EVCLIDES
NVEVO-ANTIGVO.

GEOMETRIA ESPECVLATIVA,
Y PRACTICA
DE LOS PLANOS, Y SOLIDOS.

AVTHOR

EL R. P. IOSEPH ZARAGOZA,
de la Compañia de Iesvs, Calificador de la Suprema Inquisicion, Cathedratico de Theologia Escolastica en los Colegios de Mallorca, Barcelona, y Valencia; y de Mathematica en el Imperial de Madrid: de la Real Iunta de Minas, y Maestro de Mathematicas de su Mag. Carlos II.

AL EXC^mo. SEÑOR D. GREGORIO de Silua, &c. Principe de Melito, Duque del Infantado, y Pastrana, &c.

CON LICENCIA DE LOS SVPERIORES.

En Madrid: Por Antonio Francisco de Zafra.
Año M. DC. LXXVIII.

AL EXCELENTISSIMO SEÑOR DON
Gregorio de Silva, Sandoval, y Mendoza, de la Cerda, de la
Vega, y Luna: Principe de Melito, Duque de Paſtrana, y
Francavila, Marquès de Argecilla, y de la Puebla de Alme-
nara, Conde de Saldaña, Señor de las Villas de Eſtremera, y
la Zarza, y de las Villas, y Lugares acrecentados al eſtado an
tiguo, y Condado de Cifuentes, y de las Villas de Baldarace
te, Eſcamilla, Barcienſe, Albalate, Zorita de los Canes, y
Lugar de Sayaton, ſus terminos, y heredamientos, y de las
Baronias de la Roca Franchrea, y Caridad, y de la Tierra del
Pico en el Reyno de Napoles, Señor de la Caſa, y Torre de
Silva en el Reyno de Portugal, Comendador Mayor de Caſ-
tilla, Orden, y Cavelleria de Santiago, Gentil Hombre
de la Camara de ſu Mageſtad, y ſu Montero
Mayor, &c.

Exc. Señor.

LOS elementos Geometricos de Euclides, reciben oy nueva luz debaxo de la ſombra de V. Exc. que darà nuevo realce à ſus aumentos, ſi aplica V. Exc. la viveza de ſu ingenio à las nuevas demoſtracciones, como ſe dignò emplearla con tanta felicidad en las primeras, logrando en breve tiempo la perfecta comprehenſion de los mas ſublimes theoremas Geometricos.

Si la ciega embidia tuviera algun vſo de razon, gozàra eſte libro de la inmunidad, que le merecian los altos nombres de Silva, y Men *doza, y las soberanas grandezas de Infantado, y Pastrana, con otras no inferiores, assi heredadas, como personales, y escuso referirlas por ser tan conocidas en todo el mundo: pero como este desbocado monstruo no obedece al freno de la razon, ni guarda el respeto aũ à la divinidad, fuera desvario, si pretendiera el Autor lo que reconoce impossible: Solo, pues, aspira à la gloria de que V. Exc. admita benignamente este pequeño obsequio, y el trabajo que de nuevo ha puesto en facilitar la entrada à los bien compuestos, y apacibles jardines de la Mathematica, entre tanto que dispone otras obras mayores para ofrecerlas à los pies de V. Exc. cuya vida guarde N. S. los felizes años que este su menor siervo desea. En el Colegio Imperial de Madrid à 28. de Febrero de 1678.*

Exc. Señor.

B. S. M. de V. Exc.

Su menor Capellan, y Siervo.

Ioseph Zaragozà.

IN-

INTRODVCCION DEL AVTOR.

LA dificultad de las matematicas pide toda la industria del Maestro en facilitar sus demostraciones. El estilo mas breve no es el mejor, si peca en confuso, ni el mas prolijo afiança en la difusiõ la claridad, q̃ se pide. El buen orden tiene, à mi juyzio, el primer lugar en todo: las premissas disponen para la conclusion; esta sale nada violenta, si aquellas estàn dispuestas. En vn medio, y dos estremos bien ordenados estriva toda la eficacia de la razon. Estas consideraciones alentadas con la experiencia de lo que cuesta aprẽder sin Maestro vna ciencia tan noble, pudieron motivarme, diez años ha, el intentar nuevo methodo en la Geometria. Las tareas escolasticas no lexaron por entonces perficionar mi idea; porque el primer empeño es el de la obligacion; pero luego q̃ la Theologica se conmutò en Mathematica, fue mi primer cuydado la perfeccion de este assumpto, que oy consagro à la primera Nobleza de España, que en los Estudios Reales concurre. Trato primero de la Geometria Especulativa, que de la Pratica, por-

porque esta depende de aquella, y no al contrario. He reducido las materias à classes, juntando en vna todas las que son de vna especie: con que son las proposiciones, y figuras menos. Pudose mudar el orden tambien de los libros que nos dexò Euclides, pero tuve por mejor conservarle, pues no se gana tanto en la facilidad, quanto se pierde en la inteligencia de los Autores, que citan los libros de tan gran Maestro. Las definiciones se hallarán juntas en los Proemiales comunes à la Geometria Pratica, y Especulativa. Con este artificio he procurado conseguir tres cosas. La primera, socorrer la memoria de lo que cada libro contiene, reducidos los individuos à sus especies. La segunda, facilitar la enseñança con la brevedad, y claridad que de esta reduccion se sigue. La tercera, no confundir la inteligencia de los Autores, que citan à Euclides, pues vn libro corresponde à otro, y aunque el numero de las proposiciones es diferente, si se atiende à la especie, luego se encontrarà la correspondiente. Esta ha sido mi idea; si consegui el intento, serà de Dios la gloria, y el provecho de los discipulos, pues ya la experiencia ha manifestado,

que muchos pudieron con nuestro methodo, y su aplicacion comprehender en vn mes todos los elementos Geometricos con perfeccion, pero si alguno juzgare, que no llenè el assumpto, espero no aver malogrado por esso el tiempo, ni quedar frustrado de la estimacion que en tan arduas empressas el buen deseo merece.

EXPLICACION DE LAS CITAS.

LA citas vàn cerradas dentro vn parentesis. La P. significa los proemiales. La L. el libro. La N. el numero en que se divide la proposicion. La *p*. el problema de la Geometria practica, como (3. P.) es la proposicion, ò numero 3. de los proemiales (5. L. 1.) la proposicion 6. del libro primero (3. N.) el numero 3. de la proposicion presente (4. *p*. 3.) el 4. problema, y pratica tercera de la Geometria practica.

ERRATAS.

Pag.	Lin.	Error.	Correccion.	Pag.	Lin.	Error.	Correccion
3	30	se	----	90	19	por *r*	por *d*.
8	18	ella	ellas	90	37	*en* a a	*en* a *ua*
8	36	HA	HR	96	14	*ce*	*es*
9	35	BE	BF	104	18	Ad	AD
15	35	F. 1.	E. 1.	107	24	*oncurren*	*concurren*
18	15	v à	vna	114	19	GF.	GE.
23	12	CE.	CF	114	28	BE.	GE
23	22	AFB.	CFD.	115	1	tamhian	tambien
23	23	GAG.	GAC	1[illegible]8	8	PF	PE.
25	13	*que*	*que son*	123	19	PaX	PaZ.
29	8	*BCA*	*DCA*.	125	23	*Incriptas*	*Inscriptas*
49	10	le	el	126	27	GAB.	CAB
49	15	lo	l s	128	21	*tiran*	*tirar*
51	3	BAC	BCA.	139	10	segm DC	segm DB.
51	9	OB	AB	140	7	lagase	ha ase
52	23	FA ED.	FA FD.	1[illegible]2	22	rrans	trans
55	11	*connexa*	*convexa*	153	15	120.	20.
56	27	connexa	convexa	153	15	20	120.
82	24	serà à	serà à ao	153	20	*currpos*	*cuerpos*
87	17	CM.	GM.	156	5	recta	recto.

PROE-

PROEMIALES.

LA Mathematica es ciencia de la quantidad inteligible, y precinde de toda materia. Dividese en Geometria, y Arithmetica, y cada vna en sus partes. La Arithmetica es ciencia de la quantidad discreta, cuyos terminos no tienen vnion, como son los numeros. La Geometria es ciencia de la quantidad continua, cuyos terminos estàn continuados, y vnidos, aunque sea con imaginaria vnion en las partes del espacio imaginario.

1. P. *Axioma.*

VNa quantidad se ajusta al lugar de otra, quando puesta en su lugar le ocupa enteramente; y assi las quantidades ajustadas, ò que se ajustan, son iguales; pero por ser iguales, no se ajustan, sino quando son semejantes, como vn circulo igual à otro, y vn arco à otro de vn mesmo, ò igual circulo, vn quadrado à otro, &c. Pero si las cantidades no son semejantes, aunque sean iguales, no se ajustan: como vn triangulo no se ajusta à vn quadrado, aunque sean iguales, porque no son semejantes.

2. P. *Axioma.*

EL todo compuesto de muchas partes, es igual à todas sus partes juntas, porque se compone de ellas: y es mayor que cada parte sola, porque incluye por lo menos otra parte mas. Las partes semejantes, y de vna denominacion, son iguales entre si, como vna mitad à otra, vn tercio à otro, &c. si son de vn mesmo compuesto, y tambien de dos,

A to-

todos iguales; pero ſi dos compueſtos todos ſon deſiguales, el mayor tiene mayores partes, y al contrario: y aſsi la mitad del Cielo es mayor que la mitad del Mundo.

3. P. *Axioma.*

LAs quantidades que ſon iguales à otra; ò que la contienen, ò ſon contenidas de ella iguales vezes, ſon tambien iguales entre ſi: lo meſmo es reſpeto de otras dos iguales. Las que tienen vn meſmo, ò igual exceſſo à otra, y à dos iguales: y las que ſon igualmente excedidas de otra, y de dos iguales, ſon tambien iguales entre ſi.

Lo que ſe dize de vna cantidad, reſpeto de otra, como que es mayor, menor, ò igual: dupla, tripla, &c. mitad, tercio, quarto, &c. ſe dize tambien de qualquiera otra ſu igual.

4. P. *Axioma.*

SI à cantidades iguales ſe añaden, ò quitan cantidades iguales, ò vna comun à las dos, reſultan cantidades iguales. Si à cantidades iguales ſe añaden, ò quitan deſiguales, quedaràn deſiguales, y ſerà mayor aquella à quien ſe añadiò mas, ò quitò menos.

