda ad secundam, maiorem habeat rationem, quam composita tertia cum quarta ad quartam: habebit quoque diuidendo prima ad secundam maiorem rationem, quam tertia ad quartam. pag. 724. A
Si prima cum secunda ad secundam minorem rationẽ habeat, quam tertia cũ quarta ad quartam: habebit quoque diuidendo prima ad secũdam minorem rationem, quam tertia ad quartam. 725. A
Si composita prima cum secũda ad secundam habeat maiorẽ rationem, quam composita tertia cũ quarta ad quartã: habebit per conuersionem rationis, prima cũ secunda ad primam, minorem rationem, quam tertia cũ quarta ad tertiam. 726. A
Si prima cum secunda ad secundam, minorem habeat rationẽ, quam tertia cũ quarta ad quartam: habebit per conuersionem rationis, prima cum secunda ad primam, maiorem rationem, quam tertia & quarta ad tertiam. 726. A
Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitque maior proportio prima priorum ad secundam, quam prima posteriorum ad secundam; Item secunda priorum ad tertiam maior, quam secunda posteriorum ad tertiam: Erit quoque ex æqualitate, maior proportio prima priorum ad tertiam, quam prima posteriorum ad tertiam. pag. 727. A
Idem eueniet, si proportio prima ad secundam eadem fuerit, quæ prima ad secundam; at secunda ad tertiam maior, quam secunda ad tertiam: Vel contra, si proportio prima ad secundam fuerit maior, quam prima ad secundam; at secunda ad tertiã eadem, quæ secũda ad tertiam. pag. 728. A
Quod si proportiones priorum magnitudinum minores fuerint: erit quoque ex æqualitate minor proportio prima ad tertiam, quam prima ad tertiam. 729. A
Idem eueniet, si proportio prima ad secundam fuerit eadem, quæ prima ad secundam; at secunda ad tertiam minor, quam secunda ad tertiam: Vel contra, si proportio prima ad secundam fuerit minor, quam prima ad secundam; at proportio secundę ad tertiam eadem, quæ secunda ad tertiam. 729. A
Quod si plures sint magnitudines tribus, siue omnes proportiones in vno ordine magnitudinum sint maiores, vel minores omnibus proportionibus in alio ordine magnitudinum; siue vna tantum maior, quam vna, vel duæ, &c. Erit maior vel minor proportio primæ ad vltimam in vno ordine, quam primæ ad vltimam in alio ordine. 729. A
Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitque maior proportio primæ priorum ad secundam, quam secundæ posteriorum ad tertiam; Item secundæ priorum ad tertiam maior, quam primæ posteriorum ad secundam: Erit quoque ex æqualitate, maior proportio primæ priorum ad tertiam, quã

prima posteriorum ad tertiam. pag. 730.A
Idem eueniet, si proportio primæ priorum ad secundam sit, quæ secũdæ posteriorum ad tertiam; at secundæ priorum ad tertiam maior, quam primæ priorum ad secundam: Vel contra, ratio primę priorum ad secundam maior, quam secundæ posteriorum ad tertiam; at secundæ priorum ad tertiam eadem, quæ prima posteriorum ad secundã. pag. 731.A
Quod si in primis magnitudinibus aliquæ proportiones, vel omnes sint minores; erit minor proportio primæ ad tertiam, quam primæ ad tertiam. 831.A
Quod si plures sint magnitudines quam tres in quolibet ordine: erit quoque maior vel minor proportio primæ ad vltimam, quam primæ ad vltimam. pag. 731.A
Si fuerit maior proportio totius ad totum, quam ablati ad ablatum: Erit & reliqui ad reliquum maior proportio quam totius ad totum. 731.A
Si fuerit minor ratio totius ad totum, quam ablati ad ablatum: Erit etiam minor ratio reliqui ad reliquum, quam totius ad totum. 732.A
Si sint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitque maior ratio primæ priorum ad primam posteriorum, quam secundæ ad secundam; & hæc maior, quam tertiæ ad tertiam, & sic deinceps: Habebunt omnes priores simul ad omnes posteriores simul, maiorem rationem, quam omnes priores, relicta prima, ad omnes posteriores, relicta quoque prima; minorem autem, quam prima priorum ad primam posteriorum; maiorem denique etiam, quam vltima priorum ad vltimam posteriorum. 733.A
Propositis quotcunque magnitudinibus, pportio primæ ad vltimã cõponitur ex omnibus pportionibus intermedijs, vt ex proportione primæ ad secundam, secundæ ad tertiam, &c. 742.A
Si quatuor magnitudines sint Arithmetice proportionales, hoc est, idem excessus sit inter primam & secundam, qui inter tertiam & quartam; hæ vicissim quoque erũt Arithmetice proportionales, hoc est, idem excessus erit inter primam & tertiam, qui inter secundam & quartam. pagina 458.B

MAGNITVDINES rationales, & irrationales. vide. Rationales, & irrationales magnitudines.

MINVTIAE numerorum.

Nullus numerus fractus, aut compositus

positus ex integro & fracto, in se multiplicatus procreat quadratum numerum integrum. pag. 658.A
Duæ minutiæ eundem habentes denominatorem, quarum vnius numerator sit vnitas, eandem proportionem habent, quam numeratores. 240.B
Numerator cuiusuis minutiæ ad denominatorem eandem proportionem habet, quam minutia ad integrum, cuius est minutia. pag. 241.B
Minutia qualibet, pars est numeratoris a denominatore denominata. 242.B
Duæ minutiæ eundem habentes denominatorem, quarum neutra numeratorem habeat vnitatem, eandem proportionem habent, quam numeratores. pag. 243.B
Si duarum minutiarum numerator prioris in denominatorem posterioris, & posterioris numerator in denominatorem prioris ducatur; erit prior minutia ad posteriorem, vt prior numerus productus ad posteriorem. pag. 244.B
Integrum ad summam duarum minutiarum eandem proportionem habet, quam numerus ex multiplicatione mutua denominatorum productus ad summam duorũ productorum, quorum vnus ex numeratore prioris minutiæ in posterioris denominatorem, alter vero ex numeratore posterioris in denominatorem prioris gignitur. 245.B
Si duæ minutiæ eundem habeant numeratorem, erit vt prior minutia ad posteriorem, ita posterioris denominator ad denominatorem prioris. 246.B
Minutiæ, quarum numeratores ad denominatores eandem habent proportionẽ, æquales sunt: Et æqualium minutiarum numeratores ad denominatores eãdem proportionem habent. Cuius autem numerator ad denominatorem habet maiorem proportionem, illa maior est: Et quæ maior est, eius numerator ad denominatorem habet proportionem maiorem. pag. 247.B
Minutiæ, quarum numeratores eandem proportionem habent, quam denominatores, sunt æquales: Et minutiarum æqualium numeratores eandem habent proportionem, quam denominatores. Cuius autem numerator maiorẽ proportionem habet, quam denominator, illa maior est: Et maioris numerator maiorem habet proportionẽ quam denominator. 248.B
Minutia minutię æqualis est minutiæ simplici, cuius numerator ex multiplicatione mutua numeratorum, denominator vero ex mutua denominatorum multiplicatione procreatur. 251.B

Duæ

Duæ minutiæ, quarum numeratores in denominatores vicissim ducti gignunt numeros æquales, æquales sunt: & minutiarum æqualium numeratores in denominatores vicissim ducti gignunt æquales numeros. Cuius vero numerator in denominatorem alterius ductus maiorem numerum gignit, illa maior est: & maioris minutiæ numerator in denominatorem alterius ductus maiorem numerum producit. pag. 255.B

Quando minor numerus per maiorem diuiditur, numerus Quotiens est minutia, cuius numerator est numerus minor diuisus, denominator vero maior numerus diuidens. 258.B

NVMERI proportionales in communi.

Propositis quatuor numeris proportionalibus, sumptisque primi ac tertij æque multiplicibus iuxta quamuis multiplicationem, item secundi & quarti æque multiplicibus iuxta quamcunq; etiã multiplicationem: si multiplex primi maior sit multiplice secundi, erit & multiplex tertij maior multiplice quarti: Et si æqualis, æqualis: Et si minor, minor. pag. 650.A

Propositis quatuor numeris non proportionalibus, ita vt maior sit proportio primi ad secundum, quam tertij ad quartum; si sumantur æque multiplices primi ac tertij, item æque multiplices secundi ac quarti, fieri potest, vt multiplex primi maior sit multiplice secundi, multiplex autem tertij non maior multiplice quarti. 651.A

Propositis quatuor numeris, sumptisque æque multiplicibus primi ac tertij iuxta quamuis multiplicationem, item æque multiplicibus secundi ac quarti iuxta quamuis etiam multiplicationẽ; si multiplice primi existente maiore, quam multiplex secundi, multiplex tertij maior quoque sit necessario, quam multiplex quarti; Et si æqualis, æqualis; Et si minor, minor: Erit eadem proportio primi ad secũdum, quæ tertij ad quartum. 654.A

Propositis quatuor numeris, sumptisque primi ac tertij æque multiplicibus, item secundi & quarti æque multiplicibus; si quando contingat, multiplicẽ primi maiorẽ esse multiplice secundi, multiplicem vero tertij nõ maiorem multiplice quarti: Maior erit proportio primi ad secundum, quam tertij ad quartum. 655.A

Datis tribus terminis Geometrice proportionalibus siue æqualibus, siue inæqualibus: Summa ex primo semel, secundo bis, & tertio semel collecta; ac summa conflata ex secundo et tertio semel; ac tertius semel, sunt etiã Geometrice proportionales. pagina 806. A

Datis tribus terminis siue æqualibus, siue inæqualibus, Geometrice proportionalibus: Summa ex primo bis, secundo bis, & tertio semel collecta; ac summa ex primo, secundo, & tertio semel conflata; ac denique tertius semel, sunt Arithmetice proportionales. 808.A

Datis tribus terminis siue æqualibus, siue inæqualibus, Geometrice proportionalibus: Summa collecta ex primo bis, ex secundo ter, & tertio semel; ac summa conflata ex secundo bis, & tertio semel; & denique summa ex secundo semel, & tertio semel coaceruata, Harmonice proportionales sunt. 809.A

Numerus ex multiplicatione duorum numerorum productus, ita se habet ad alterutrũ multiplicantium, vt alter multiplicantium ad vnitatem. 12.B

Numerus ex diuisione duorum numerorum procreatus ita se habet ad vnitatem, vt diuisus numerus ad diuidentem. 13. B

Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et simul vterque vtriuiq; simul eadẽ pars erit, quæ vnus vnius. 40. B

Idẽ cõuenit numeris fractis. 41. B

Si vnitas numeri pars fuerit, & altera vnitas, vel numerus, alterius numeri eadem pars: Et simul vtraque vnitas, vel vnitas & numerus simul, vtriusque numeri simul eadem pars erit, quæ vnitas numeri. 41.B

Si sint quotcunque numeri quotcũque numerorum æqualium numero, singuli singulorum, eadem pars: Et omnes omniũ simul eadẽ pars erunt, quæ vnus vnius. pag. 42.B

Idẽ numeris fractis cõuenit. 42.B

Si sint quotcũque numeri quotcunque numerorum æqualium numero, singuli singulorum, æque multiplices: quam multiplex est vnius vnus numerus, tam multiplices erũt & omnes omnium. pag. 43. B

Idem verum est de numeris fractis. 44. B

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et simul vterq; vtriusque simul eædem partes erit, quæ vnus vnius. 44. B

Idem locum habet in numeris fractis. 45.B

Si sint quotcũque numeri quotcunque numerorum, singulii singulorum, eadẽ partes: Et omnes omnium simul eadem partes erũt, quæ vnus vnius. 45.B

Si numerus numeri pars fuerit, qualis ablatus ablati: Et reliquus reliqui eadem pars erit qualis totus totius. 45. B

Idem locum habet in numeris fractis. 46. B

Si numerus numeri æque fuerit multi-

multiplex, atq; ablatus ablati: Etiam reliquus reliqui ita multiplex erit, vt totus totius. 46.B
Idem verum est de numeris fractis pag. 46.B
Si numerus numeri partes fuerit, quales ablatus ablati: & reliquus reliqui eædem partes erit, quales totus totius. pag. 47.B
Idem in fractis numeris verum est. 48.B
Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et vicissim quæ pars est, aut partes primus tertij, eadem pars erit, vel eædem partes & secundus quarti. 49. B
In fractis numeris idem cõcludes. pag. 50.B
Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et vicissim quæ partes est primus tertij, aut pars, eædem partes erit & secundus quarti, aut pars. 50.B
Numeris fractis hoc idem conuenit. 51.B
Si fuerit vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum: Et reliquus ad reliquum erit, vt totus ad totum. 51.B
Idem in fractis numeris verum est. 52.B
Si primus secundũ, & tertius quartum, æqualiter contineat, eandemque insuper partem, aut partes; erit secundus primi, & quartus tertij eadem partes. Et si secundus primi, & quartus tertij eadem partes sit; continebit primus secundum, & tertius quartum æqualiter, eandemque insuper partẽ, aut partes. 53.B
Idẽ verum est in numeris fractis, pag. 63.B
Si sint quotcunque numeri proportionales; erit quemadmodum vnus antecedentium ad vnum consequentium, ita omnes antecedẽtes ad omnes cõsequentes. 56.B
Verum quoque hoc est in numeris fractis. 58.B
Si quatuor numeri proportionales sint; Et vicissim proportionales erunt. 58.B
In fractis idem cernitur. 60.B
Si sint quotcunque numeri, & alij illis æquales multitudine, qui bini sumãtur & in eadem ratione: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erũt. pag. 61.B
Idem in numeris fractis verum est. 62.B
Duæ proportiones numerorum, quæ eidem proportioni eadem sunt; inter se quoque sunt eadem. pag. 62.B
Si vnitas numerum quempiam metiatur, æque autem alter numerus alterum quendam numerum metiatur: Et vicissim æque vnitas tertium numerum metietur, & secundus quartum. 63.B
Si numerus duos numeros multiplicans fecerit aliquos: geniti ex ipsis eãdem rationem habebunt, quam multiplicati. 66.B
In fractis numeris idem verum est. 67.B
Si duo numeri numerum quempiam multiplicantes fecerint aliquos: geniti ex ipsis eandem rationẽ habebunt, quam multiplicantes. 67.B
In fractis idem habet locũ. 67.B
Si numerus quotcunque numeros multiplicet, vel quotcunque numeri numerum quempiam multiplicent; habebunt producti numeri easdem rationes, quas numeri multiplicantes. 68.B
Si quatuor numeri sint proportionales; qui ex primo & quarto fit, numerus, æqualis est ei, qui ex secundo & tertio fit, numero. Et si, qui ex primo & quarto fit, numerus, æqualis sit ei, qui ex scdo & tertio fit, numero; ipsi quatuor numeri proportionales erũt. 68.B
Verum est idem in numeris fractis pag. 69.B
Si duo numeri duos numeros eandem, quam illi, habentes rationem multiplicent, antecedens nimirum illorum consequentem horum, & consequens antecedentem; geniti ex ipsis æquales erunt. 69.B
Idẽ cõuenit numeris fractis. 69.B
Si maior sit proportio primi ad secundũ quam tertij ad quartũ; qui ex primo & quarto fit, numerus, maior est eo, qui ex secũdo & tertio fit, numero: Et contra; tã in fractis numeris, quã integris. 70.B
Si tres numeti sint proportionales; qui sub extremis continetur, æqualis est ei, q a medio efficitur: Et si qui sub extremis cõtinetur, æqualis sit ei, qui a medio describitur; ipsi tres numeri proportionales erunt. 71. B
In fractis idem verum est. 72. B
Si maior sit proportio primi ad secũdũ, quã secũdi ad tertiũ; maior fiet numerus ex primo in tertiũ, q̃ ex scdo in se: Et contra, tã in numeris fractis q̃ integris. 72.B
Minimi numeri omniũ eandem cũ eis rationẽ habentiũ, metiuntur æque numeros eandẽ cum eis rationem habentes, maior quidem maiorem, minor vero minorem. 73.B
Si tres numeri sint continuæ proportionales, & primi duo dicantur in sua proportione minimi; metietur primus secundum, & secundus tertium. 74. B
Quotlibet numeri minimi in continuatione suarũ proportionũ, siue eadẽ sint, siue diuersæ proportiones, metiuntur æque totidẽ alios numeros, q̃ easdẽ cũ eis proportiones hẽnt, primus primũ, secũdus scdm, et tertius tertiũ. etc. 74.B
Si sint tres numeri, & alij ipsis multitudine æquales, qui bini

ni sumantur, & in eadem ratione, fuerit autem perturbata eorum proportio: etiã ex æqualitate in eadem ratione erunt. 76.B

Idem verum est in numeris fractis pag. 77.B

Si quatuor numeri tam integri, q̃ fracti, proportionales sint; & conuertendo proportionales erunt. pag. 78.B

Si compositi numeri siue integri, siue fracti, proportionales sint; & diuisi proportionales erũt. 78.B

Si diuisi numeri proportionales sint siue integri, siue fracti; & diuisi proportionales erunt. 79.B

Si compositi numeri tam fracti, q̃ integri, proportionales sint; & per conuersionem rationis proportionales erunt. 79.B

Si primus ad secundum eandem habeat rationem, quam tertius ad quartum: habeat autem & quintus ad secundum eandem rationem quam sextus ad quartum, tam in fractis numeris, quam integris: Etiam compositus primus cum quinto ad secundum eãdem habebit rationem, quam tertius cũ sexto ad quartum. 80.B

Si duo numeri ad duos numeros eãdem habeant rationem; & detracti quidã habeant ad eosdem eandem, tam in numeris fractis, quam integris: Et reliqui ad eosdem eandẽ rationem habebunt. 81.B

Si primus ad secundum eãdem habeat rationem, quã tertius ad quartum; habeat autem & primus ad quintum eãdem, quam tertius ad sextum, tam in integris quam fractis numeris: Etiã primus ad compositũ secundum cum quinto eandem rationẽ habebit, quã tertius ad quartum cum sexto. 81.A

Si quotcunque numeri ad eundem habeant proportiones, quas alij illis multitudine æquales ad quẽdam alium eundem, tam in fractis, quam integris numeris: habebunt quoque omnes illi simul ad eundem, proportionem, quam hi alij omnes simul ad alium illum eundem. Et si idem numerus ad quotcũque numeros proportiones habeat, quas idem alius numerus ad alios multitudine illis æquales: habebit quoque idem numerus ad omnes illos simul proportionẽ, quã idem alius numerus ad hos omnes simul. 82.B

Vltimæ nouem propos. lib. 5. a Campano adiectæ, qua ratione eodẽ modo demonstrentur in numeris improportionalibus. 83.B

Maxima mensura quotlibet numerorum metitur ipsos per numeros minimos eãdem cũ ipsis proportionem habẽtes, pag. 96.B

Si duo numeri multiplicent minimos eandem rationem habentes, maior minorem, & minor maiorem; producetur minimus numerus ab illis numeratus. 98.B

Si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi vero ipsorũ primi inter se sint; ipsi minimi sunt omnium eandem cum eis rationem habentium. 109.B

Si sint quotuis numeri non continuo proportionales, extremi vero ipsorum sint inter se primi; ipsi minimi sunt in continuatione suarum proportionum. 110.B

Si tres numeri sint minimi continue proportionales; extremi quadrati sunt: Si autem quatuor cubi, &c. 112.B

Extremi numeri continue proportionalium quotcũque minimorum primi sunt inter se. pag. 114.& 116.B

Duo numeri minimi in sua proportione metiũtur omnes medios quotcũque minimorum in eadem ratione. 114.B

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem secundum non metiatur; neque alius quisquam vllum metietur. 123.B

Si sint quotcũque numeri deinceps proportionales, primus autem secundi non sit multiplex; neque alius quisquã vllius multiplex erit. 124.B

Si sint quotcũque numeri deinceps proportionales, primus vero secũdum metiatur; & quicunque alius quemlibet sequentium metietur: Si primus autem secundi sit multiplex; & quicunq; alius cuiuslibet sequentiũ multiplex erit. 125.B

Si sint quotcũque numeri deinceps proportionales, primus autẽ, vel alius quisquam nullum a secundo metiatur, neq; primus secundum metietur. Et si primus vel alius quisquam nullius a secundo sit multiplex; neque primus secundi multiplex erit. 126.B

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem extremum metiatur; is etiam metietur secundum. pag. 126.B

Si sint quotcũque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quisquam quemlibet a secundo metiatur; metietur & primus secundum. Et si primus, vel alius quisquam cuiuslibet a secundo sit multiplex; primus quoque secundi multiplex erit. 127.B

Si inter duos numeros medij cõnua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadũt numeri, tot & inter alios eandem cum illis habentes rationem medij continua proportione cadent. 127.B

Inter duos numeros duplæ, triplæ, aut quintuplæ proportionis, vel superparticularis, vel superbipartientis non potest cadere medius

dius numerus proportionalis. pag. 129. & 130. B
Item neque inter duos numeros sola vnitate, aut binario differentes. 129. B
Ex quo fit, neque Diapason, neq; Tonum in Musicis diuidi posse bifariam. 130. B
Si duo numeri sint inter se primi, & inter eos medij continua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadũt numeri, totidẽ inter vtrumque eorum, & vnitatẽ medij continua proportione cadẽt. pag. 133. B
Si numerus seipsum multiplicans fecerit aliquem, & rursum multiplicet productum, &c. omnes producti sunt continue proportionales ab vnitate. 132. B
Si inter duos numeros & vnitatem cõtinue proportionales ceciderint numeri; quot inter utrumque ipsorum, & unitatem deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipsos medij continua proportione cadent. 133. B
Si quotquot numeri sint ab vnitate continue proportionales, secundus ab vnitate in se multiplicatus producet tertium, & ex eodem in hunc fiet quartus, & sic deinceps. 135. B
Si sint ab vnitate duo ordines numerorum continue proportionalium, & multitudine aqualiũ; habebunt tertij ab vnitate proportionem duplicatam eius, quã habent secũdi ab vnitate; quarti vero eiusdem triplicatam, & quinti quadruplicatam; & sem per deinceps vno amplius. 135. B
Si sint ab aliquo numero eodẽ duo ordines numerorum cõtinue proportionalium, & multitudine equalium; habebunt tertij ab illo numero proportionem duplicatam eius, quam habent secundi ab eodem; quarti vero eiusdem triplicatam, &c. 136. B
Si inter duos numeros, & aliquem alium numerum assumptum, cõtinue proportionales ceciderint numeri; quot inter vtrumque ipsorum, et assumptũ deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipsos medij continua proportione cadent. 138. B
Si sint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quisque seipsum faciat aliquos; qui ab illis producti fuerint, proportionales erunt: Et si numeri primũ positi multiplicantes iam factos fecerint aliquos; ipsi quoque proportionales erunt: Et sem per circa extremos hoc eueniet. 143. B
Primi autẽ numeri producti sunt in duplicata rõne ꝓportionis datorũ numerorum: & secũdo loco geniti in triplicata. &c. 145. B