Si à deſiguales ſe añaden, ò quitan iguales, ò vna comun, quedaràn deſiguales, y ſerà mayor la meſma que antes lo era.

Si de tres cantidades, la primera es mayor que la ſegunda, y la ſegunda, que la tercera; tambien la primera ſerà mayor que la tercera, y al contrario.

5. P. *De la Magnitud.*

MAgnitud, ò grandeza es vna cantidad continua menſurable: ſi es finita, y terminada, ſus terminos ſon los eſtremos de la magnitud. El punto Mathematico no ſe toma como parte, que componga la magnitud, porque ſolo es vn ſigno, ò ſeñal indiviſible ſin partes, que ſe nota en la cantidad,

ſin que la Mathematica examine ſi ay, ò no puntos indiviſibles en la compoſicion del continuo phyſico, y real: porque todas ſus demonſtraciones ſon independentes de vna, y otra ſentencia, y aſsi ellas ſon las que ſe han de ajuſtar, y componer con las demonſtraciones Mathematicas.

6. P. *De la Linea.*

LInea es vna magnitud larga, ſin anchura, ni profundidad, porque ſe imagina formada con el movimiento de vn punto indiviſible. Linea recta es la que directamente procede ſin jamàs torcer à vna, ni otra parte: y ſi es finita, procede igualmente entre los dos puntos, que ſon ſus terminos; y es la mas breve diſtancia entre ellos: con que de vn punto à otro, ſolo ſe puede tirar vna linea recta, pero eſta ſe puede continuar infinitamente.

Linea curva es la que no procede directamente, y tuerce à vna, ò otra parte, como es la circular, y otras innumerables, que no pertenecen à eſte lugar.

7. P. *De la ſuperficie, y cuerpo.*

S*Vperficie* es vna magnitud larga, y ancha, ſin profundidad: imaginaſe compueſta de lineas; y ſi todas las lineas por todas partes ſon rectas, ò ſi vna regla bien recta dando vna buelta por todas partes ſe ajuſta con la ſuperficie, ſerà ſuperficie plana; ſino ſerà curva, ò mixta de plana, y curva.

Cuerpo, es vna magnitud ancha, larga, y profunda: llamaſe *ſolido*. El ſolido phyſico, y Mathematico ſe diſtinguen en eſto, que el phyſico ſe dize la vnion de ſus partes conſiſtente, y firme, y ſe opone al fluido: el Mathematico todo lo comprehende, y aun ſe eſtiende al eſpacio imaginario, porque ſolo es vna extenſion, ò cantidad que admite las tres dimenſiones de largueza, anchura, y profundidad.

8. P. *Del circulo, y su diametro*, fig. 1.

LInea *circular*, es vna linea obliqua, distante igualmente de vn punto, que està en medio del espacio comprehendido. *Circulo* es el espacio, que la linea circular comprehende: su *centro* es aquel punto medio: su ambito, perimetro, peripheria, ò circunferencia, es la linea circular, que le comprehende, ò ciñe. Descrivese el circulo, si la linea EB. dà vna buelta entera, sin que el punto E. se mueva: y el punto E. serà el centro. De donde se infiere, que todas las rectas del centro à la circunferencia son iguales entre si, porque todas son iguales à la recta EB. con que se descrivió el circulo: llamanse *radios*, *ò rayos, ò semidiametros*.

Diametro, es la recta que passa por el centro, y se termina en la circunferencia por vna, y otra parte. Todos los diametros son iguales, como AB. CD. porque cada vno se compone de dos radios iguales. Qualquier diametro divide al circulo en dos partes iguales: porque si la parte ADB. se dobla sobre el plano ACB. tirando infinitos radios, como EC. EF. todos por ser iguales, se terminaràn en las dos circunferencias; porque si alguno cayera fuera, seria mayor, y si dentro, menor: luego qualquier punto del arco ADB. caerà sobre otro de ACB. y assi vn arco se ajustarà sobre otro: luego seràn iguales (1. P.) y cada vno serà la mitad del circulo, ò *semicirculo*.

9. P. *Division, y partes del circulo*, fig. 1.

QVALquiera circulo se imagina dividido en 360. partes, que se llaman *grados*: cada grado en 60. minutos primeros: cada minuto en 60. segundos: cada segundo en 60. terceros, y assi infinitamente. El semicirculo, pues, contiene 180. grados, y el quadrante, ò quarta parte contiene 90. que es la mitad del semicirculo.

Arco,

Arco, es parte de la circunferencia, como el arco DA. ò AC. &c.

Cuerda, ò subtensa, es la recta, que termina vn arco: como AB. es cuerda del arco ADB. o BCA. y CB. es cuerda del arco CEB. y tambien del arco CADB.

Segmento, es el espacio comprehendido entre la cuerda CB. y arco CFB. ò entre la cuerda CB. y arco CADB. y porque qualquiera cuerda divide la circunferencia, y circulo en dos arcos, y segmentos, que entre los dos llenan toda la circunferencia, y circulo: se dize el vn arco complemento del otro, y el vn segmento complemento del otro. *Sector*, es el espacio comprehendido de vn arco, y los dos radios, que le terminan: como el espacio ECFBE. que està comprehendido del arco CFB. y de los radios CE. BE.

Arcos semejantes, aunque sean de circulos desiguales, son los que contienen tantos grados el vno como el otro, respeto de su circulo: assimismo segmentos entre si semejantes, y sectores entre si semejantes, son los que constan de arcos semejantes.

10. P. *Del angulo, y su medida*, fig. 1.

ANgulo *plano*, es la inclinacion de dos lineas, que se juntan en vn punto: como ABC. quando solas dos lineas concurren, se puede nombrar el angulo con la letra sola del concurso, como el angulo B. pero quando concurren tres, ò mas lineas en vn punto, se deve nombrar con tres letras, y la del concurso deve ponerse en medio: como el angulo FEB. es el mismo que BEF. y el angulo FEC. el mismo que CEF. y CEB. que BEC. Que las lineas sean cortas, o largas, no muda el angulo, porque no haze variar la inclinacion de las lineas; y assi el Angulo ABC. es el mesmo que EBO.

La

La Medida del angulo es el arco, que se imagina descrito del punto del concurso como centro, y se comprehende entre las dos lineas, que forman el angulo: como si del punto E. se descrive qualquier circulo, el arco CB. serà medida del angulo CEB. con que si dos angulos CEB. AED. son iguales, seràn los arcos de vno, o iguales circulos CB. AD. tambien iguales; y los de circulos desiguales seràn semejantes; y si los arcos son iguales, ò semejantes, seràn los angulos iguales. Si el arco AC. es de 90. grados, serà el angulo AEC. de 90. grados, &c. De donde se infiere, que por el punto E. àzia la mesma parte, sola vna recta EA, puede formar el mesmo angulo, porque como ha de cortar el arco AC. y passar por A. necessariamente serà la mesma linea EA.

11. P. *Del angulo recto, y obliquo, y de la linea perpendicular, fig. 1.*

ANgulo recto es el que comprehende la quarta parte de vn circulo, ò mitad del semicirculo, que son 90. grados. Todos los angulos rectos son iguales entre si, porque cada vno es la quarta parte de vn mesmo circulo, y dos angulos rectos son 180. grados, que es el semicirculo.

La linea perpendicular à otra es la que con ella haze dos angulos rectos, y parte al semicirculo en dos partes iguales: como si del centro E. sube la linea EC. y los arcos CB. CA. son iguales, seràn los angulos AEC. CEB. rectos iguales, y la recta EC. serà *perpendicular* sobre AB. porque no se inclina mas à vna parte que à otra: y del punto E. no puede salir otra perpendicular, porque solo el punto C. parte al semicirculo en dos partes iguales; y assi la perpendicular de vn punto es vnica.

Angulo obliquo se dize el que no es recto. Si es menos de 90. grados, es menor que recto, y se llama *Agudo*, como FEB. porque el arco BF. es menos que el quadrante BC. Si es mas de 90. grados, es mayor que recto, y se llama *Obtuso*, como FEA. porque el arco FA. es mas que el quadrante AC.

12. P. *De los Triangulos, fig. 1.*

TRiangulo, es vna figura de tres angulos, y porque tiene tambien tres lados, se llama figura trilatera.

Triangulo rectangulo es el que tiene vn angulo recto, como el triangulo CEB.

Triangulo obliquangulo es el que no es rectangulo, y tiene tres angulos obliquos, como son CEO. OEB.

Triangulo obtusangulo, ò ambligonio es el que tiene vn angulo obtuso, como EOC.

Triangulo acutangulo, ò oxigonio, es el que tiene tres angulos agudos, como AEG y BEO.

Triangulo equilatero, ò isopluero el que tiene tres lados iguales, como AEG.

Triangulo isoceles el que tiene por lo menos dos lados iguales, como CEB. y GEA.

Triangulo escaleno el que tiene tres lados desiguales, como CEO. y OEB.

13. P. *De las Paralelas, fig. 2.*

LIneas rectas paralelas son las que infinitamente continuadas siempre distan igualmente, y assi jamàs pueden concurrir, como si el triangulo ABC. se mueve sobre la linea AD. formarà la linea CCC. siempre equidistante de AD. y los lados BC. BC. BC. siempre seràn equidistantes, como tambien los lados AC. AC. AC. pues aunque estas lineas se continuen infinitamente, en qualquiera parte, que se tome el punto C. siempre CC. caminò tanto como BB.

Con-

Consectario 1. Si vna linea DA. corta las paralelas BC. BC. BC. ò CA. CA. CA. entra en ellas con iguales angulos: A. A. A. porque son vn mesmo angulo del triangulo ABC. que solo mudò lugar con el movimiento, sin variacion de sus partes.

Consect. 2. Si la recta DA. entra en otras dos AC. AC. con iguales angulos A. A. seràn AC. AC. paralelas: porque la segunda linea AC. que ha de ser paralela à la primera AC. ha de hazer el segundo angulo A. igual al primero A. y suponiendo que la segunda AC. haze dicho angulo A. igual: y no pudiendo hazer dicho angulo ninguna otra linea (10. P.) serà la segunda AC. paralela à la primera AC.