Si ab

Si ab vnitate quotcunque numeri sint deinceps proportionales; minor quicunque maiorẽ quẽlibet metitur per aliquem eorum, qui in proportionalibus sunt numeris. 186. B
In numeris ab vnitate cõtinue proportionalibus, quantũ abest maior quilibet a minore quouis eũ metiente, tantum ab vnitate distat numerus, per quem minor maiorem metitur. Item quilibet numerus seipsum multiplicans, producit numerum tantũ ab eo distantem, quantum ipse ab vnitate abest: Si vero minor aliquis maiorem quempiam multiplicet, procreatur numerus tantum a maiore distans, quantum minor ab vnitate. 187. B
Si ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales sint; quicunque primorum numerorum ultimum metiũtur, iidem & eum, qui vnitati proximus est, metientur. 188. B
Itaque neque vllus numerus primus, qui maior sit eo, qui proximus est vnitati, neque vllus minor proximum vnitati non metiẽs, metiri potest ultimũ. 190. B
Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales sint, qui uero post unitatem, primus sit; Maximum nullus alius metietur, prẽter eos, qui sunt in numeris proportionalibus. 191. B.
Si quotcunq; numeri continue proportionales, sint minimi omniũ eãdem rationem habentiũ cum ipsis; Numerus aliquem eorum metiens, metietur quoque alterum duorum numeroriũ, qui in eadem rõne sunt minimi; vel certe ad alterũ erit cõpositus. 194. B
Si tres numeri sint deinceps ꝓportionales, & minimi omnium eãdem cum ipsis rationem habẽtium; Duo quilibet simul, ad reliquũ primi erunt pag. 205. A
Si quotcũque numeri deinceps proportionales, sint minimi omniũ eandem cum illis rationem habentium; ad quemlibet eorum reliqui omnes simul collecti, erunt primi. 207. B
Si duo numeri, primi inter se fuerint; non erit ut primus ad secundum, ita secundus ad alium quempiam. 209. B
Si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi autem ipsorum primi inter se sint; non erit ut primus ad secũdum, ita ultimus ad alium quempiam. 209. B
Si sint quotcunque numeri deinceps ꝓportionales, detrahãtur, aũt a secundo, & ultimo æquales ipsi primo; Erit ut se cũdi excessus ad primum, ita ultimi excessus ad omnes ipsum antecedentes. 229. B
Quolibet numero per duos quosuis numeros diuiso, erunt duo hi numeri Quotientibus,

conuerſo ordine proportionales. pag. 234.B

Quolibet numero per quotuis numeros diuiſo, erunt bini numeri diuidentes binis Quotiẽtibus reſpondentibus cõuerſo ordine proportionales. 234.B

Quolibet numero per quotuis numeros continue proportionales diuiſo, erunt Quottentes conuerſo ordine in eadem proportione continue proportionales. 235. B

Si ſint quotuis numeri quicunque, & totidem alij in eiſdem proportionibus; erit vt ſumma priorũ ad quemlibet eorũ, ita ſumma poſteriorum ad eum, qui illi in poſterioribus reſpondet. 235.B

Si ſint quotuis numeri quicunque, & totidem alij in eiſdem proportionibus; ſumma priorum per ipſos diuiſa ſigillatim, faciet eoſdẽ prorſus Quotientes, quos ſumma priorum per ipſos diuiſa facit. 236. B

Si ſumma quotuis numerorum continue proportionalium per eos ſigillatim diuidatur; & quotientum ſumma per ipſos Quotientes; Et horum ſecundorum Quotientum ſumma per eoſdem ſecundos Quotientes, & ſic deinceps in infinitum, procreabuntur alternis ſemper iidẽ primi Quotientes ordine conuerſo. 237. B

Si ſumma quotuis numerorum continue proportionalium per eos ſigillatim diuidatur; erit ſumma omnium quotiẽtum æqualis numero, qui gignitur ex multiplicatione primi in vltimum, vel ex mutua multiplicatione quorumlibet duorum mediorum ab extremis æqualiter diſtantium, vel denique (ſi quotientum numerus fuerit impar) ex multiplicatione medij Quotientis in ſe. pag. 238.B

Itaque quando numerus terminorum eſt impar, ſumma Quotientum eſt numerus quadratus, cuius radix eſt medius Quotiens. pag. 238.B

Proportionum compoſitio, de qua Euclides defin. 10. lib. 5. & definit. 5. lib. 6. non eſt vere additio proportionum, vt plerique falſo exiſtimant. 273. B

Additio proportionum, ſubtractio, multiplicatio, atq; diuiſio, quomodo fiant. 275. B

NVMERVS fractus, vide, Minutiæ numerorum.

NVMERVS Par, Impar, Primus, Pariter par, Pariter par & impariter: Pariter impar, Perfectus.

Numeros, quotquot iuſſerit quis, qui inter ſe multiplicati datum numerũ gignãt, repire. 749. A

Numero per numerum diuiſo, diuiſus numerus gignitur ex multiplicatione numeri per diuiſionẽ inuenti in numerum diuidentem. 33.B

Si

Si duobus numeris inæqualibus datis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadã detractione, neque reliquus vnquam metiatur præcedentem, qnoad aſſumpta ſit vnitas: qui principio dati ſunt numeri, primi inter ſe erunt. pag. 32. B

Si duobus numeris inter ſe primis datis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione: nũquam reliquus metietur præcedentem, quoad aſſumpta ſit vnitas. 33.B

Si datis duobus numeris inter ſe cõpoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione: detractio ad vnitatẽ vſque non perueniet, ſed ad numerum, qui præcedentem detractum metiatur. 34.B

Numerus duos numeros metiens: metitur quoque maximam eorundem menſuram. pag. 36. B

Numerus tres numeros metiẽs, uel plures; metitur etiam maximam eorũ menſuram communem. 38. B

Omnis numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars eſt, aut partes. 39. B

Si duo numeri mutuo ſe multiplicantes fecerint aliquos: geniti ex ipſis æquales inter ſe erunt. 64.B

Idem in fractis numeris concludes pag. 65.B

Si duo numeri ſe mutuo multiplicauerint; procreabitur vnus, idemque numerus. 65.B

Verum hoc etiam eſt in numeris fractis. 66. B

Primi inter ſe numeri, minimi ſunt omnium eãdem cum eis rationem habentium. 84.B

Minimi numeri omnium eandem eum eis rationem habentium, primi inter ſe ſunt. pag. 84. B

Quotcunque numeri inter ſe primi, minimi ſunt in continuatione ſuarum proportionũ. Et quotcunque numeri in continuatione ſuarum proportionum minimi, ſunt inter ſe primi. 85.B

Si duo numeri primi inter ſe fuerint; qui unum eorum metitur numerus, ad reliquum primus erit. 86.B

Si duo numeri ad quempiam primi fuerint; etiam ex illis genitus ad eundem primus erit. pag. 87.B

Si duo numeri primi inter ſe fuerint: Etiam ex vno eorum genitus ad reliquum primus erit. 88. B

Si duo numeri ad duos numeros, uterque ad utrumque, primi fuerint: Et qui ex eis gignẽtur primi inter ſe erũt. pag. 88. B

Si duo numeri primi inter ſe fuerint; & multiplicans uterque ſe ipſum fecerit aliquẽ; Et geniti ex ipſis primi inter

se erunt: Et si, qui in principio, genitos ipsos multiplicãtes fecerint aliquos; Et hi quoque primi inter se erunt: Et semp circa extremos hoc eueniet. 89.B

Si duo numeri primi inter se fuerint; etiam vterque simul ad quemlibet illorũ primus erit. Et si vterque simul ad vnum illorum primus fuerit; etiam qui in principio, numeri primi inter se erunt. 90.B

Numerus, qui ex duobus compositus ad vnum illorum primus est, ad reliquum quoque primus erit. 91.B

Omnis primus numerus, ad omnem numerum, quem non metitur, primus est. pagina 91.B

Si duo numeri se mutuo multiplicantes fecerint aliquem; genitum autẽ ex ipsis metiatur aliquis primus numerus: is etiam vnum eorum, qui in principio, metietur. 92. B

Si duo numeri se mutuo multiplicantes fecerint aliquem: genitum autem ex ipsis metiatur aliquis non primus numerus, vel certe ad ipsum sit compositus: is etiam ad vnum eorum, qui in principio, compositus erit. pag. 93. B

Omnem compositum numerũ, aliquis primus numerus metitur. 93. B

Omnis numerus aut primus est, aut eum aliquis primus metitur. 94. B

Si duo numeri numerum quẽpiam metiantur: Etiam minimus, quẽ illi metiuntur, eundem metietur. 99.B

Si tres numeri numerum quempiam metiantur; Etiam minimus ab eis numeratus eũdem metietur. 101.B

Idem eueniet in pluribus numeris. pag. 102.B

Si numerum quispiam numerus metiatur; ille, quem metitur, partem habebit a metiente denominatam. 102. B

Si numerus partem habuerit quamlibet; metietur illum numerus a parte denominatus. pag. 103.B

Minimus numerus, quem quotlibet numeri metiũtur; minimus est habens partes a numeris metientibus denominatas. 104.B

Datis quotlibet numeris, idem semper numerus procreabitur ex eorũ mutua multiplicatione, quomodocunq; ordinem inter se permutent. 155.B

Si minimum numerum primi numeri metiantur; Nullus alius numerus primus illum metietur, præter eos, qui a principio metiebantur. 193. B

Demonstratio priorum 10. propositionum lib. 2. in numeris. pagina 196. B

Nullus numerus ita dimidi potest, vt productus ex toto in vnam partem, sit æqualis quadrato alterius partis. 204. & pag. 222. B

Primi numeri plures sunt, omni proposita multitudine primorum numerorum. 215.B

Si pares numeri quotcũq; componantur; totus par erit. pag. 216.B

Si impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipsorũ sit par, totus par erit. 217. B

Si impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipsorum sit impar, & totus impar erit. 217. B

Impar numerus pari numero, vel pluribus paribus additus, facit imparem. 218.B

Si a pari numero par detrahatur; & reliquus par erit. pagina 218. B

Si a pari numero impar detrahatur; & reliquus impar erit. pag. 219. B

Si ab impari numero impar detrahatur; reliquus par erit. pag. 219. B

Si ab impari numero par detrahatur; reliquus impar erit. pag. 220. B

Si impar numerus parem multiplicans fecerit aliquem; factus par erit. 220. B

Si par numerus parem multiplicãs fecerit aliquem; factus par erit pag. 220. B

Par in se multiplicatus facit parem. 221. B

Si impar numerus imparem numerum multiplicans fecerit aliquem; factus impar erit. pag. 221. B

Impar numerus in se multiplicatus gignit imparem. 221. B

Numerus impar numerum parem metiens, per numerũ parem eum metitur. 222. B

Numerus impar numerum imparem metiens, per numerum imparem eum metitur. 222. B

Si impar numerus parem numerum metiatur; & illius dimidium metietur. 223. B

Si impar numerus ad aliquẽ numerum primus sit; & ad illius duplum primus erit. 224. B

Immo & ad quadruplum, octuplũ, sedecuplum, & sic deinceps in proportione dupla. 225. B

Numerorum a binario duplorũ vnusquisque parirer par est tantum. 225. B

Si numerus dimidiũ habeat imparem; pariter impar est tantum. 226.B

Si par numerus neque a binario duplus sit, neque dimidium habeat imparem; pariter par est, & pariter impar. 228.B

Si ab vnitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione, quoad totus compositus fiat primus; & totus hic in vltimum multiplicetur: Factus erit Perfectus. pag. 231. B

NVMERVS Planus, Solidus, Quadratus, Cubus, similes plani, ac solidi numeri.

Nullus numerus compositus ex integro & fracto, vel numerus fractus in se multiplicatus procreat numerum quadratū integrum. pag. 638.A

Plani numeri rationem inter se habent ex lateribus compositam. 121. B

Duorum quadratorum numerorum unus medius est proportionalis numerus: Et quadratus ad quadratum duplicatā habet lateris ad latus rationem. 140.B

Medio proportionali cadente inter duos quadratos; erit is ad vtrumuis quadratorum compositus. 141.B

Duorum cuborum numerorum duo medij proportionales sunt numeri: Et cubus ad cubum triplicatam habet lateris ad latus rationem. 141.B

Duobus medijs proportionalibus cadentibus inter duos cubos; erunt ij, & vterlibet cuborum inter se compositi. 142.B

Si quadratus numerus quadratū numerū metiatur; & latus unius metietur latus alteri⁹. Et si vnius quadrati latus metiat latus alterius; & quadratus quadratū metietur, 146.B

Si cubus numerus cubū numerum metiatur; & latus unius metietur latus alterius. Et si latus unius cubi latus alterius metiatur; & cubus cubū metietur. 147.B

Si quadratus numerus quadratum numerum non metiatur; neque latus unius metietur latus alterius. Et si latus unius quadrati non metiatur latus alterius; neq; quadratus quadratum metietur. 148.B

Si cubus numerus cubum numerum non metiatur; neque latus unius latus alterius metietur. Et si latus cubi unius latus alterius nō metiat; neq; cubus cubum metietur 149.B

Si quadratus numerus quadrati numeri, & cubus cubi, sit multiplex; & vnius latus lateris alterius multiplex erit. Et si vnius quadrati, & cubi latus lateris alterius sit multiplex; & quadratus quadrati, & cubus cubi multiplex erit. Si vero quadratus quadrati, & cubus cubi non sit multiplex; neque latus lateris multiplex erit. Et si latus lateris nō sit multiplex; neq; quadratus quadrati, neq; cubus cubi erit multiplex. 149.B

Duorum similium planorum numerorum unus medius proportionalis est numerus: Et planus ad planū duplicatam habet lateris homologi ad latus homologum rationem, pag. 150.B

Medius numerus proportionalis inter duos planos similes, ad vtrūlibet compositus est. 151.B

Duorum similium solidorū numerorum duo medij proportionales sunt numeri: Et solidus ad solidum triplicatam rationē habet lateris homologi ad latus homologum. pag. 152.B

Duo numeri medij proportionales inter duos solidos similes, et uterque solidorum, sunt compositi inter se. 153.B

Si inter duos numeros vnus medius proportionalis cadat numerus; similes plani erunt illi numeri. 158.B

Si inter duos numeros duo medij proportionales cadant numeri; similes solidi sunt illi numeri. 159 B

Si tres numeri deinceps sint proportionales, primus autem sit quadratus; Et tertius quadratus erit. 161.B

Si quatuor numeri deinceps sint proportionales, primus autē sit cubus; Et quartus cubus erit. 161. B

Si duo numeri rationem habeāt inter se, quam quadratus ad quadratum, primus autem sit quadratus; & secundus quadratus erit. 165.B

Proportio quadrati numeri ad non quadratum exhiberi non potest in duobus numeris quadratis. pag. 165.B

Duo numeri in quintupla proportione proportionem non habent, quam quadratus ad quadratū. pag. 166.B

Si duo numeri rationem inter se habeant, quā cubus ad cubum, primus autem sit cubus; & secundus cubus erit. 166.B

Proportio cubi ad non cubum, reperiri non potest in duobus numeris cubis. 167.B

Similes plani numeri rationem inter se habent, quam quadratus ad quadratum. 167.B

Numeri proportionem habentes, quam quadratus ad quadratū, similes plani sunt. 168.B

Similes solidi numeri rationem habent inter se, quam cubus ad cubum. 168.B

Numeri proportionem habentes, quam cubus ad cubum, similes solidi sunt. 169. B

Nulli numeri habentes duplā proportionem, vel superparticularē, vel superbipartientem: vel duo numeri primi, vel primi inter se, quāuis neuter primus sit, dummodo quadrati nō sint, aut cubi; similes plani sunt, aut solidi. 169.B

Si sint duo numeri plani, aut solidi similes, sitque minor primus; metietur minor maiorem. 170.B

Duo numeri inter se primi, quorum minor primus sit, nō possunt esse plani, vel solidi similes. pag. 171.B

Si duo similes plani numeri multiplicantes se mutuo faciant

quendam; productus quadratus erit. 173.B
Si duo numeri se mutuo multiplicantes faciãt quadratum; similes plani erunt. 174.B.
Duo numeri quadrati se mutuo multiplicantes producunt quadratum. 174.B
Si duo numeri se mutuo multiplicantes faciant quadratum, alter autem sit quadratus; Et reliquus quadratus erit. 175.B
Si duo numeri se mutuo multiplicantes faciant non quadratum, alter autem sit quadratus, reliquus nõ quadratus erit. 175.B
Quadratus multiplicans non quadratum producit non quadratum. 175.B
Si cubus numerus seipsum multiplicans procreet aliquem; productus cubus erit. 176.B
Si cubus numerus cubum numerum multiplicans faciat aliquem; factus cubus erit. pag. 177.B
Si cubus numerus numerũ quendam multiplicans faciat cubum; Et multiplicatus cubus erit. 177.B
Cubus non cubum multiplicans facit non cubum. 178.B
Si cubus numerum quendam multiplicans faciat non cubum; Et multiplicatus non cubus erit. pag. 178.B
Si numerus seipsum multiplicans faciat cubum; Et ipse cubus erit. 178.B
Si compositus numerus numerũ aliquem multiplicans quempiam faciat; Factus solidus pag. 179.B
Si ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales sint; tertius quidem ab vnitate quadratus est, & vnum intermittentes omnes; quartus autem est cubus, & duos intermittentes omnes; septimus vero cubus simul, & quadratus, & quinque intermittentes omnes. 179.B
Si sint quotcunque numeri ab vnitate continue proportionales, omnes positi in locis imparibus, nimirum in tertio, quinto, septimo, &c. sunt quadrati. Omnes autem, qui sequuntur proxime positos in locis, tertio, sexto, nono, & alijs, quæ ternarius metitur, cuiusmodi sunt numeri, quartus, septimus, decimus, &c. sunt cubi. Omnes vero, qui proxime sequuntur positos in locis, sexto, duodecimo, decimooctauo, & alijs, quæ metitur senarius, quales sunt, septimus, tertiusdecimus, decimusnonus, &c. sunt cubi simul & quadrati. 181.B
Si ab vnitate quotcunque numeri sint deinceps proportionales, qui vero post vnitatem, sit quadratus; Et reliqui omnes quadrati erunt. At si qui post vnitatem, sit cubus; & reliqui omnes cubi erunt. pag. 181.B
Si ab vnitate quotcunque numeri deinceps sint proportionales, qui vero post vnitatem, non sit quadratus, neque alius vllus quadratus erit, præter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes omnes. At si, qui post vnitatem, non sit cubus; neque alius vllus cubus erit, præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes. pag. 184.B
Quando in numeris ab vnitate proportionalibus continue, qui post vnitatem, non est cubus simul & quadratus; non necesse est, nullum alium esse quadratum simul & cubum, præter septimum ab vnitate, & quinq; intermittentes omnes: quia aliquando etiam quartus, est quadratus simul ac cubus, non existente primo ab vnitate quadrato ac cubo simul. 185.B

OBTVSANGVLVM triangulum. vide. Triangulum.

PARALLELAE lineæ. vide. Recta linea.

PARALLELEPIPEDVM, & aliæ figuræ solidæ non Regulares, ac plana parallela.

Si in planis parallelis duo anguli sint æquales, & linea vna vnius, lineæ vni alterius parallelæ; erit quoque altera linea alteri lineæ parallela, si modo ductæ sint ex eadem parte plani per priores parallelas ducti. pag. 559.B
Ad quę plana, eadem recta linea recta est; illa sunt parallela. 563.B.
Si sint duo plana parallela; recta linea, quæ ad vnum eorum recta est, ad reliquum quoque recta erit. 563.B
Si duæ rectæ se mutuo tangentes, ad duas rectas se mutuo tangentes sint parallelæ, non in eodem consistentes plano; Parallela sunt, quæ per illa ducuntur, plana. 564.B
Si duo plana parallela plano quopiam secentur; communes illorum sectiones sunt parallelæ. 566.B
Quæ eidem plano parallela, & inter se sunt parallela; vel si conueniunt, vnum planum efficiẽt. pag. 567.B
Duo plana ad idem planum recta, in quo faciant communes sectiones parallelas, parallela sunt: Et duorum planorũ parallelorum, si vnum cuipiam plano ad rectos sit angulos, erit & alterum ad idem rectum. 571.B
Si solidum parallelis planis contineatur; aduersa illius plana parallelogramma sunt similia, & æqualia. 584.B
Si solidum parallelepipedũ plano secetur per diagonios aduerso-

uersorum planorum; bifariã secabitur solidum ab ipso plano. 593.B

Solida parallelepipeda super eãdem basim constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes lineę in ijsdem collocãtur rectis lineis, sunt inter se æqualia. 594.B

Solida parallelepipeda super eãdem basim constituta, & in eadem altitudine, quorũ insistentes lineæ non in ijsdẽ collocantur rectis lineis, inter se sunt æqualia. 596.B

Solida parallelepipeda æqualia super eandem basim, siue insistentes lineæ in eisdem collocentur rectis, siue non; in eadem sunt altitudine. 597.B

Solida parallelepipeda super æquales bases cõstituta, & in eadẽ altitudine; æqualia sunt inter se. 598.B

Solida parallelepipeda æqualia super æquales bases, in eadem sunt altitudine. Et parallelepipeda æqualia in eadem altitudine, super æquales sunt bases, si non habuerint eandem basim. 601.B

Hæc quinque, quæ proxime dicta sunt de parallelepipedis, conuenient etiam in prismata, in quibus duo plana opposita sunt triãgula. 608.B

Si solidi parallelepipedi eorum, quę ex aduerso, planorũ latera bifariam secta sint; per sectiones autem plana sint extensa: Communis sectio planorum, & solidi parallelepipedi diameter, bifariã se mutuo secabunt. 617.B

In omni prallelepipedo diametri se mutuo bifariã diuidunt in vno puncto. 618.B

Si solidum parallelepipedum plano secetur per centrum; bifariam secabitur solidum ab ipso plano. Et si solidum parallelepipedum plano secetur bifariam, per centrum transibit ipsum planum. pag. 619.B

Si fuerint duo prismata planorum triangularium oppositorum æqualis altitudinis, quorum hoc quidẽ basim habeat, triangulum, illud vero, parallelogrammum, duplum autẽ fuerit parallelogrãmũ trianguli; Aequalia erunt ipsa prismata. 623.