Consect. 3. Las paralelas tienen el perpendiculo comun: y al contrario, las que tienen vna perpendicular comun son paralelas: porque si BC. BC. son paralelas, y la recta DA. corta à las dos: entra en ella con iguales angulos B. B. (*Consect.* 1.) Luego si la recta AD. haze el angulo B. recto con la primera BC. tambien harà el angulo B. recto con la segunda BC: y assi la recta AD. serà perpendicular à las dos, que es ser perpendiculo, ò perpendicular comun.

Al contrario. Si AD. es perpendiculo comun à las rectas CB. CB. seràn los angulos B. B. rectos, y por consiguiente iguales (11. P.) Luego porque AD. entra con iguales angulos B. B. en las rectas BC. BC. seràn BC. BC. paralelas entre si (*Consect.* 2.)

Consect. 4. Si dos lineas BC. BC. en vn mismo plano son paralelas à otra BC. son tambien entre si paralelas: porque si à igual distancia se añade, ò quita distancia igual, resultarà igual distancia.

14. *P.* *De los Paralelogramos*, fig. 3.

Paralelogramo es figura de quatro lados, y angulos, cuyos lados opuestos son entre si paralelos, como OSHA, y GFBD.

Rectangulo es paralelogramo de quatro angulos rectos, como OSHR. GEGD.

Quadrado es rectangulo de quatro lados iguales, como ONMR. y GECD.

Rhombo es paralelogramo, que tiene quatro lados iguales, y dos angulos desiguales, como QPXL.

Rhomboide es paralelogramo, que tiene dos lados, y dos angulos desiguales, como AZPQ.

Diametro del paralelogramo, es la recta, que junta los angulos opuestos, como LP. llamase tambien *Diagonio*, ò *diagonal*.

Centro es el punto comun de los diametros, donde mutuamente se cortan como V.

Los paralelogramos ya hechos se pueden nombrar con las quatro letras de los angulos, y para mas compendio se nombran con las dos letras de los angulos opuestos, como el paralelogramo OSHR. se dize OH. ò RS.

Las otras figuras de quatro lados, que no son paralelogramos, se llaman *Trapezios*, y se nombran con todas las quatro letras de sus angulos.

15. *P.* *Potencia de las lineas*, fig. 3.

Potencia de vna linea se dize el espacio mayor, que ella puede comprehender tomada quatro vezes con angulos rectos, y formando vn quadrado, como el quadrado GC. es la potencia de la recta DC. y aunque el quadrado GC. consta de quatro lineas, se dize formado de sola vna, por ser todas quatro iguales.

Las potencias de dos lineas son sus dos quadrados: las potencias de tres son sus tres quadrados, &c. *Si dos lineas son iguales, son sus potencias, ò quadrados iguales*, porque se ajustan; *y si las dos potencias son iguales, son las dos lineas iguales*: si el quadrado de vna linea DF. es tanto como los quadrados de otras dos DB. BE.

se dize que DF. puede tanto como DB. y BF.

La potencia de dos lineas es el espacio mayor, que entre las dos lineas pueden comprehender, formando vn paralelogramo rectangulo, como el rectangulo GB. es la potencia de las dos rectas GF. FB. pues aunque tiene quatro lados, se dize formado de dos, porque los opuestos GF. DB. son iguales, y tambien GD. FB.

Quando los quadrados, y rectangulos no estàn formados, se nombran por las mesmas lineas de que se pueden formar, como el quadrado DC. es el que se puede formar de DC. El rectangulo BF. FG. es el que puede formar la recta BF. con FG.

Quando las dos rectas tienen vn punto comun, se nombran para mas compendio con solas tres letras, como el rectangulo GEF. es el que se puede formar de las rectas GE. EF. El rectangulo GFE. es el de GF. FE. *Estos modos de hablar importan mucho para la inteligencia de los Autores.*

Todo lo dicho se puede aplicar à los paralelogramos, que no son rectangulos, substituyendo en lugar del quadrado al Rhombo, y en lugar del *oblongo*, o rectangulo prolongado al rhomboide.

16. P. *De los Polygonos.*

LAs figuras que tienen mas de quatro lados, y angulos, se llaman Polygonos. Si todos los lados, y angulos son iguales, son los Polygonos ordenados, o regulares. Sino son todos los lados, y angulos iguales, seràn Polygonos irregulares.

Pentagono es Polygono de cinco angulos, y lados. *Hexagono* de seis. *Heptagono* de siete. *Octagono* de ocho. *Enagono*, ò *nonagono* de nueve. *Dezagono* de diez. *Onzagono* de onze. *Dozagono* de doze, &c. Tambien las suelen llamar vulgarmente *cincauad*, *seisauado, setauado, ochauado, nonauado, &c.* ò *cincauo,*

sei-

seisauo, setauo, &c. En todos los Polygonos la recta que junta dos angulos opuestos, se dize *diagonal*, ò *diagonio.*

17. P. *Del contacto, inscripcion, y circunscripcion*, fig. 4.

VNa quantidad toca à otra, quando solo tiene con ella vn punto comun; y no pueden tener mas, aunque se continùen entrambas: y aquel punto comun es el del *contacto*. Sucede esto entre dos lineas, vna recta, y otra curva, ò entre dos curvas, ò entre vn angulo, y vna linea recta ò curva.

Dos circulos se tocan interiormente, quando el vno està dentro del otro, y tienen vn punto comun, como ARS. AMN. se tocan en A. interiormente, si el punto A. es comun.

Dos circulos se tocan exteriormente, si el vno està fuera del otro, y tienen vn punto comun, como HAD. MAN. se tocan si A. es comun.

Recta Tangente del circulo, es la recta que tiene con el circulo vn punto comun, como BC. es tangente de los circulos HAD. MAN. RAS. y les toca à todos, si el punto A. es comun à la recta, y à los tres circulos.

Vn angulo toca à la recta, ò la recta al angulo, si tienen vn punto comun, como el angulo HAD. toca à la recta BC. en A. y la recta al angulo: lo mesmo es de las lineas circulares, y qualesquiera otras curvas.

Figura inscripta en otra, es la que con sus angulos toca los lados de la otra, y aquella se llama *circunscripta*, como el quadrado HD. està inscripto en BE. y BE. circunscripto à HD. assimesmo HD. està inscripto en el circulo HFDA. y el circulo circunscripto, y BE. està circunscripto al circulo, y el circulo inscripto en BE. lo mesmo es de qualesquiera otras

figu-

figuras, assi respeto del circulo, como de vnas con otras.

18. P. *De la razon de las quantidades.*

La *razon* es el respeto, ò relacion de vna quantidad à otra del mesmo genero; como si se compara linea con linea, superficie con superficie, cuerpo con cuerpo. Pide la razon dos terminos. El primero que se compara, es *antecedente*. El segundo à quien se compara, es *consequente*.

Vna cantidad respeto de otra, ò es igual, mayor, ò menor. Si se compara igual à igual, se dize *razon de igualdad*, como 4. à 4. Si se compara la mayor à la menor, se dize *razon de mayor desigualdad*, como 4. à 2. Si menor à mayor, es *razon* de menor desigualdad, como 2. à 4.

Si la cantidad mayor contiene algunas vezes justamente à la menor, se dize *multiplice*: y la menor se dize *parte aliquota*, porque tomada algunas vezes, compone enteramente à la otra, como 6. es multiplice de 2. porque justamente le contiene tres vezes: y 2. es parte aliquota de 6. porque el 2. tomado tres vezes, compone enteramente al 6. y assi es vn tercio. Las otras partes, que no se pueden ajustar, se llaman *aliquantas*, como 2. es parte aliquanta de 5. y 5. de 7. &c.

La *razon multiplice* toma el nombre de las vezes, que la mayor contiene à la menor: si la contiene dos vezes, como 4. à 2. es dupla: si tres vezes, como 6. à 2. es tripla, &c.

Submultiplice, es quando la parte aliquota se compara à la cantidad multiplice: y si le contiene dos vezes, es *subdupla*, como la razon de 2. à 4. si tres vezes es *subtripla*, como 2. à 6. &c. Otras especies de razon no son aqui tan necessarias, puedense ver en mi Arithmetica, lib. 1. cap. 11.

Qualquiera Razon es, ò *Racional*, ò *Irracional*. Ra-

Racional, es la que se puede explicar por numeros: como la razon de 6. à 3. &c. *Irracional*, es la que no se puede explicar por numeros enteros, ni quebrados: tal es la razon que tiene el lado del quadrado con su diametro, y otras muchas, que no son necessarias par a la inteligencia de este Libro.

19. P. *De las razones semejantes, y proporcion.*

VNa razon es igual, ò semejante à otra siempre que el *antecedente* de la vna igualmente contiene, o es contenido de su *consequente*, que el antecedente de la otra contiene, ò es contenido de su *consequente*, ò quando el antecedente tiene el mesmo respeto, y orden à su consequente, que otro antecedente à su consequente, porque entonces es la continencia, ò modo de medida semejante; y la razon se dize vna mesma, ò semejante, ò igual, que en esta materia todo significa lo mesmo, como la razon de 4. à 2. es igual, ò semejante à la de 6. à 3. porque como el 4. es duplo de 2. assi 6. es duplo de 3. La razon de 2. à 4. es igual, ò semejante à la de 3. à 6. porque como 2. es mitad de 4. assi 3. es mitad de 6. La razon de 3. à 2. es semejante à la de 6. à 4. porque como 3. contiene vez y media al 2. assi el 6. contiene vez y media al 4.

Proporcion (segun la explicacion de Euclides) es la igualdad, ò semejança de dos razones: llamase en Griego *Analogia*; y como vna razon tiene dos terminos, la proporcion, que pide dos razones, tiene quatro terminos, dos *antecedentes*, y dos *consequentes*, que se llaman *terminos proporcionales*: y pues la razon de 4. à 2. es como la de 6. à 3. hazen las dos razones vna proporcion; y los quatro terminos son proporcionales 4. à 2. como 6. à 3.

Proporcion racional es la que se puede explicar por numeros, como la precedente. *Irracional*, la que no se se puede explicar por numeros, como la que tienen los lados de los quadrados con sus diametros.

Proporcion continua, es quando el termino 1º al 2º tiene la misma razon que el 2º al 3º y que el 3º al 4º y el 4º al 5º &c. de suerte, que siempre se và continuando la mesma razon; y se dizen los terminos, tres, quatro, ò cinco *proporcionales continuos*, conforme el numero de los terminos, como los siguientes 1.2.4.8.16.&c. porque 1. es mitad de 2. y 2. de 4. y 4. de 8.&c. Quando son tres terminos continuos proporcionales, se dà tambien proporcion, y en la verdad son quatro terminos, porque el segundo se toma dos vezes, como 1. à 2. assi 2. à 4. con que siendo continuos 1. 2. 4. se toma el 2. dos vezes: la primera, como *consequente*, y la segunda, como *antecedente*.

20. P. *Comparacion de los terminos proporcionales*.

LOs terminos proporcionales se pueden comparar *directamente*, *alternando*, *invirtiendo*, *componiendo*, *diuidiendo*, *y conuirtiendo*. Todo esto se explicarà en los quatro terminos proporcionales siguientes. Y se ha de advertir, que en lugar de las letras B.C.D.E. se pueden poner qualesquiera numeros, lineas, superficies, ò cuerpos, con tal que compongan dos razones semejantes, aora sean racionales, ò irracionales.

Razon 1.		*Razon* 2	
Anteced.1.	*Conseq*.1.	*Anteced*.2.	*Conseq*.2.
1.*term*.	2.*term*.	3.*term*.	4.*term*.
B.4. à	C.2.	D.6. à	E.3.

Comparacion directa, es quando se compara el *antecedente* 1º à su *consequente* 1º y el 2º al 2º como B. à C. assi D. à E.

Alterna, es quando se toman los terminos alternativamente: B. à D. como C. à E.

Inversa, es quando se compara el consequente à su antecedente. C. à B. como E. à D.

Componer, es comparar la suma, ò agregado del antecedente, y consequente al mismo consequente: explicase la suma con este signo + que quiere dezir *Mas*: como B. + C. à C. es como D. + E. à E. esto es B. y C. à C. son como D. y E. à E. ò B. mas C. à C. como D. mas E. à E. Esto es la suma de B. y C. à C. tiene la razon que la suma de D. y E. à E.

Diuidir, es comparar la diferencia del antecedente, y consequente al mesmo consequente: explicase con este signo — que quiere dezir *Menos*. B—C. à C. como D.—E. à E. esto es B. menos C. à C. es como D. menos E. à E. Esto es la diferencia entre B. y C. tiene la mesma razon à C. que la diferencia entre D. y E. tiene à E.

Conuertir, es invertir la composicion, y division: componiendo es B. + C. à C. como D. + E. à E. luego convirtiendo serà C. à B. + C. como E. à D. + E. Item dividiendo, es B—C. à C. como D—E. à E. luego convirtiendo C. à B—C. como E. à D—E.

De los quatro proporcionales el 1º y 4º son los *estremos*: el 2º y 3º son los *medios*. En la proporcion continua los medios siempre son dos menos que el numero de los terminos: con que si los terminos continuos son tres, ay vn medio: si quatro, ay dos medios: si cinco, ay tres medios, &c.

21. P. *De la razon compuesta, duplicada, y triplicada, &c.*

RAzon compuesta, es la que se compone de otras, como vn numero de otros. Si huviere, pues, muchas cantidades de vna especie, la primera à la vltima se dize, que tiene la razon compuesta de las razones intermedias, como en el exemplo siguiente.

1º	2º	3º	4º
B.27.	C.9.	D.3.	F.1.

Si

Si fueren tres quantidades continuas, ò no continuas; B.C.D. serà la razon de B à D. compuesta de la razon de B. à C. y de C. à D. assi como la distancia de B. à D. es compuesta de B. à C. y de C. à D. Assimismo si son quatro B.C.D.E. la razon de B. à E. se compone de B. à C. de C. à D. y de D. à E. &c.

Razon duplicada, es vna razon compuesta de dos razones semejantes continuas, ò razon compuesta dos vezes de otra, como si B.C.D. son proporcionales continuos, porque la razon de B. à C. es la mesma que C. à D. y la de B. à D. es compuesta de las dos iguales, se dize compuesta dos vezes de vna mesma, y assi duplicada de la razon de B. à C. *Esto quiere sumo cuydado.*

La razon, pues, *dupla*, y *duplicada* se diferencian en esto: que la *dupla* es quando vn termino es duplo del otro, como 4. à 2. La *duplicada* es quando vna razon (sea la que fuere dupla, tripla, ò quadrupla) se toma dos vezes, como la razon de B. à C. es tripla: la de C. à D. es tambien tripla; pero la de B. à D. es compuesta de dos razones triplas continuadas; y assi es *duplicada* de B. à C. esto es, compuesta dos vezes de la razon tripla de B. à C. &c.

Razon triplicada de otra, es tres vezes compuesta de la otra, y se diferencia de la tripla, como la *duplicada* de la dupla; de suerte, que si B. 8. C. 4. D. 2. E. 1. son quatro proporcionales continuos, en razon dupla, ò quadrupla, &c. la razon de B. à E. que es compuesta de las tres iguales B. à C: C. à D: D. à E. y es *triplicada* de la razon dupla B. à C. porque se compone della tres vezes, de donde infiero esta conclusion general.

Si huviere muchos terminos proporcionales continuos en qualquiera especie de razon, el 1° al 3° tiene la razon duplicada del 1° al 2° el 1° al 4. triplicada: el 1° al 5° quadruplicada, y assi infinitamente.

22.P. *De la division, y composicion proporcional,* fig. 3.

LAs cantidades se dividen, y componen proporcionalmente entre si, quando las partes de la vna se hazen proporcionales à las de la otra, como las rectas RH. DB. estàn divididas proporcionalmente entre si; porq̃ RM. à MH. es como DC. à CB. y los rectangulos OH. GB. estàn divididos proporcionalmente si RN. à NH. es como DE. à EB. lo mismo es en qualesquiera otras cantidades.

Vna cantidad està dividida proporcionalmente, ò segun media, y estrema razon, quando la parte menor à la mayor tiene la mesma razon, que la mayor à toda la cantidad, como si BC. à CD. es como CD. à BD. estarà BD. dividida proporcionalmente: lo mismo es del paralelogramo BG. si BE. à ED. es como ED. à BG. llamase media, y estrema razon, porque de tres proporcionales continuos se hallan alli el medio, y los estremos; pues la parte mayor es media proporcional entre la menor, y toda.

Figuras semejantes son las que se componen de iguales angulos, con el mesmo orden comprehendidos de lados proporcionales, como el rectangulo OH. Si es equiangulo à GB. y OS. es à SH. como GF. à FB. serà OH. semejante à GB. lo mismo es de los triangulos RSH. y DFB. y de otras figuras.

Los lados proporcionales, que se oponen à iguales angulos, se llaman lados *Homologos*.

Reciprocas figuras son las que tienen los lados *reciprocos*; esto es, que de quatro proporcionales, los dos estremos estàn en vna figura, y los dos medios en otra: como si en los triangulos RHS. y FBC. son proporcionales RH. à FB. como BC. à HS. seràn los lados reciprocos, y las figuras reciprocas. Lo meſmo es de los rectangulos OH. EB.

23. P. *De los ſolidos en comun.*

L*inea perpendicular à vn plano*, es la que corta al plano en vn punto, y es perpendicular à todas las rectas del plano, que paſſan por aquel punto.

2 *Comun ſeccion de dos planos* es la linea comun, ò que ſe halla en dos planos, que ſe cortan.

3 *Vn Plano es perpendicular à otro*, quando todas las rectas, que eſtàn en èl, perpendiculares à la comun ſeccion, ſon tambien perpendiculares al otro plano.

4 *Plano inclinado al otro* es el que no es perpendicular. *La inclinacion* ſe mide por el angulo agudo, que hazen dos perpendiculares à la comun ſeccion, y ſalen de vn punto comun, cada vna por ſu plano. *Inclinacion ſemejante* es la que tiene igual angulo, ò medida.

5 *Planos paralelos* ſon los que ſiempre diſtan igualmente, aunque infinitamente ſe continuen.

6 *Solidos ſemejantes* ſon los que ſe terminan de ſuperficies ſemejantes, tantas en vno, como en otro, y con el meſmo orden.

7 *Angulo ſolido rectilineo* es el que ſe contiene de muchos angulos rectilineos, que eſtàn en diferentes planos, y ſolo tienen vn punto comun: y ſeràn ſemejantes, ò iguales quando los angulos planos de que ſe componen ſon iguales, y diſpueſtos con el meſmo orden.

24. P. *De los ſolidos en particular.*

1 P*Riſma* es vn ſolido que tiene por lo menos dos planos opueſtos paralelos, iguales, y ſemejantes.

2 *Paralelepiped.* es vn ſolido, que conſta de ſeis planos paralelogramos, que cada dos opueſtos ſon paralelos.

3 *Cubo* es vn ſolido que conſta de ſeis planos quadrados, como vna piedra por todas partes quadrada.

4 *Piramide* es vn ſolido comprehendido de tres, ò mas triangulos, que ſe terminan en vn punto. *Baſe* de la piramide es el plano en que inſiſte, ò eſtriva, y puede ſer triangulo, ò quadrilatero, &c. *Vertice* es el punto en que la piramide fenece.

5 *Piramide Conica* (en Latin *Conus*) es la que tiene por baſe vn circulo, y fenece en vn punto alto: *ſu Exe* es la recta del vertice al centro de la baſe: *ſu Lado* es la recta del vertice à la circunferencia de la baſe. Si el *Exe* es perpendicular a la baſe, ſe dize eſta piramide *recta*: ſino, es *obliqua*, ò *eſcalena*.

6 *Cilindro* es vn ſolido, cuyos dos planos opueſtos ſon dos circulos iguales, y paralelos: *ſus baſes* ſon los dos circulos: ſu *Exe* la recta que junta los centros de las baſes. Si el *Exe* es perpendicular à las dos baſes, es el cilindro *recto*; ſino es obliquo, ò eſcaleno. *Lado* es la recta de vna circunferencia à otra. *Cilindros ſemejantes* ſon los que tienen los exes, y diametros de las baſes proporcionales, y lo meſmo es de las *Piramides Conicas*.

7 *Esfera*, *Globo*, ò *Bola* es vn ſolido comprehendido de vna ſuperficie, de cuyo centro todas las lineas à la ſuperficie ſon iguales, y ſe llaman *radios*, ò *ſemidiametros*. *El diametro* es la recta, que paſſa por el centro, y ſe termina à vna, y otra parte de la ſuperficie.

Solidos Regulares, y Ordenados ſon los q̃ conſtan de planos equilateros, y equiangulos, ò conſtan de planos Regulares de vna meſma eſpecie; eſtos no ſe pueden componer ſino de Triangulos, Quadrados, ò Pentagonos.