Omnis pyramis triangularem habẽs basim diuiditur in duas pyramides æquales & similes inter se, triangulares habentes bases, & similes toti; Et in duo prismata æqualia, quæ duo prismata maiora sunt dimidio totius pyramidis. pagina 630.B

Si fuerint duę pyramides eiusdẽ altitudinis, triangulares habentes bases; sit autem illarũ vtraque diuisa & in duas pyramidas æquales inter se, & similes toti; & in duo prismata æqualia; Ac eodem modo diuisa

diuisa sit vtraque pyramidũ, quæ ex superiore diuisione natæ sunt, idq; semper fiat: Erit vt vnius pyramidis basis ad alterius pyramidis basim, ita & omnia, quæ in vna pyramide, prismata ad omnia, quæ in altera pyramide, prismata multitudine æqualia. 633.B

Pyramides eiusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases triangulares, sunt inter se æquales. 637.B

Pyramides triãgulares æquales super eandem, vel æquales bases, eandem habent altitudinem. Et pyramides triangulares æquales, eiusdẽ q; altitudinis, habent bases æquales, vel eandẽ. 637.B

Pyramides eiusdem altitudinis super æquales bases quascunque, vel eandem, sunt inter se æquales. 641.B

Pyramides multangulæ æquales, et super æquales bases, vel super eandem; habent eandem altitudinem. Et pyramides multangulæ æquales, eandemque habentes altitudinem; bases habent æquales, vel eandem. 641.B

Omne prisma triãgularẽ habẽs basim, diuiditur in tres pyramides æquales inter se, triangulares bases habẽtes. 642.B

Prismata eiusdẽ altitudinis super eandẽ, vel æquales bases quascunq;, inter se sunt æqualia. Et prismata æqualia super æquales bases, vel eandẽ, in eadem sunt altitudine. Et prismata æqualia eiusdẽ altitudinis, bases habent æquales, vel eandem. 645.B

Quæ de prismatis dicta sunt, intelligi debent de ijs, qua habent plana opposita basibus æqualia & similia. 646.B

Omnis conus tertia pars est cylindri eãdem cum ipso basim habentis, & altitudinem ęqualem. 654.B

Atque hoc verum est, siue coni & cylindri sint recti, siue scaleni, licet non sit idem axis conorũ, & cylindrorum. 658.B

Coni & cylindri eiusdem altitudinis super eandem, vel ęquales bases cõstituti, siue ambo sint recti, vel scaleni, siue vnus rectus, & alter scalenus, inter se sunt ęquales. 661.B

Coni & cylindri æquales super eandem vel æquales bases, in eadem sunt altitudine. Et coni ac cylindri æquales in eadem altitudine, super ęquales bases sunt, vel eandem. 661.B

Si in planis parallelis descripti sint duo circuli, in quibus duæ rectæ abscindãt arcus similes; erũt duę rectæ coniũgẽtes extrema vnius rectæ cũ cẽtro, parallelę duabus rectis, quæ extrema alterius rectæ cũ centro coniungũt. 919.B

PARALLELOGRAMMVM, & aliæ figuræ planæ quadrilateræ.

Parallelogrammi cuiusq; æqua

lia

lia sunt & latera opposita, & anguli oppositi, atque ipsum diameter secat bifariã. 177.A
Quadrilaterum habens latera opposita æqualia, parallelogrammum est. 178.A
Quadrilaterum habens angulos oppositos æquales, parallelogrammum est. 179.A
Rhombus, & Rhomboides, parallelogramma sunt. 179.A
Quadratũ, & altera parte lõgius, parallelogramma sunt. 179.A
Quadrilaterum diuisum bifariã ab vna diametro, non semper est parallelogramum. 179.A
Quadrilaterum habens omnes angulos rectos, est parallelogrammum. 180.A
Quadrati, & Rhombi angulos secat diameter qualibet bifariã. pag. 180.A
Rhomboidis, & altera parte longioris angulos secat diameter non bifariam. 181.A
Quadrati, & altera parte longioris diametri sũt æquales. 181.A
Rhombi, & Rhomboidis diametri non sunt æquales. 181.A
Parallelogrammi cuiusque diametri se mutuo secant bifariam. pag. 182.A
Quadrilaterum, in quo diametri se mutuo bifariam secant, parallelogramum est. 182.A
Parallelogrammum bifariam diuiditur a recta, quæ diametrum bifariam secat: Et recta diuidens parallelogrammum bifariam, secat diametrum quoque bifariam. 183.A
Parallelogramma super eadem basi, & in eisdẽ parallelis constituta sunt æqualia. 190.A
Parallelogrãma æqualia super eandem basim, ad easdemque partes constituta, sunt inter easdem parallelas. 192.A
Parallelogramma super æqualibus basibus, & in eisdem parallelis constituta, sunt æqualia. 193.A
Parallelogramma æqualia super bases æquales, & ad easdẽ partes constituta, in eisdem sunt parallelis: Et parallelogramma æqualia in eisdem parallelis, si non habuerint eandem basim, super æquales bases sunt constituta. 193.A
Parallelogrammorum inter easdẽ parallelas, quod maiorem basim habet, maius est: Et quod maius est, maiorem habet basim. 194.A
Quadrilaterum, quod ab vtraque diametro diuiditur bifariam, parallelogrammum est. 201.A
Trapezia in eisdem parallelis, & super eadem basi, quorum opposita bases sunt æquales, sunt æqualia. Et trapezia æqualia in eisdem parallelis, & super eadẽ basi, habent bases oppositas æquales. 204.A
Trapeziorum in eisdem parallelis, & super eadem basi, quod maiorem habet basim oppositam, maius est: Et quod maius est, habet basim oppositam maiorẽ. 205.A
Trapezia in eisdem parallelis, & super æqualibus basibus, quorũ opposita bases sint æquales, æqualia sunt. Et trapezia æqualia in eisdem parallelis, & super æqualibus basibus, habent bases oppositas æquales. 205.A
Trapeziorum in eisdem parallelis, et super æqualibus basibus, quod maiorem habet oppositã basim, maius est: Et quod maius est, maiorem habet basim oppositã. pag. 206.A
Parallelogrammum duplum est trianguli eandem cum eo basim habentis, & in eisdem parallelis constituti. 213.A
Parallelogrammũ æquale est triãgulo duplam habenti basim, & in eisdem parallelis constituto. pag. 214.A
Parallelogrammũ duplum est triãguli æqualem cum eo basim habentis, & in eisdem parallelis constituti. 214.A
Si parallelogrammum duplum fuerit trianguli, eandemque habuerint basim, vel æquales, & ad easdem partes constituta; in eisdem erunt parallelis: Et si parallelogrammum duplũ fuerit triãguli, in eisdemque parallelis; erunt bases æquales, si non sit eadem. 215.A
Si trapezium & triangulum super eadẽ basi, & in eisdem fuerint parallelis, maior autem linea parallela trapezij, sit basis triãguli; erit trapezium minus duplo trianguli: Si vero minor linea parallela trapezij basis sit trianguli; erit trapeziũ maius duplo trianguli. 216.A
Trapezium habens duo latera opposita parallela, duplum est triãguli, quod basim habet unum latus trapezij coniungens duas parallelas, verticem vero in medio pũcto lateris oppositi. 217.A
In parallelogrammo, complementa circa diametrum æqualia sunt. 219.A
Si parallelogrammo diuiso in quatuor parallelogramma, duo aduersa sint æqualia, cõsistent reliqua duo circa diametrũ. 220.A
Quadrata linearum æqualiũ sunt æqualia: Et quadratorum æqualium æquales sunt lineæ. 227.A
Quadratum ex diametro quadrati descriptum, duplum est ipsius quadrati. 235.A
Quadratum diametri figuræ alterapte lõgioris, æquale est duobus quadratis laterum inæqualium. 235.A
Parallelogrammũ, cuius vnus tantum angulus detur rectus, habet omnes angulos rectos. 250.A
Rectangulũ quodcunq; æquale est alteri rectangulo sub duabus rectis contento, quæ duobus lateribus illius sint æquales. 251.A
Parallelogramma circa diametrum quadrati, sunt quadrata. pag. 263.A

Quadratum cuiusque rectæ quadruplum est quadrati rectæ, cuius illa dupla est. Et si quadratum quadrati sit quadruplum, latus lateris duplum est. 264. & 821. A

Parallelogrammum ad rectam applicatum deficiens quadrato, æquale est rectangulo sub segmentis per applicationem factis comprehenso. 848. A

PAR, & impar numerus. vide. Numerus par, &c.

PARITER par, pariter par & impariter, ac pariter impar. vide. Numerus par, &c.

PERFECTVS numerus. vide. Numerus par, &c.

PERPENDICVLARIS linea. vide. Recta linea.

PLANA figura intra, & extra circulum, atq; aliam figuram. vide. Figura intra & extra circulum, &c.

PLANAE figuræ quadrilateræ. vide. Parallelogrammum, &c.

PLANA parallela. vide. Parallelepipedum, &c.

PLANI numeri similes. vide. Numerus planus, Solidus, Quadratus, &c.

PLANVS angulus. vide. Angulus.

PLANVS numerus. vide. Numerus planus.

PORTIO circuli. vide. Circulus.

PRIMI inter se numeri. vide. Numerus par, &c.

PRIMVS numerus. vide. Numerus par, &c.

PRISMA. vide. Parallelepipedum, &c.

PROPORTIO Figurarũ, Angulorum, & Linearum. vide. Figuræ, Anguli, & lineæ proportionales.

PROPORTIO magnitudinum in communi. vide. Magnitudines proportionales in communi.

PROPORTIONALES Magnitudines in communi. vide. Magnitudines proportionales in communi.

PROPORTIONALES numeri in communi. vide. Numeri Proportionales in cõmuni.

PRO-

PROPORTIO numerorum in communi. vide. Numeri proportionales in communi.

PYRAMIS. vide. Parallelepipedum, &c.

QVADRATVM. vide. Parallelogrammum, &c.

QVADRATVS numerus. vide. Numerus Planus, Solidus, &c.

QVADRILATERAE figuræ planæ. vide. Parallelogrammum.

RATIONALES, & Irrationales magnitudines.

Omnes Rationales lineæ non solum expositæ Rationali, sed etiam inter se sunt commensurabiles, pag. 343. B

Spatium Rationali spatio commensurabile, & ipsum Rationale est. 345. B

Quod sub Rationalibus longitudine commẽsurabilibus rectis (quomodocunque cõmensurabiles sint expositę Rationali) cõtinetur rectangulum; Rationale est. 345. B

Si Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinem efficit Rationalẽ, & ei, ad quam applicatum est, longitudine cõmensurabilem. 346. B

Quod sub Rationalibus potentia solum commẽsurabilibus rectis continetur rectangulũ, Irrationale est: Et recta ipsum potens, Irrationalis. Vocetur autem Media. 351. B

Recta media proportionalis inter duas Rationales potentia tantũ commensurabiles, Irrationalis est, quæ vocatur Media. 352. B

Rectangulum sub duabus Rõnalibus potentia tantum commensurabilibus contentum, Medium dici potest. 352. B

Non omne rectangulum Medium continetur sub duabus Rationalibus potentia solum commensurabilibus. 352. B

Quod a media fit, ad Rationalẽ applicatum, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quã applicatum est, longitudine incommensurabilem. 353. B

Omne spatium Medium æquale est rectangulo sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contento. 353. & 355. B

Medię commensurabilis, Media est. 355. B

Medio spatio commensurabile, Medium est. 356. B

Non omnis Media recta cuilibet Mediæ est cõmẽsurabilis. 358. B

Quod sub Medijs longitudine commensurabilibus rectis cõtinetur rectangulum, Mediũ est. 358. B

Quod

Quod sub Medijs potẽtia tantũ cõmensurabilibus rectis cõtinetur rectangulũ; vel Rationale est, vel Medium. 359.A

Quod sub Medijs longitudine & potentia incõmensurabilibus continetur, nec Rationale est, nec Medium, sed Irrationale aliud, quod æquale est rectangulo sub linea Rationali, & Irrationali, quæ Media appellatur, contento. 361.B

Medium non superat Medium Rationali. 362.B

Rationale superat Rationale Rationali. 364.

Duo spatia Irrationalia componere possunt spatium Rationale. 383.B

Duo spatia Rationalia componunt semper spatium Rationale, pag. 384.B

Si duæ Rationales potentia tantum commensurabiles componantur; tota Irationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus. 387.B

Si duæ Mediæ potentia tantum commensurabiles componantur, quę Rationale cõtineãt; tota Irationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs prima. 389.B

Quod sub linea Rationali, & Irrationali continetur rectangulum. Irrationale est. 390.B

Si duæ Mediæ potentia tantum incommensurabiles componantur, quæ Medium cõtineant; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs, secunda. 390.B

Si duæ rectæ potentia incõmensurabiles componantur, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale, quod autem sub ipsis cõtinetur, Medium; tota recta Irrationalis erit. Vocetur autem Maior. 393.B

Si duæ rectæ potentia incommẽ surabiles componantur, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Mediũ, quod autem sub ipsis continetur, Rationale; tota recta Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Mediũ potens. 394.B

Si duæ rectę potentia incõmensurabiles componantur, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis cõtinetur, Medium, incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum; tota recta Irrationalis erit. Vocetur autem bina Media potens. 395.B

Sex lineæ Irrationales compositæ, vt ea, quæ ex binis nominibus, quæ ex binis Medijs prima, quæ ex binis Medijs secunda, Maior, Rationale ac Mediũ potens, & bina Media potens, adunum dumtaxat punctum diuiduntur in nomina, singulæ. 398.B

Sex

Sex genera linearum Irrationalium, quæ ex binis nominibus dicuntur. 406.B

Si sex spatia contineantur sub Rationali, & ex binis nominibus prima, secunda, tertia, quarta, quinta, ac sexta; Rectæ ea potentes Irrationales sunt hæ ordine; ex binis Medijs prima, ex binis Medijs secunda, Maior, Rationale ac Medium potens, & bina Media potens 417.B

Quadrata sex harum linearum Irrationalium; eius quæ ex binis nominibus, ex binis Medijs primæ, ex binis Medijs secundæ, Maioris, Rationale ac Medium potentis, & bina Media potentis: ad Rationalem applicata, latitudines faciunt ordine sex lineas ex binis nominibus. pag. 426.B

Rectæ longitudine commensurabiles sex lineis Irrationalibus prædictis, sunt quoque eiusdem ordinis, & nominis Irrationales. 435.B

Idem eueniet, si potentia tantum sint commensurabiles, præterquam in ea, quæ ex binis nominibus dicitur. 437.B

Si Rationale & Medium componantur, quatuor Irrationales fiunt; vel ea, quæ ex binis nominibus, vel quæ ex binis Medijs prima, vel Maior, vel Rationale ac Medium potens. 443.B.

Si duo Media inter se incõmensurabilia componantur; duæ reliquæ Irrationales fiunt; vel ex Medijs secunda, vel bina Media potens. 445.B

Ea, quæ ex binis nominibus, & alię quinq; Irrationales eam sequentes, & inter se, & a Media differunt. 447.B

Recta linea media proportionalis secundum Analogiam Arithmeticam inter duo nomina cuiusuis lineæ Irrationalis, per compositionem facta, est quoque Irrationalis eiusdem ordinis. pag. 448.B

Si a Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti: *(Vel si a maiori nomine eius, quæ ex binis nominibus, minus auferatur)* Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Apotome. 449.B

Si a Media auferatur Media potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Rationale contineat; *(Vel si a maiori nomine eius, qua ex binis medijs prima, minus nomen auferatur)* Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima. pag. 451.B

Si a Media auferatur Media potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Medium contineat; *(Vel*

f si

si a maiori nomine eius, quæ ex binis Mediis secunda, minus nomen auferatur) Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda. pag. 452.B

Si a recta linea auferatur recta potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidē ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur Medium; (*Vel si a maiori nomine lineæ Maioris minus nomen auferatur)* Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor. 454.B

Si a recta auferatur recta potentia incōmensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat cōpositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale; (*Vel si a maiori nomine eius, quæ Rationale ac Medium potest, minus nomen auferatur)* Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens. pag. 455.B

Si a recta auferatur recta potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat & compositum ex ipsarum quadratis, Medium; & quod sub ipsis continetur, Medium, incommēsurabileque composito ex quadratis ipsarum; (*Vel si a maiori nomine eius, quæ bina Mediæ potest, minus nomen auferatur*) Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens. pag. 457.B

Apotomę vna tantum congruit recta Rationalis, potentia solum commensurabilis existēs toti. 459.B

Mediæ Apotomæ primæ vna tā tum congruit recta Media, potentia solum commensurabilis existens toti, & cum tota Rationale continens. pag. 461.B

Mediæ Apotomæ secundæ vna tantum congruit recta Media, potentia solum commensurabilis existens toti, & cum tota Medium continens. pag. 462.B

Minori vna tantum congruit recta, potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium. pag. 464.B

Ei, quæ cum Rationali Medium totum facit, vna tantum congruit recta potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciēs compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale. pag. 465.B

Ei,

Ei, quæ cum Medio Medium totum facit, vna tantū cōgruit recta, potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens & compositū ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis continetur, Medium, incommensurabileque composito ex ipsarū quadratis. 466.B

Sex genera linearum Irrationaliū, quæ Apotomæ dicuntur. pag. 467.B

Si sex spatia contineantur sub Rationali, & Apotoma prima, secunda, tertia, quarta, quinta, & sexta; Rectæ ea potentes Irrationales sunt hæ ordine; Apotome, Mediæ Apotome prima, Mediæ Apotome secunda, Minor, ea quæ cum Rationali Medium totum efficit, & ea quæ cū Medio Medium totum efficit. pag. 475.B

Quadrata harum sex linearum Irrationalium, Apotomæ, Mediæ Apotomæ primæ, Mediæ Apotomæ secundæ, Minoris, eius quæ cum Rationali Medium totum efficit, & eius, quæ cum Medio Medium totum efficit; ad Rationalem applicata, latitudines faciunt ordine sex Apotomas. 485.B

Rectæ longirudine commensurabiles sex lineis Irrationalibus prædictis, quę per detractionem fiunt, sunt quoque Irrationales eiusdem ordinis, & nominis. 493.B

Idem eueniet, si potentia tantū eis sint commensurabiles, præterquam in Apotoma. 494.B

Medio a Rationali detracto; Recta, quæ reliquum spatium potest, vna ex duabus Irrationalibus fit, vel Apotome, vel Minor. 500.B

Rationali a Medio detracto; aliæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome prima, vel cum Rationali Medium totum efficiens. 501.B

Medio a Medio detracto, quod sit incommensurabile toti; reliquæ duę Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome secūda, vel cum Medio Medium totum efficiens. 503.B

Apotome non est eadem, quæ ex binis nominibus. 504.B

Apotome, & aliæ quinque Irrationales eam sequentes, & inter se, & a Media differunt. pag. 505.B

Tredecim lineæ Irrationales inter se diuersæ. 506.B

Quadratum Rationalis ad eā, quæ ex binis nominibus, applicatū, latitudinē facit Apotomen, cuius nomina cōmensurabilia sūt nominibus eius, quæ est ex binis nominibus, & in eadem proportione; & adhuc Apotome quę fit, eundem habet ordinem, quem

ea, quæ est ex binis nominibus. 508.B
Quadratum Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt Apotomæ nominibus, & in eadem proportione; & adhuc, quæ ex binis nominibus fit, eundem habet ordinem, quê ipsa Apotome. 511.B
Si spatium cõtineatur sub Apotoma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commẽsurabilia sunt nominibus Apotomæ, & in eadem proportione; Recta spatium potens, est Rationalis. 513.B
Rationale spatium cõtineri potest sub duabus rectis Irrationalibus. 514.B
A Media infinitæ Irrationales fiunt, & nulla alicui antecedentium est eadem. 515.B
Si recta linea Rationalis extrema ac media ratione secetur; vtrunique segmentorum Irrationalis linea est, quæ vocatur Apotome. 702.B
Si recta secundum extremam & mediam rationem secetur, sitq; maius segmentum linea Rationalis; erit minus segmentum Apotome. 703.B.
Si in circulo Rationalem habẽte diametrum, pentagonum æquilaterum describatur; pentagoni latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Minor. pag. 714.B
Si sphæræ diameter fuerit Rationalis, erit tã superficies Tetraedri, quam Octaedri in ea sphæra, Media. 790.B
Triangulum æquialterum, cuius latus est Rationale, superficies Media est. 792.B
Latus Icosaedri in pyramide descripti est Apotome. 879.B

RECTA LINEA.

Rectę duæ lineę non habent vnum, & idem segmentum commune. pag. 64.A
Rectæ duæ in vno puncto concurrentes, si producantur ambæ, necessario se mutuo in eo puncto intersecabunt. 65.A
Rectæ duæ lineæ spatium non comprehendunt. 68.A
Rectæ duæ lineę duabus eisdem rectis lineis super eadem recta linea æquales, vtraque vtrique, non constituentur ad aliud atq; aliud punctum, ad easdem partes, eosdemque terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habentes. pag. 91.A
Recta linea alteri insistens facit cum ea aut duos rectos angulos, aut duobus rectis æquales. 108.A
Rectæ duæ ad vnum punctum coniunctæ faciunt vnam rectam, quando alia recta ex illo puncto educta cum illis facit duos angulos non ad easdem partes duobus rectis æquales. 109.A
Rectæ duæ ad vnum punctum coniunctæ non faciunt vnam rectam, quando alia recta ex illo puncto educta cũ illis facit duos angulos ad easdem partes duobus rectis æquales. 110.A
Rectæ duæ se intersecantes faciunt angulos ad verticẽ oppositos æquales. 111.A
Rectæ duæ se intersecantes faciunt quatuor angulos quatuor rectis æquales. 112.A
Rectæ quotcunq; ad vnum punctũ conuenientes faciunt omnes angulos quatuor rectis æquales. 112.A
Rectæ duæ facientes cum alia recta in eodem puncto, non ad easdem partes, angulos ad verticem æquales, in directum sunt coniunctæ. 113.A
Rectæ quatuor in eodem puncto facientes binos oppositos angulos æquales, constituunt duas rectas lineas. 113.A
Rectæ lineæ inter se æquales ex vno puncto ad rectam lineam plures quam duæ, duci non possunt. pag. 116.A
Rectæ lineæ ad eandem rectã perpendiculares, plures quam vnæ, duci non possunt. 117.A
Recta linea faciente cum alia angulos inæquales, perpendicularis ex vno illius puncto ad hanc demissa cadit ad partes anguli acuti. 118.A
Rectarum omnium ex vno puncto ad aliam rectam demissarum, minima est perpendicularis. pag. 121.A
Rectæ duæ lineæ ab extremitatibus vnius lateris trianguli interius constitutæ, reliquis triãguli duobus lateribus minores quidem sunt, maiorem vero angulum continent. pag. 126.A
Rectæ duæ lineæ intra triangulum, quarum vna ab extremo vnius lateris, altera vero non ab extremo ducitur, maiores esse possunt reliquis trianguli duobus lateribus, minoremque angulum comprehendere. pag. 127.A
Rectę duæ lineę parallelæ sunt, si recta in eas incidens faciat alternos angulos æquales. pag. 142.A
Rectæ duę lineæ parallelę sunt, si recta in eas incidens faciat externum angulum interno ad easdem partes oppositum æqualem; aut internos ad easdem partes duobus rectis æquales. 143.A
Rectas duas lineas concurrere productas, si recta in eas incidens faciat duos internos angulos ad easdem partes duobus rectis minores: quo modo a Proclo demonstretur. 147.A
Rectas easdem duas concurrere,

qua ratione a nobis demonſtretur. 159.A
Rectarum linearum angulum conſtituentium diſtantia, ſi in infinitum producantur, omnem finitam magnitudinē excedet. pag. 145.& 149.A
Recta linea ſecans vnam duarum parallelarum, producta ſecat & alteram. 146.A
Linea, cuius omnia puncta a recta linea, quæ in eodem cum ea plano exiſtit, æqualiter diſtant, recta eſt. 150.A
Recta linea ſuper aliam rectam in tranſuerſum mota, conſtituenſque in ſuo extremo cum ea angulos ſemper rectos, deſcribet altero ſuo extremo lineam quoque rectam. 152.A
Si ad rectam lineam duæ perpendiculares rectæ erigantur inter ſe æquales, quarum extrema puncta per lineam rectam coniungantur; erit perpendicularis ex quouis pūcto huius rectę ad priorem rectam demiſſa, vtrilibet priorum perpendiculariū æqualis. 154.A
Si ad rectam lineam duæ perpendiculares rectæ lineæ erigantur inter ſe æquales, quarum extrema puncta per lineam rectam coniungantur; efficiet hæc recta cum vtraque perpendiculari angulum rectum. 155.A
Si in duas rectas lineas alia recta incidens faciat cum vna earum angulum internum rectū, & cum altera ex eadem parte acutum; duæ illæ rectæ minus ſemper inter ſe diſtabunt ad eas partes, vbi eſt angulus acutus, ex altera vero parte ſemper inter ſe magis diſtabunt. pagina 156.A
Recta incidens in duas parallelas facit & angulos alternos æquales, & externum interno ad eaſdem partes æqualem, & internos duos ad eaſdē partes duobus rectis æquales. 162.A
Rectæ lineæ, eidem parallelę, & inter ſe ſunt parallelæ. pag. 163.A
Rectæ lineæ, eidem parallelæ, ſi inter ſe coeunt, conſtituunt vnā lineam rectam. 164.A
Rectæ lineæ, quæ parallelas ad eaſdem partes connectunt, æquales ſunt, & parallelæ. pag. 176.A
In figura æquilatera, & æquiangula parium laterū, oppoſita quælibet duo latera ſunt parallela. pag. 189.A
Recta ſecans duo trianguli latera bifariam, reliquo lateri eſt parallela. 201.A
Si fuerint duæ rectæ, ſeceturq; ipſarum altera in quotuis ſegmenta: Rectangulum comprehenſum ſub illis duabus rectis lineis, æquale eſt eis quæ ſub inſecta, & quolibet ſegmentorū comprehenduntur, rectangulis. 254.A