Tetaedro es solido que se comprehende con quatro triangulos equilateros, y equiangulos.

Hexaedro Regular el que consta de seis quadrados, y se llama *cubo*: que es vn dado perfecto.

Octaedro consta de 8. triangulos equilateros.

Dodecaedro consta de 12. pentagonos regulares equilateros, y equiangulos.

Icosaedro es solido que consta de 20. triangulos equilateros.

Solido inscripto en otro solido es quando todos sus angulos solidos tocan los lados, ò planos del otro solido, y este se dize *circunscripto*.

Fin de los Proemiales.

LI-

LIBRO I. DE EVCLIDES.

De las lineas, Triangulos, y Paralelogramos.

El que deseare aprovechar en la Geometria, ha de aplicar su primer cuidado en saber la materia de cada libro, el numero de sus proposiciones, y lo que cada vna contiene, por ser de suma importancia para la inteligencia de las demostraciones.

Este primer libro trata de las Lineas, Triangulos, y Paralelogramos: y en el texto de Euclides contiene 48. proposiciones; esto es 14. Problemas, que se dexan para la Geometria practica, y 34. Theoremas, que se han reducido à las 8. proposiciones siguientes.

Proposiciones del libro primero.

Prop. 1. *De las Lineas, que concurren.*
Prop. 2. *De las Paralelas.*
Prop. 3. *De los Angulos de las figuras.*
Prop. 4. *De los Triangulos en todo iguales.*
Prop. 5. *De las partes de vn Triangulo.*
Prop. 6. *De la desigualdad de los Triangulos.*
Prop. 7. *De los Paralelogramos en si mesmos.*
Prop. 8. *De los Triangulos, y Paralelogramos entre si.*

PRO-

PROPOSICION I.

De las lineas, que concurren.

1 *Los angulos, que se forman en vn punto sobre vna recta linea, son tanto como dos rectos.*

2 *Si los angulos de vn punto son tanto como dos rectos, se formaràn sobre vna linea recta.*

3 *Si son mas, ò menos, que dos rectos, no se forman sobre vna linea.*

4 *Los angulos que se pueden formar en vn punto, son tanto como quatro rectos.*

5 *Si dos lineas se cortan, los angulos verticales opuestos son iguales entre si.*

Demostracion fig. 1.

1 *Sobre la linea AB. en el punto E. formense qualesquiera angulos AEC. CEB. ò AEF. FEB. ò AEC. CEF. FEB. digo q̃ son tanto como dos rectos.* Porque si del punto E. se imagina descrito el circulo AGBD. siendo los arcos AC. CB. iguales, seràn los angulos AEC. GEB. rectos iguales (11. P.) y si la linea EF. corta los arcos BF. FA. desiguales, los dos juntos seràn tanto como el semicirculo ACB. luego los dos angulos BEF. FEA. son tanto como dos rectos (11. P.) y porque los tres arcos BF. FC. CA. son vn semicirculo, son los tres angulos BEF. FEC. CEA. tanto como dos rectos &c.

2 *Si los dos angulos AEF. FEB. ò los tres AEC. CEF. FEB. son tãto como dos rectos, digo que serà AEB. vna recta.* Porque seràn los arcos AC. CF. FB. vn semicirculo (11. P.) luego AEB. serà vn diametro (8. P.) y assi serà vna recta linea (8. P.)

3 *Si dos angulos AEC. CEF. fueren menos que dos rectos: no seràn AE. EF. vna recta: y si los dos GEC. CEB. ò los tres GEC. CEF. FEB. fueren mas que dos rectos, no seràn GE. EB. vna recta, &c.* Porque los angulos que se forman sobre vna linea, ni son mas, ni menos que dos rectos (1. N.) luego los que son mas, ò menos que dos rectos, no se forman sobre vna linea.

4 *Todos los angulos que se pueden formar en vn punto E. son tanto como quatro rectos.* Porque todos los angulos del punto E. comprehenden enteramente al circulo en los arcos AC. CE. FB. BD. DG. GA. cuyo centro es el punto E. luego comprehenden las quatro quartas partes del circulo, que son quatro angulos rectos (11. P.) luego todos los angulos AEC. CEF. FEB. BED. DEG. GEA. son tanto como quatro rectos.

5 *Si dos rectas CD. GF. se cortan en E. los angulos verticales, que son los opuestos CEF. GED: ò CEG. FED. son iguales entre si.* Porque si desde el centro E. se descrive vn circulo, seràn iguales los semicirculos GAF. AFB. (8. P.) y quitando el arco comun GAG. quedaran iguales arcos CF. GD. (4. P.) luego los angulos opuestos CEF. GED. tienen iguales medidas, y assi son iguales (10. P.)

De la mesma suerte los verticales opuestos, y obtusos GEC. FED. seràn iguales. Porque los semicirculos FDG. DGC. son iguales (8. P.) luego quitado el arco comun DG. quedan iguales los arcos FD. GAC: y tambien los angulos opuestos FED. GEC. (10. P.)

PROPOSICION II.

De las Paralelas.

1 *SI dos rectas son Paralelas, y otra las corta; haze los angulos externos opuestos iguales.*

2 *Tambien haze los angulos alternos iguales.*

3 *Los internos de vna parte son tanto como dos rectos.*

4 *Al contrario: si vna recta haze con otras todos los angulos dichos, son paralelas.*

5 *Si las dos lineas no son paralelas, no hazen dichos angulos; y si no hazen dichos angulos, no son paralelas.*

Demonstracion. fig. 2.

1 *SEan AB. CD. paralelas, y cortelas qualquiera recta EF. digo que entra en la primera, y sale de la segunda con iguales angulos; esto es, que los angulos externos opuestos EHC. FGB. son iguales.*

Porque la recta EF. entra en las paralelas con iguales angulos (13. P.) son los angulos 1° y 4° iguales: y pues el 4° y 6° son tambien iguales, por ser verticales (1. l. 1.) luego tambien el 1° y 6°. son iguales (3. P.) luego entra, y sale con iguales angulos; y assi los angulos externos opuestos son iguales.

2 *La recta EF. corte à las paralelas AB. CD. Digo que los angulos alternos 2. y 4. que son los dos internos opuestos à partes contrarias, son iguales.* Porque el angulo 1° y 2° son iguales por ser verticales (1. l. 1.) Tambien el 1° y 4° son iguales, porque EF. entra en las paralelas con iguales angulos (13. P.) luego

luego el 2° y 4° son iguales (3. P.) que son los alternos, ò internos opuestos.

3 *Si EF. corta à las paralelas AB. CD. los angulos internos à vna mesma parte. 2. y 5. son iguales à dos rectos, y tambien 3. 4.* Porque el 4° y 5° son tanto como dos rectos por estàr en vn punto sobre vna recta (1. l. 1) siendo el 4° igual al 2° por ser alternos (2. N.) serà el 2° y 5° tanto como dos rectos, que son los internos à vna parte.

4 *Si EF. haze con las rectas AB. CD. los angulos externos opuestos 1. y 6. iguales, ò los alternos 2. y 4. iguales: ò los internos à vna parte 2. y 5. tanto como dos rectos, digo que AB. y CD. paralelas.* Porque la paralela que ha de passar por G. ha de hazer dichos angulos (*Num.* 1. 2. y 3.) y pues por el punto G. no puede otra recta que AB. formar los mismos angulos (10. P.) serà la recta AB. paralela à CD.

5 *Si AB. y CD. no son paralela, la recta FE. que las corta, no haze dichos angulos; y si EF. no haze dichos angulos, no seràn AB. y CD. paralelas.* Porque si fueran paralelas, formàran dichos angulos (1. N.) y si formàran dichos angulos, fueran paralelas (4. N.) &c.

PROPOSICION III.

De los angulos de las figuras.

1 *LOs angulos de vn triangulo son iguales à dos rectos.*

2 *Si vn lado se continua, el angulo externo es igual à los dos internos opuestos.*

3 *Los angulos de qualquier rectilineo son doblados rectos, menos 4. que los lados.*

4 *Los externos todos de vn rectilineo son iguales à quatro rectos.*

Consectarios.

5 *Si vn angulo de vn triangulo es recto; los otros dos hazen otro recto, y cada vno es agudo menor que recto.*

6 *Los angulos de vn rectilineo son iguales à los de otro de tantos lados.*

7 *Si vn angulo es igual à otro, las sumas de los otros son tambien iguales; y al contrario.*

Demonstracion. fig. 3.

1 E*N el triangulo ABC. los tres angulos d. b. e. son tanto como dos rectos, y lo mesmo es en todos los triangulos.* En el triangulo ABC. considerese FBD. paralela à la base AC. luego los angulos alternos *a.* y *d.* son iguales; y tambien *c.* y *e.* (2. l. 1.) luego si se añade à cada parte el angulo *b.* los tres angulos *a. b. c.* son iguales à los tres *d. b. e.* (4. P.) y pues los tres *a. b. c.* hazen tanto como dos rectos por formarse en vn punto (1. l. 1.) los tres del triangulo *d. b. e.* seràn iguales à dos rectos.

2 *En el triangulo ABC. continuado el lado AC. hasta G. el angulo externo BCG. es igual à los dos internos opuestos* b. y d. Porque el angulo BCG. con el angulo *e.* haze dos rectos (1. l. 1.) los angulos *d. b.* con *e.* tambien hazen dos rectos (1. N.) luego el angulo externo BCG. es igual à los dos internos opuestos *d. b.* &c.

3 *Sea vn rectilineo ACDEF. de cinco lados: el numero duplo es 10. quitando 4. quedan 6. digo que todos sus angulos valen tanto como 6. angulos rectos, y assi en todos los otros, quitando siempre 4. del numero duplo de los lados.* Porque si se toma dentro qualquier punto B. y se tiran BA. BC. BD. BE. BF. se formaràn tantos

tos triangulos como lados: y pues cada triangulo tiene tanto como dos angulos rectos (1. N.) todos los angulos seràn doblados rectos, que los lados: y quitando los angulos, que se forman en el punto B. iguales à quatro rectos (1. l. 1.) quedaràn los angulos de la figura doblados rectos menos 4. que los lados, &c.