Si

Si fuerint duę rectæ lineæ, ſecenturque ambæ in quotuis ſegmenta: Rectangulum comprehenſum ſub illis duabus rectis, æquale eſt eis, quæ ſub ſingulis ſegmentis vnius, & quolibet ſegmentorum alterius continentur, rectangulis. 255.A
Si ſint duæ rectæ lineæ, ſecenturque ambæ vtcunque: Rectangulum comprehenſum ſub illis duabus lineis, vna cum rectangulo ſub vna parte vnius, & vna parte alterius comprehenſo, æquale eſt eis, quæ ſub totis lineis, & dictis partibus mutuo continentur, rectangulis, vna cum rectangulo ſub reliquis partibus comprehenſo. 256.A
Si recta linea ſecta ſit vtcunque, vel etiam in plura ſegmenta: Rectangula, quæ ſub tota, & quolibet ſegmentorum comprehendūtur, æqualia ſunt ei, quod a tota fit quadrato. 257.A
Si linea recta ſecetur in quotuis ſegmenta: quadratum, quod a tota fit, æquale eſt eis, quæ ſub ſingulis ſegmentis, & quolibet ſegmento comprehenduntur, rectangulis. 259.A
Si recta linea ſecta ſit vtcunque: Rectangulum ſub tota, & vno ſegmentorum comprehenſum, æquale eſt & illi, quod ſub ſegmentis comprehenditur, rectangulo, & illi, quod a prędicto ſegmento deſcribitur, quadrato. pag. 260.A
Si recta linea ſecta ſit vtcunque: Quadratum totius æquale eſt quadratis ſegmentorum, & rectangulo comprehenſo bis ſub ſegmentis. pag. 261.A
Si recta linea ſecetur bifariam, & non bifariam: rectangulum ſub inæqualibus ſegmentis totius comprehenſum, vna cum quadrato intermediæ ſectionū, æquale eſt quadrato ex dimidia deſcripto. pag. 266.A
Si recta linea bifariam ſecetur, & illi recta quædam linea in rectum adijciatur: rectangulum comprehenſum ſub tota cum adiecta, & adiecta, vna cum quadrato dimidiæ, æquale eſt quadrato rectę compoſitæ ex dimidia, & adiecta. pag. 269.A
Si recta linea ſecetur vtcunque: Quadratum totius, & quadratum vnius ſegmenti, ſimul æqualia ſunt rectangulo ſub tota & illo ſegmento bis contento vna cum quadrato alterius ſegmenti. 273.A
Si recta linea inæqualiter ſecetur: Erunt quadrata ſegmentorum æqualia rectangulo bis ſub ſegmentis comprehenſo, vna cum quadrato exceſſus, quo maius ſegmentum ſuperat minus. pag. 274.A

Si recta linea secetur vtcunque; rectangulum quater comprehensum sub tota, & vno segmentorum, cum quadrato reliqui segmenti, æquale est quadrato rectæ compositę ex tota, & priore segmento. pag. 275. A

VEL.

Si linea recta secetur vtcunque; eique in rectum adijciatur alia recta vni segmentorum æqualis: Quadratum totius lineæ compositę æquale est rectangulo quater comprehenso sub data linea, & adiecta siue dicto segmento, vna cum quadrato alterius segmenti. pag. 277. A

VEL.

Si linea recta secetur bifariam, eique in rectum adijciatur recta alia quantacunque: Quadratum totius compositæ lineæ æquale est rectangulo quater comprehenso sub linea composita ex dimidia, & adiecta, & dimidia, vna cum quadrato adiectæ. pagina. 278. A

Si recta linea secetur bifariam, & nõ bifariam: quadrata segmentorum inęqualium, simul dupla sunt quadrati ex dimidia, & quadrati ex intermedia sectionum. 279. A

Si recta linea secetur bifariam, adijciatur aũt ei in rectum quępiam recta linea: Quod a tota cum adiecta, & quod ab adiecta, vtraque simul quadrata dupla sunt quadrati ex dimidia, & quadrati ex composita ex dimidia & adiecta. pag. 283. A

Perpendicularis linea ex puncto aliquo ad rectam quampiã cadens, est omnium ex eodem puncto ad eandem rectam cadentium breuissima. 321. A

Si recta secetur extrema ac media ratione; Isosceles, cuius basis maiori segmento sit æqualis, vtrumuis vero laterum æqualium secta linea, habet vtrumque angulorum ad basim duplũ reliqui. 470. A

Si sint duæ rectæ inæquales, & ad maiorem applicetur quarta pars quadrati ex minore descripti, deficiens figura quadrata; Non erunt segmenta, quæ ex applicatione fiunt, æqualia. pag. 355. B

Si sint duæ rectæ inæquales, erit rectangulum sub ipsis contentum, duplum rectanguli sub alterutra earum, & dimidio alterius contenti. pagina. 381. B

Si recta linea non bifariam secetur; erit compositum ex quadratis partium maius, quam rectangulum sub partibus bis comprehẽsum, quadrato eius lineæ, qua maior pars minorem

rem superat. 392. B

Si recta non bifariam secetur, & rursus nõ bifariam in alio puncto; erunt quadrata partium magis inęqualium simul maiora quadratis partiũ minus inæqualium simul. 396. B

Rectę lineæ pars quædam non est in subiecto plano, quædã vero in sublimi. 548. B

Si duæ rectę se mutuo secent, in vno sunt plano. Atque triangulum omne in vno est plano pag. 549. B

Si duo plana se mutuo secent, communis eorum sectio est linea recta. 550. B

Si recta linea rectis duabus se mutuo secantibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat: Illa ducto etiam per ipsas plano ad angulos rectos erit. 551. B

Si recta linea rectis tribus se mutuo secantibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat: Illæ tres rectæ in vno sunt plano. 553. B

Si duæ rectæ eidem plano ad rectos sint angulos; parallelæ erunt illæ rectæ lineæ. pag. 554. B

Si duæ sint parallelæ rectæ, in quarum vtraque sumpta sint quælibet pũcta: Illa recta, quę ad hæc puncta adiungitur, in eodem est cum parallelis plano. 555. B

Idem euenit, si recta non sint parallelæ, in eodem tamen existãt plano. 555. A

Si duæ sint parallelæ rectæ, quarum altera ad rectos cuidam plano sit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit. 555. B

Quæ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, sed non in eodem cũ illa plano; hæ quoq; sunt inter se parallelæ. 557. B

Dato plano, a puncto, quod in illo datum est, duæ rectæ ad rectos angulos non excitabuntur, ad easdem partes. 562. B

Item neque a puncto in sublimi ad subiectum planum due perpendiculares demittentur. 562. B

Si recta plano cuipiamad rectos sit angulos; & omnia, quæ per ipsum, plana eidem plano ad rectos angulos erunt. pag. 570. B

Si duo plana se mutuo secantia plano cuidam ad rectos sint angulos, communis etiam illorum sectio ad rectos eidem plano angulos erit. pag. 572. B

Si planum ad planum rectũ fuerit; & ab aliquo puncto eorũ, quæ in vno sunt, planorum, ad alterum planum perpendicularis ducta fuerit, In communem sectionem cadet planorum ducta perpendicularis pag. 616. B

RE-

RECTANGVLVM parallelogrammum. vide. Parallelogrammum, &c.

RECTANGVLVM triangulum. vide. Triangulum.

REGVLARIS figura. vide. Figura intra & extra circulum, ſphæram, &c.

SCALENVM triangulum. vide. Triangulum.

SEGMENTVM circuli. vide. Circulus.

SIMILES plani ac ſolidi numeri. vide. Numerus planus, &c.

SOLIDA Figura intra, & extra ſphæram, atq; aliam figuram. vide. Figura intra, & extra circulum, &c.

SOLIDI numeri ſimiles. vide. Numerus planus, &c.

SOLIDVM Regulare. vide. Figura intra, & extra circulum, &c.

SOLIDVS angulus. vide. Angulus.

SOLIDVS numerus. vide. Numerus planus, &c.

SPHAERA. vide. Figura intra & extra circulum, ſphæram, &c.

TRAPEZIVM. vide. Parallelogrammum, &c.

TRIANGVLVM.

Triãgula duo habẽt & baſes, & angulos æquales, ipſaq; æqualia ſunt, ſi duo latera vnius æqualia ſint duobus lateribus alterius, vtrumque vtrique, angulosq; contentos habeant æquales. 82. A

Iſoſcelium triangulorum anguli tam ſupra baſem, quam infra, æquales ſunt. 85. A

Æquilaterum triangulum habet tres angulos æquales. 87. A

Triangulum, cuius duo anguli ſupra baſem æquales ſunt, habet duo latera angulis illis oppoſita æqualia. 88. A

Triangulum, cuius omnes anguli æquales ſunt, æquilaterum eſt. pag. 89. A

Triangulum, cuius duo anguli infra baſem æquales ſunt, Iſoſceles eſt. 90. A

Triangula duo habent vnũ angulum vni angulo æqualem, ſi duo latera vnum ambientia æqualia ſint duobus lateribus alterum ambientibus, & baſis baſi. 94. A

Triangula duo æqualia ſunt, & inter ſe æquiangula, ſi duo latera vnius ſint æqualia duobus lateribus alterius, & baſis baſi. pag. 96. A

Trianguli externus angulus maior eſt vtrouis interno oppoſito. 114. A

Trianguli duo quilibet anguli duobus rectis minores ſunt. pag. 117. A

Trianguli orthogonij, vel amblygonij duo reliqui anguli ſunt acuti. 118. A

Trianguli æquilateri omnes anguli, & Iſoſcelis duo ſupra baſem, acuti ſunt. 119. A

Triãguli maius latus maiorem angulum ſubtendit. 119. A

Scalenum habet omnes tres angulos inæquales. 119. A

Trianguli maior angulus maiori lateri ſubtenditur. 120. A

Trianguli angulo bifariam ſecto, ſi recta ſecans partiatur baſem inæqualiter; latera circa illum angulum inæqualia ſunt, maiuſque eſt illud, quod maiori ſegmento baſis adiacet. 121. A

Trianguli angulo inæqualibus lateribus comprehenſo bifariam ſecto, recta ſecans diuidit baſim inæqualiter, maiuſque ſegmentũ maiori lateri adiacet. 123. A

Trianguli angulo bifariam ſecto, ſi recta ſecans diuidat baſem bifariam, latera circa eum angulum æqualia ſunt: Et ſi æqualia ſint, recta ſecans angulum bifariam, ſecat & baſim bifariam. 124. A

Trianguli duo latera quomodocunq; ſumpta, reliquo ſunt maiora. 125. A

Triangula habentia duo latera duobus lateribus æqualia, vtrumque vtrique, angulum vero comprehenſum angulo maiorem, habent & baſem baſe maiorem. 132. A

Triangula habentia duo latera duobus lateribus æqualia, vtrumque vtrique, baſem vero baſe maiorem, habent & angulum comprehenſum angulo maiorem. 135. A

Triangula habentia duos angulos duobus angulis æquales, vtrumque vtrique, vnumque latus uni lateri æquale, ſiue quod æqualibus adiacet angulis, ſiue quod uni æqualiũ angulorum ſubtenditur; habent & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, utrumque utrique, & reliquum angulũ reliquo angulo æqualem. pagina 138. A

Triangula habentia eaſdem conditiones, de quibus proxime dictũ eſt, ſunt inter ſe æqualia. 139. A

In triangulo æquilatero, vel Iſoſcele, recta linea ab angulo duobus lateribus æqualibus comprehenſo ducta, diuidenſque vel angulum, vel baſem bifariã, perpendicularis eſt ad baſem; & ſi quidem angulum bifariã diuidat, ſecabit quoq; baſem bifariam. Si vero baſem ſecet bifariã, diuidet quoq; angulum bifariam.