4 *En qualquiera rectilineo ACDEF. continuados afuera todos sus lados, todos los angulos externos son tanto como 4. rectos.* Porque el externo DCG. con su immediato interno DCA. es tanto como dos rectos (1. l. 1.) y cada externo con su interno es dos rectos: luego todos los externos con todos los internos son doblados rectos, que los lados de la figura: luego porque los internos son doblados rectos, menos 4. que los lados, suplen los externos estos 4. rectos, y assi son iguales à 4. rectos

Los Consectarios son tan claros, que no necessitan de explicacion.

PROPOSICION IV.

De la total igualdad de los triangulos.

1 S*I los tres lados de vn triangulo fueren iguales à los tres lados de otro triangulo vno à vno, todo lo demàs serà igual.*

2 *Tambien si dos lados iguales à dos del otro comprehenden iguales angulos, todo lo demàs serà igual.*

3 *Si dos angulos de vn triangulo son iguales à dos de otro, y comprehenden iguales lados, todo es igual.*

4 *Si dos lados fueren iguales à dos del otro, y el angulo opuesto al vn lado fuere igual, y el otro angulo opuesto al otro lado fuere de la mesma especie en vno, y otro triangulo, todo lo demàs serà igual*

Demonstracion fig. 4.

1 *EN los triangulos ABC. ADC. sean iguales los lados AB. AD. tambien BC. DC. y AC. comun; digo que todo lo demàs es igual; esto es, los angulos cada uno de por si son iguales à los del otro.* Porque si se doblare el triangulo ABC. sobre ADC. siendo las rectas CB. y AB. radios de los circulos BFD. BGD. no se podràn juntar, sino es en el punto D. donde se cortan los circulos: luego todo el triangulo ABC. se ajustarà con el triangulo ADC. y seràn iguales los angulos B y D. tambien los angulos CAB. y CAD. y los angulos ACB. y ACD. (1. P.)

2 *En los triangulos ABC. ADC. sean iguales los lados AB. AD. tambien AC. AC. y el angulo comprehendido BAC. DAC: digo que todo lo demàs es igual.* Porque si se doblare el triangulo ABC. sobre ADC. se ajustarà el angulo CAB. con CAD. y la recta AB. con la recta AD. por ser iguales (1. P.) luego como el punto B. caiga sobre D. caerà la recta CB. sobre CD: luego se ajustaràn los triangulos ABC. ADC. y los angulos D. B. seràn iguales, tambien BCA. DCA. y los lados CB. CD. &c.

3 *En los triangulos BAC. DAC. sean iguales los angulos BAC. DAC. y BCA. DCA. y los lados AC. AC. comprehendidos de los angulos; digo que todo lo demàs es igual.* Porque descritos desde A. y C. los arcos BFD. BGD. seràn iguales BG. GD. por ser medida de iguales angulos, y por la mesma razon seràn tambien iguales los arcos FB. DF. (10. P.) luego si el triangulo ABC. se doblare sobre ADC. se ajustaràn los arcos BF. FD. y tambien DG. BG. (1. P.) luego el punto B. cae sobre D. y se ajusta el triangulo ABC. sobre ADC. y seràn iguales los lados AB. AD: y CB. CD. y los angulos B. D. &c.

Si los lados AC. AC. fueren iguales, y los angulos BAC. DAC. y tambien B. y D. todo lo demàs serà igual. Porque el tercer angulo BCA. serà igual à DCA. *por el consect.* (3. l. 1.) luego se demostrarà la proposicion como antes.

4 *En los triangulos ABC. ADC. sean iguales los lados AB. AD. y AC. AC. y el angulo BCA. opuesto al lado AB. igual al angulo BCA. el qual se opone al igual lado AD; y el angulo E. opuesto al lado AC. sea de la misma especie que el angulo D. que se opone al igual lado AC: digo que todo lo demàs es igual.* Porque si desde A. se describe el circulo BDE. y desde C. el arco BFD. continuando el lado CD. hasta E. y se doblare el triangulo ABC. sobre ADC. se ajustarà el angulo ACB. cō ACD. su igual (1. P.) luego el punto B. caerà en D. ò en E. porque AD. AE. son iguales à AB. y si DE. se dividiesse en dos partes iguales en H. en los triangulos AHD. AHE. seràn iguales los lados AD. AE. y DH. EH. y AH. comun: luego los angulos AHE. AHD. son iguales, y rectos, y AEH. ADH. son iguales, y agudos (1. N.) luego el angulo ADC. serà obtuso: luego siendo ABC. tambien obtuso por ser de la misma especie, caerà el punto B. sobre D. y no sobre E. luego como ajustandose los triãgulos ABC. ADC. seràn en todo iguales. La mesma demonstracion es en todos los casos, aunque el lado AC. no sea comun, porque dos lados iguales se pueden ajustar, y formar vn lado comun.

PROPOSICION V.

De las partes de vn triangulo.

1 *EN el triangulo isosceles los lados iguales se oponen à iguales angulos.*

2 *Y los angulos iguales à lados iguales.*

3 *En qualquier triangulo, el mayor lado se opone à mayor angulo, y el angulo mayor à mayor lado.*

4 *La suma de qualesquiera dos lados son mayores que el tercero.*

Consectarios.

5 *El triangulo equilatero es equiangulo, y al contrario.*

6 *En el triangulo isosceles la recta que parte igualmente, la base parte tambien el angulo, y si parte igualmente el angulo, tambien la base, y siempre es perpendicular, y al contrario.*

7 *Si la perpendicular parte igualmente la base del triangulo, parte tambien igualmente el angulo; y si parte igualmente el angulo, tambien la base: y la recta que parte igualmente la base, y angulo es perpendicular, y siempre el triangulo serà isosceles.*

8 *Si dos rectas iguales caen de vn punto sobre otra recta, entrambas se apartan igualmente de la perpendicular, y hazen con ella iguales angulos, y al contrario.*

9 *La perpendicular es la mas breue linea que de vn punto puede caer sobre otra.*

Demonstracion. fig. 5.

1 S*Ean en el triangulo ABC. iguales los lados AB. AC: digo que seràn tambien iguales los angulos opuestos* c. *y* b. La recta Ae. parte por medio el angulo A: luego porque los lados BA. Ae. son iguales à CA. Ae. y comprehenden iguales angulos BAe. CAe. serà todo lo demàs igual (4. l. 1.) estoes, el angulo *b*. igual à *c*. y el segmento *be*. à *ec*. y el angulo *e*. à *o*: luego son rectos, y Ao perpendicular (11. P.) de aqui nacen los Consectarios 5° 6° 7° 8°.

2 *En el triangulo ABC. sean iguales los angulos b.*

b. y c: digo que tambien los lados opuestos AB. AC. son iguales. Porque dividiendo Ae. igualmente al angulo A. y siendo iguales los angulos BAe. CAe. y el lado Ae. todo el triangulo AeB. es igual à AeC. (4. l. 1.) luego AB. AC. son lados iguales opuestos à iguales angulos *b*. y *c*.

3 *En el triangulo ADC. sea el lado AD. mayor que AC. digo q̃ serà el angulo C. opuesto à AD. mayor que D. opuesto à AC.* Porque tomando à AB. igual à AC. y tirando la recta BC. seràn iguales los angulos *b.c.* (1. N.) y porque el angulo *b*. es externo al triangulo CDB. serà *b*. mayor que D. (3. l. 1.) luego *c*. que es igual à *b*, es tambien mayor que D. y ACD. aun es mayor que *c*: luego serà mayor que D. (4. P.)

En el triangulo ADC. si el angulo ACD. fuere mayor que el angulo D. serà el lado AD. opuesto à C. mayor que el lado AC. opuesto à D. Porque si los lados AD. AC. fueran iguales, serian tambien iguales los angulos C.D. (1. N.) si AC. fuera mayor que AD. seria tambien el angulo D. mayor que C. todo lo qual es contra la Hypothesi; luego AD. mayor es que AC.

4 *En qualquier triangulo ACD. la suma de qualesquiera dos lados AC. CD. es mayor que el tercero.* Porque siendo AD. linea recta, es la mas breve distancia entre los puntos A. y D. (6. P.) luego AD. es menor que AC. y CD. *Los Consectarios* 5. 6. 7. y 8. nacen del *numero* 1.

Consectario 9. Si del punto A. cayere Ae. perpendicular sobre BC. serà Ae. la mas breve linea que desde el punto A. se puede tirar à la recta BC. porque tirando qualquiera otra AB. y siendo en el triangulo AeB. el angulo *e*. recto, serà el angulo *b*. agudo menor que recto (3. l. 1.) luego AB. que se opone à mayor angulo *e*. serà mayor que Ae. (3. N.) y serà vnica, porque ningun otro angulo *b*. puede ser recto (3. l. 1.)

PRO-

PROPOSICION VI.

De la desigualdad de los triangulos.

1 *Si dos triangulos tuuieren dos lados iguales, el que tuuiere mayor angulo tiene mayor base.*

2 *Y el que tuuiere mayor base, tendrà mayor angulo.*

3 *Si dos triangulos tuuieren la mesma, ò igual base, el que tuuiere sobre ella vn angulo menor, y el otro ò igual, ò menor, tendrà menores lados.*

4 *Mas los menores lados comprehenderàn mayor angulo.*

5 *Si de qualquier punto dentro de vn triangulo se tiraren lineas à los terminos de la base, sucederà lo mismo que en todo lo dicho.*

Demonstracion, fig. 6.

1 *En los triangulos BAD. BAC. es AB. lado comun, ò igual: y AC. AD. lados iguales mas el angulo BAC. es mayor que BAD: digo que la vase BC. es mayor que BD.* Porque en el triangulo AEC. los dos lados AE. EC. son mayores que AC. (5.l.1.) y AC. igual à AD: luego AEC. son mayores que AED: luego si de desiguales AEC. AED. se quita el espacio comun AE. quedarà EC. mayor que ED. y si à desiguales CE. DE. se añade el espacio comun ED. seràn CED. mayores que DEB. (4. P.) pues los dos lados DEB. son mayores que DB. (5.l.1:) luego CEB. esto es, la base CB. mayor es que DB. (4. P.)

2 *En los triangulos BAC. BAD. sea BA. lado comun, y DA. CA. lados iguales, y la vase CB. mayor* que

mayor que DB: digo que el angulo opuesto CAB. es mayor que DAB. Porque si los angulos fueran iguales, siendo comprehendidos de los lados AC. BA. que son iguales à BA. AD. fueran tambien iguales las bases BC. BD. (4. l. 1.) Lo qual es contra la Hypothesi: luego los angulos BAC. BAD. son desiguales, y porque el mayor angulo tiene mayor base (1. N.) luego porque la base BC. se suponga mayor que DB. serà el angulo que se opone à ella BAC. mayor que BAD.