Et contra, linea perpẽdicularis ad baſem ducta diuidit & baſem, & angulum bifariam. pag. 140. A

Triangulum, in quo linea recta ab vno angulorum ducta ad baſem perpendicularis diuidit vel baſin, vel angulum bifariam, habet duo latera circa illum angulum æqualia: Et ſi quidem baſis diuidatur bifariam, angulus quoque bifariam ſecabitur: ſi vero angulus bifariam ſecetur baſis quoque diuidetur bifariã. pag. 141. A

Si duo triangula habeant duos angulos duobus angulis æquales, vtrumque vtrique, & vnum latus vni lateri æquale, quod tamen neque æqualibus adiacet angulis, neque vni æqualium angulorum opponitur; nihil colligi poteſt. 166. A

Triãguli externus angulus duobus internis oppoſitis eſt æqualis: Et omnes tres anguli duobus rectis æquales ſunt. pag. 169. B

Trianguli cuiuslibet omnes tres anguli ſimul æquales ſunt tribus angulis ſimul cuiuſcunque alterius trianguli. 174. A

Iſoſcelis duo anguli ſupra baſim ſemirecti ſunt, quando reliquus angulus rectus eſt. 175. A

Æquilateri trianguli quilibet angulus continet duas tertias partes vnius recti, vel vnã tertiam partem duorum rectorũ. 175. A

Æquilaterum triangulum a perpendiculari ex angulo ad baſim ducta diuiditur in duo ſcalena orthogonia, &c. 176. A

Triangula ſuper eadem baſi cõſtituta; & in eiſdẽ parallelis, ſint æqualia. 195. A

Triangula, quorum duo latera vnius æqualia ſint duobus lateribus alterius, vtrumque vtrique angulum vero contentum angulo maiorem, quo pacto poſſint æqualia eſſe, & inæqualia. pagina 196. A

Triangula ſuper æqualibus baſibus conſtituta, & in eiſdem parallelis, inter ſe ſunt æqualia. 198. A

Triangulum a recta ex angulo ad medium punctum lateris oppoſiti ducta ſecatur bifariam. pag. 199. A

Triangula æqualia ſuper eadẽ baſi, & ad eaſdem partes conſtituta, in eiſdem ſunt parallelis. 200. A

Triangula æqualia ſuper æqualibus baſibus, & ad eaſdẽ partes conſtituta, in eiſdem ſunt parallelis. 202. A

Triangula æqualia inter eaſdem parallelas, ſi non habuerint eandem baſim, ſuper æquales baſes ſunt conſtituta. 203. A

Triangulorum inter eaſdem parallelas, quod maiorem habet baſim, maius eſt: Et quod maius eſt, maiorem habet baſim. pag. 203. A

Si

Si in triangulo linea recta vni laterum parallela ducatur; Recta ex angulo oppoſito ducta, diuidensq; alterutrã parallelarum bifariam, diuidit quoq; alterã bifariam. 207. A

In rectangulis triangulis, quadratum lateris angulo recto oppoſiti, æquale eſt duobus quadratis ſimul reliquorum duorum laterum. 229. A

Si fuerint duo triangula rectangula, quorum latera rectis angulis oppoſita ſint æqualia; erunt duo quadrata, reliquorum duorum laterum vnius trianguli æqualia duobus quadratis reliquorum duorum laterum alterius. 236. A

Si ex angulo a duobus lateribus inæqualibus trianguli cuiuſuis comprehenſo ad baſim perpendicularis ducatur cadens intra triangulum; ſecabitur baſis inæqualiter, maiorque pars iuxta maius latus erit. Et contra, ſi baſis a perpendiculari ſecetur inæqualiter, erunt duo latera inæqualia, maiusque erit prope maiorem partem baſis. 240. A

In omni triangulo, parallelogramma quæcunque duorũ laterum æqualia ſunt parallelogrammo reliqui lateris, cuius alterum latus æquale ſit, & parallelum recta ducta ab angulo, quem duo illa latera cõtinent, ad punctũ, in quo conueniunt latera parallelogrammorum lateribus trianguli oppoſita, ſi ad partes anguli illius produeantur. 241. A

Si quadratũ vnius lateris trianguli æquale ſit duobus quadratis reliquorũ duorum laterum; angulus ſub his comprehenſus, rectus erit. 242. B

Triangulorum comparationes variæ, & quo modo fiant. 243. A

In amblygoniis triãgulis, quadratum lateris angulo obtuſo oppoſiti quanto maius ſit quadratis reliquorum duorũ laterum. 288. A

In amblygoniis triangulis perpendicularis ex alterutro angulorũ acutorum ad latus oppoſitũ demiſſa, cadit extra triangulum ad partes anguli obtuſi. 289. A

Si in triangulo quadratum vnius lateris maius ſit quadratis aliorum duorum laterum: angulus illi lateri oppoſitus, obtuſus erit. pag. 290. A

Si in triangulo quadratum vnius lateris maius ſit quadratis reliquorum duorũ laterum, rectangulo bis comprehenſo ſub alterutro horum laterum, & ſub exteriore linea, quam ex illo latere producto recta linea ab oppoſito angulo demiſſa abſcindit: demiſſa hæc linea ad latus productũ perpendicularis erit, & angulus propoſiti trianguli priori illi lateri oppoſitus, obtuſus. 290. A

In oxygoniis triãgulis, quadratum lateris angulo acuto oppoſiti, quanto minus ſit quadra-

dratis aliorum duorum laterum. 296. A
In quolibet triangulo perpendicularis in latus duobus acutis angulis adiacens ex opposito angulo demissa, cadit intra triangulum. 298. A
Si in triangulo quadratum vnius lateris minus sit quadratis reliquorum duorum laterum; angulus illis lateri oppositus, est acutus. 300. A
Si in triangulo quadratum vnius lateris minus sit quadratis reliquorum duorum laterũ, rectangulo bis comprehenso sub alterutro horum laterum, & sub recta linea inter angulum priori lateri oppositum, & rectam lineam ab angulo alteri illi lateri opposito demissam: Linea hæc demissa ad alterum illud latus perpendicularis erit, & angulus propositi trianguli priori illi lateri oppositus, acutus. 301. A
Si in triangulo a quouis angulo recta linea ducatur secans latus oppositum bifariam, erunt duo quadrata laterum circa illum angulum, simul dupla duorum quadratorum, quorũ unum ex linea ducta, alterũ vero ex dimidiato latere describitur. 310. A
Triãguli angulus, qui reliquis duobus est æqualis, rectus est. 430. A
Isoscelis trianguli, cuius vterq; angulorum ad basim duplus est reliqui, angulus reliquus continet quintam partem duorum rectorum, vel duas quintas vnius recti; vterque vero ad basim continet duas quintas duorum rectorum, vel quatuor quintas vnius recti. 469. A
Si recta secetur extrema ac media ratione; Isosceles, cuius basis maiori segmento sit æqualis, vtrumuis uero laterum æqualium datæ lineæ sectæ, habet vtrumque angulorum ad basim duplũ reliqui. 470. A
Si in triangulo rectangulo ab angulo recto demittatur perpendicularis ad basim; erit rectangulum sub base, & alterutro basis segmento, æquale quadrato lateris illi segmento adiacentis; Rectangulum vero sub basis segmẽtis æquale quadrato perpendicularis; Rectangulum denique sub base, & perpendiculari æquale rectangulo sub lateribus circa angulum rectum. 380. B
Triangulum omne in vno est plano. 549. B
Latus trianguli æquilateri potentia sesquitertium est perpẽdicularis ex vno angulo ad basim demissæ. 718 & 789. B
Perpendicularis ex angulo trianguli æquilateri ad basim oppositam demissa; tripla est eius perpendicularis, quæ ex centro triãguli ad eandem basim deducitur: sesquialtera vero semidiametri circuli triangulum circũscribentis. 801. B

Qua-

Quadratum lateris trianguli æquilateri ad ipsum triangulum habet proportionẽ duplicatam proportionis lateris trianguli ad lineam medio loco proportionalem inter perpendicularem ab vno angulo ad latus oppositum ductam, & dimidium ipsius lateris. 821. B
Quadratũ rectæ mediæ proportionalis inter dimidiũ latus trianguli æquilateri, & eius perpendicularem; æquale est ipsi triangulo. 822. B

FINIS.

ERRATORVM POSTERIORVM DECEM Lib. Correctiones.

Pag.	Lin.	Errata.	Correctiones.
50	4	D, $\frac{7}{22}$.	D, $\frac{14}{22}$.
64	19	215 defin.	213. septimi.
68	penult.	C, tertium,	in C, tertium.
80	7. a fine	ad F H,	ad E H.
145	12. a fine	D, F, I, M,	C, F, I, M,
147	3. a fine	G, ad D.	C, ad D.
163	11. a fine	I, & C	L, & C,
183	11. a fine	propos. 10. lib. A,	propos. 10. lib. 8. A,
208	7	medios B, G;	medios B, C;
212	10. a fine	64 per 1.	64. per 3.
219	3	A C, ad D E, ita C B,	AC, ad C B, ita D E,
219	4. a fine	C a B;	C B;
327	20	deleatur vox (aliter)	
768	9. a fine	PROBL. 4.	THEOR. 4.
806	5. a fine	æquilater	æqualiter

Emendentur quoque numeri paginarum in folijs I. X. Vu. Iii.

Præterea pro figura paginæ 626. describatur figura paginæ 628.

Universidad de Deusto
Biblioteca

REGESTVM.

A B C D E F G H I K L M N O P Q R S T V X Y Z.

Aa Bb Cc Dd Ee Ff Gg Hh Ii KK Ll Mm Nn Oo Pp Qq Rr Ss Tt Vu Xx Yy Zz.

Aaa Bbb Ccc Ddd Eee Fff Ggg Hhh Iii KKK Lll Mmm Nnn Ooo.

a b c d e f.

Omnia sunt integra folia.

ROMAE,
Apud Sanctium, & Soc.
M. D. LXXXIX.

Universidad de Deusto
Biblioteca

Universidad de Deusto
Biblioteca