3 *Los triangulos BAC. BAE. tienen la base AB. comun, ò igual, y tambien el angulo ABE. y el angulo BAE. menor que BAC: digo que la suma de los lados AE. EB. es menor que AC. CB.* Porque en el triangulo ACE. los dos lados AC. CE. son mayores que AE. (5.l.1.) y añadiendo el espacio comun EB. seràn AC. CE. EB. mayores que AE. EB. (4. P.)

Y si el angulo ABF. fuere menor que ABC. seràn en el triangulo AFB. los lados AF. FB. menores que AC. CB. Porque continuando AF. hasta E. en el triangulo FEB. los dos lados FE. EB. son mayores que el tercero FB. (5. l. 1.) luego añadiendo el comun FA. seràn BE. EF. FA. mayores que BF. FA. (4. P.) y porque BC. CA. se han demostrado mayores q̃ BE. FA: luego BCA. seràn mucho mayores que BF. FA. (4.P.)

4 *En entrambos casos los lados menores comprehenden mayor angulo.* Porque en el triangulo ACB. los tres angulos son iguales à dos rectos, y tambien en el triangulo ABE: luego siendo la suma de los angulos ABE. EAB. menor que la de ABC. CAB. la resta AEB. mayor serà que ACB. (4. P.) lo mesmo se demuestra del angulo AFB.

5 *Si dentro del triangulo ACB. se tomare qualquier punto E. ò F. y se tiraren EB. EA. ò FB. FA. serà lo mismo.* Porque seràn los mesmos casos explicados en los

los numeros antecedentes, como se vè en la figura.

PROPOSICION VII.

Del Paralelogramo en si mesmo.

1 *SUs angulos, y lados opuestos son iguales.*
2 *Los diametros le parten, y se parten igualmente.*

3 *Lo mesmo es en qualquiera recta que passa por el centro, ò concurso de los diametros.*

4 *Un quadrilatero serà paralelogramo, si tiene dos lados paralelos iguales.*

5 *Tambien si los lados opuestos son iguales.*
6 *Tambien si los angulos opuestos son iguales.*

Demonstracion. fig. 7.

1 S*Ea qualquiera Paralelogramo ABCD. digo que sus lados opuestos DA. CB. son iguales: y tambien los angulos opuestos D. B: y tambien A. C.* Porque tirando el diametro AC: por ser ABDC. paralelas, los angulos alternos *f. a.* son iguales (2. l. 1.) y tambien *e. o.* porque AD. BC. son paralelas: luego siendo AC. lado comun à los dos triangulos ABC. ADC. y los angulos sobre la base *a. e.* iguales à *f. o.* todo es igual (4. l. 1.) AB. es igual à DC. y CB. à DA. y el angulo ABC. à CDA: y el angulo A. que es *a. o.* à C. que es *f. e.* luego los lados, y angulos opuestos son iguales.

2 *En el mesmo paralelogramo, digo que el diametro AC. parte al paralelogramo en dos partes iguales.* Porque el triangulo ADC. se ha demostrado igual al triangulo CBA. (1. N.) luego el diametro AC. parte al paralelogramo en dos partes iguales. De la mes-

mesma suerte que en el *num. 1.* se demostrarà el triangulo DCB. igual al triangulo DAB. con que tambien el diametro DB. parte igualmente al paralelogramo.

Y los diametros se parten tambien igualmente. Porque en los triangulos DGC: y AGB. los lados DC. AB. son iguales, por ser lados opuestos del paralelogramo (1. N.) y tambien los angulos opuestos *f.* y *a:* y tambien g. y *b.* (1. N.) luego porque en los triangulos DGC. AGB. angulos iguales comprehenden iguales lados, todo lo demàs es igual (4. l. 1.) esto es DG. y GB. tambien CG. y GA: luego los diametros se parten igualmente.

3 *Qualquier otra recta EF. si passa por el centro, ò interseccion de los diametros G. digo que se parte igualmente, y que tambien parte igualmente al paralelogramo AC.* Porque GC. GA. son iguales (2. N.) y los angulos alternos *e. o.* y *h. d.* (2. l. 1.) todo el triangulo AEG. es igual à GFC. y EG. à GF. (4. l. 1.) luego EF. se parte igualmente: y porque ABC. es la mitad del paralelogramo (2. N.) si le quitamos GFC. y en su lugar substituimos EGA. su igual, serà el trapecio EABF. igual al triangulo ABC. ò medio paralelogramo.

4 *Si en el quadrilatero ABCD. los lados opuestos DC. AB. son paralelos, y iguales, digo que es paralelogramo.* Porque si DC. AB. son paralelas iguales, seràn los angulos alternos *f. a.* iguales (2. l. 1.) y AC. lado comun: luego porque DC. CA. iguales à BA. AC. comprehenden iguales angulos *f. a.* todo es igual (4. l. 1.) DA. CB. y los angulos alternos *e. o.* iguales: luego CB. DA. son paralelas iguales, y AC. es paralelogramo.

5 *Si en el quadrilatero ABCD. los lados opuestos AB. DC. son iguales, y tambien AD. BC. digo que es paralelogramo.* Porque tirado el diametro AC. si DC. AB.

AB. son iguales, y tambien DA. BC. siendo AC. comun, todo el triangulo ADC. es igual à CBA. (4. l. 1.) luego los angulos alternos *e. o.* son iguales: luego CB. AD. son paralelas (2. l. 1.) y porque *s. a.* son iguales seràn DC. AB. paralelas (2. l. 1.) luego AC. es paralelogramo.

6 *Si en el Quadrilatero ABCD. son iguales los angulos opuestos A. y C: y tambien B. y D. digo que es paralelogramo.* Porque si los angulos C. A. son iguales, y tambien D. B. seràn C. B. tanto como D A: luego porque los quatro C. B. A. D. son tanto como quatro rectos (3. l. 1.) seràn C. B. tanto como dos rectos: luego por ser internos iguales à dos rectos, seràn DC. AB. paralelas (2. l. 1.) y à si mesmo, porque D. C. son iguales à A. B. y tanto como dos rectos seràn DA. CB. paralelas, y AC. paralelogramo.

PROPOSICION VIII.

De los Triangulos, y Paralelogramos entre si.

1 *Si tienen igual altura, estàn, ò pueden estar entre dos paralelas.*

2 *Vn triangulo es medio paralelogramo.*

3 *Los paralelogramos que tienen vna mesma, ò igual base, con igual altura, son iguales.*

4 *Los iguales si tienen igual base, tienen igual altura, y al contrario.*

5 *Si los paralelogramos tienen igual base, el que tiene mayor altura es mayor, y duplo, el que dupla, y al contrario.*

6 *Lo mesmo es de los triangulos entre si: pero si*

vn

vn triangulo tiene la base igual à la de vn paralelogramo, y la altura dupla, ò al contrario; serà igual al paralelogramo.

Demonstracion fig. 8.

1 Si *los paralelosgramos AD. BC. tienen iguales alturas CO. FH. digo que ellos, ò estàn, ò pueden estàr entre dos paralelas.* Porque como las alturas de las figuras se miden por los perpendiculos CO. FH. si los perpendiculos son iguales, seràn OH. CF. paralelas, por ser equidistantes: luego las figuras que tienen igual altura, si tienen las bases en recta OH. feneceràn en la recta CF y sino tienen las bases en OH. como se pueden poner sobre ella, podran estàr entre dos paralelas, y al contrario. Si las figuras estàn entre dos paralelas, tienen igual altura, porque las paralelas OH. CF. siempre tienen igual perpendiculo CO. FH. &c.

2 *Sea qualquiera triangulo Z. digo que es medio paralelogramo.* Porque si AC. se considera paralela à BD. y DC à BA. serà BC. paralelogramo, y el triangulo Z. su mitad (7. l. 1.) otra vez. Si BF. se considera paralela à DA. y DF à BA. serà AF. paralelogramo, y el triangulo Z. serà su mitad (7. l. 1.)

3 *Sean los paralelogramos AF. BC. en los casos 1. 2. 3. sobre vna mesma, ò igual base AB. digo que si tienen igual altura, ò estàn entre dos paralelas, son iguales.* Porque si las bases son iguales, se puede ajustar la vna sobre la otra (1. P.) y haràn vna mesma base: y siendo iguales las alturas, estaràn los *paralelogramos* entre dos paralelas (1. N) Considerense, pues, en todos los tres casos, los dos paralelogramos AF. BC. sobre vna base AB. y entre dos paralelas AB. CF: luego en el paralelogramo BC. los lados opuestos

CA.

CA. BD: y tambien en el paralelogramo AF. son iguales los lados AE. BF. (7. l. 1.) y porq CA. DB. son paralelas, la recta HA. entra en ellas con iguales angulos HBD. HAC. (13. P.) y assimesmo son iguales angulos HBF. HAE. por ser FB. EA. paralelas, y cortarlas HA: luego si de los angulos iguales HBD. HAC. quitamos los iguales HBF. HAE. quedaràn iguales angulos FBD. EAC. (4. P.) luego porq̃ los lados AC. AE. iguales à BD. BF. comprehenden iguales angulos EAC. FBD. todo el triangulo ACE. serà igual à BDF. (4. l. 1.) luego si en el *caso* 1° y 2° añadimos à cada triãgulo EAC; FBD. el comũ BDEA. resultarà el paralelogramo AF. igual à BC. y si en el *caso* 3° de los triangulos iguales CAE. DBF. quitamos el comun DGE. y añadimos el comun AGB. resultaràn los paralelogramos AF. BC. iguales (4. P.)

4 *Si los paralelogramos iguales BC. AF. estàn sobre vna mesma, ò igual base AB. digo que tienen igual altura, y al contrario.* Porque continuando la paralela CD. cortarà al paralelogramo AF. igual à BC. (3. N.) luego CD. passarà por EF. y seràn AC. EF. vna recta, y assi los paralelogramos BC. AF. estàn entre dos paralelas, &c.

Al contrario. Si las alturas son iguales, se demostraràn las bases iguales, tomando las alturas como bases, y las bases como alturas.

5 *Si dos paralelogramos tienen igual base, el que tiene mayor altura, es mayor; el que la tiene dupla, es duplo, &c. y al contrario.* Porque si los paralelogramos AD. AL. en el *caso* 3° tienen vna mesma base AB. continuando la paralela CDF. y los lados AGE. BLF. seràn iguales paralelogramos AD. AF. entre dos paralelas (3. N.) y porque todo AF. es mayor que su parte AL. (2. P.) serà tambien AD. mayor que AL. (3. P.) luego el que tiene mayor altura es mayor.

En

En el *caso* 2. MD. tiene doblada altura que MB: y porque MB. BC. tienen iguales alturas MA. AC. son iguales (3. N.) luego MD. que es igual à los dos MB. BC: porque se compone de ellos, serà duplo de MB. y assi el que tiene la altura dupla, es duplo, y si tripla, es triplo, &c.

Al contrario. Si consideramos que CA. CM. son bases: y CM. es dupla de CA: demostraremos que el paralelogramo CN. es duplo de CB. porque CB. y AN. son iguales (3. N.) y CN. es igual à los dos CB. AN. porque se compone de ellos (2. P.) luego CN. es duplo de CB. y assi quando la altura es igual, el que tiene la base dupla, es duplo, y el que tripla, es triplo, &c. y el que la tiene mayor, es mayor, &c.

6 *Lo mesmo es de los triangulos entre si.* Todo lo que se ha demostrado de los paralelogramos en los *num.* 1. 3. 4. 5. se demuestra de los triangulos entre si; porque vn triangulo es medio paralelogramo (2. N.) de donde se infiere, que si dos triangulos tienen igual base, y altura son iguales, *y al contrario*, si son iguales, y tienen igual base, tendràn igual altura: y si tienen igual altura, tendràn igual base. Si tienen igual base, el que tiene mayor altura, es mayor; y el que dupla, es duplo, &c. y si tienen igual altura, el que tiene mayor base, es mayor, y el que dupla, es duplo, &c.

Pero si vn triangulo tiene igual altura à la de vn paralelogramo, y tiene la base dupla: ò si tuviere igual base, y la altura dupla serà igual al paralelogramo.

Porque en el *caso* 2. si sobre la base CA. estàn el triangulo CAD. y el paralelogramo CB. es CAD. la mitad de CB. (2. N.) tambien si la base CM. del triangulo CMD. es dupla de la base CA: con la mesma altura CD. es el triangulo CAD. la mitad de CMD. (6. N.) luego el triangulo CMD. y el paralelogramo CF. son iguales (3. P.) de la mesma suerte si CD. se considera como base, y la altura CM. es dupla de CA: serà el triangulo CDM. igual

al

al paralelogramo CB. porque cada vno es duplo del triangulo CDA. (*num* 2. 16.)

Al contrario: Si el triangulo CDM. fuere igual al paralelogramo CB: y tienen igual base CD. tendrà la altura CM. dupla de la altura CA: y si tuviere doblada altura tendrà igual base; pero si CM. se considera como base, y fuere esta dupla que la base CA. del paralelogramo CB: tendrà igual altura CD: y si tuvieren igual altura CD. la base CM. del triangulo, serà dupla de la base del paralelogramo CA.

Las consequencias que de esto se pueden inferir, aunque son faciles, se veràn mejor en la *prop.* 1. del libro 6. de Euclides.

Prop. 47. y 48. de Euclides.

Tienen su lugar en el *lib.* 2. *prop.* 4. porque tratan de las potencias de las lineas.

Fin del Libro 1.

LI-

LIBRO II. DE EUCLIDES.

De la potencia de las lineas.

LA potencia de las lineas se explicò en el Proemial 15. Todo lo que se demostrarà en este libro 2. de Euclides, del Quadrado, y Rectangulos, conviene tambien al rhombo, y rhomboides, y à los triangulos que son sus mitades (8. l. 1.) Advierto esto en comun, porque no sea necessario repetirlo despues en cada proposicion.

Tiene este libro quatro Proposiciones.

PROPOSICION I.

De la diuision de vna recta en qualesquiera dos partes.

1 *EL Quadrado de toda, e igual à los rectangulos de toda, y de los mesmos segmentos.*

2 *Tambien à los quadrados de las partes, y à dos rectangulos de las mesmas.*

3 *Tambien al rectangulo de toda, y vn segmento con el quadrado del otro segmento, mas el rectangulo de los dos segmentos.*

4 *El Quadrado de toda, con el quadrado de vn segmento, es igual à dos rectangulos de toda, y del mesmo segmento con el quadrado del otro segmento.*

5 *El Rectagulo de toda, y vn segmento, es igual al quadrado del mesmo segmento, mas el rectangulo de los dos segmentos.*

Demonstracion, fig. 1. lib. 2.

1 *LA recta AB. estè diuidida en qualesquiera dos partes con el punto E. digo que el quadrado de toda la recta AB. es igual à los rectangulos ABE. y BAE. que se forman de toda la linea, y de sus partes.*

Formense los angulos A. y B. rectos, y AC. BD. sean iguales à AB: y junta CD. seràn AB. CD. iguales (7. l. 1.) y AD. serà el quadrado de toda la recta AB: y considerando ER. paralela a BD. y AC. serà AR. el rectangulo de toda la linea AC. ò AB. y AE: tambien el rectangulo ED. serà de toda la linea BD. ò BA. y de la parte EB: luego el quadrado AD. de toda la linea AB. es igual à los rectangulos AR. ED: formados de toda recta, y de sus partes, porque se compone de ellos (2. P.)

Lo mesmo se demostrarà, aunque la recta AB. se diuida en tres, ò mas partes.

Consectario. Si dos rectas AB. AC. son desiguales, y la recta AB. sola se diuide: el rectangulo AD. formado de las dos, serà igual à los rectangulos AR. ED: formados de toda la recta AC. y de las partes de AB. porque se compone de ellos.

Lo mesmo milita en el Rhombo, y Rhomboides, como se vè en la figura siguiente.

2 *Si la recta AB. està diuida en E. digo que el quadrado AD. de toda la recta AB. es igual à los dos quadrados de las partes AE. EB: y à dos rectangulos AEB. de las mesmas partes.*

Sea AD. el quadrado de AB: y tomense AF. AE. iguales: y ER. FG. paralelas à AB. AC: y seràn AE. FH. CR. y AF. EH. BG. iguales entre si (7. l. 1.) y tambien EB. HG. RD: y si de las iguales AB. AC. quitamos iguales AE AF. quedaràn iguales EB. FC. (4. P.) con que son iguales EB. HG. RD. FC. HR. GD. (7. l. 1.) luego HA. es quadrado de AE: y HD. quadrado de HG. que es EB. y HB. es rectangulo de EB. EH. ò EA: y HC. es rectangulo de HF. FC. que son AE. EB: luego el quadrado AD. de toda la recta AB. es igual à los quadrados HA. HD. de las partes AE. EB. y à los dos rectangulos HC. HB. de las mesmas partes AE. EB. porque se compone de ellos (2. P.)

3 *Si la recta AB. està diuidida en E. digo que el quadrado AD. de toda la recta AB. es igual al rectangulo BAE. de toda la recta BA. y del segmento AE: mas al quadrado del otro segmento EB: mas al rectangulo de las partes AEB.*

Porque AR. es rectangulo de toda AC. que es AB.

AB. y de la parte AE: y HD. es quadrado de HG ò EB: y HB. es rectangulo de las partes BE. EH. q̃ es EA. (2. N) luego el quadrado AD. es igual à los rectangulos AR. HB y al quadrado HD. porque se compone de ellos (2. P.)

Asi mesmo se demostrarà, que el quadrado AD. es igual à los rectangulos BR. HC. y quadrado EF: esto es, à los rectangulos ABE. BEA. y quadrado de AE.

4 *Si la recta AB. està diuidida en E. digo que el quadrado de toda AB. con el quadrado de vn segmento AE. es igual a dos rectangulos BAE. de toda, y del segmento AE. con el quadrado EB. del otro segmento.*

Supuesta la mesma construccion, los rectangulos AG. AR. son de toda la linea AB. ò AC. y del vn segmento AE. ò AF: luego porque AG. AR. incluyen los dos rectangulos HB. HC. y dos vezes al quadrado AH. si les añadimos el quadrado HD. del otro segmento EB. excederàn à todo el quadrado AD. en vn quadrado AH: luego el quadrado AD. con el quadrado AH. es igual à los dos rectangulos AG. AR. con el quadrado HD.

5 *Si la recta AB. està diuidida en E. digo que el rectangulo BAE. de toda, y de el segmento AE. es igual al quadrado del mesmo segmento AE. y al rectangulo de los dos segmentos AE. EB.*

Porque si las perpendiculares AF. EH. BG. se toman iguales al segmento AE: serà AH. quadrado de AE: y EG. rectangulo de los segmentos EB. EA. ò EH: y AG. rectangulo de toda AB. y de el segmento AE. ò AF: luego el rectangulo AG de toda, y del segmento AE. es igual al quadrado AH. y al rectangulo EG. esto es, al quadrado de AE. y al rectangulo AEB. porque se compone de ellos (2 P.)

Asi mesmo se demostrarà, que el rectangulo ABE. que es BR. es igual al quadrado de EB. que es HD.

y al

y al rectangulo de AE. EB. que es HB. porque se compone de ellos.

PROPOSICION II.

Diuision de la recta en dos partes desiguales.

1 *El quadrado de toda, es igual à 4. rectangulos de las partes, con el quadrado de su diferencia.*

2 *Los dos quadrados de las partes, son iguales à dos rectangulos de las mesmas, con el quadrado de su diferencia.*

3 *Y son la mitad del quadrado de toda, con el quadrado de la diferencia. Esto es, el quadrado de toda, con el quadrado de la diferencia, es duplo de los quadrados de las partes desiguales.*

4 *El quadrado de la parte mayor, es igual al quadrado de la menor, con el rectangulo de toda la linea, y de la diferencia.*

Demonstracion, fig. 2.

1 *Si la recta AB. està diuidida desigualmente en E. digo que el quadrado de toda AB. es igual à 4. rectangulos AEB. de las partes AE. EB. con el quadrado EN. que es diferencia de las mesmas partes.*

Sea AD. quadrado de AB. y tomense AF. BN. BG. CO. CR. DL DM iguales à AE: si estas iguales se quitan de las iguales AB. BD. DC. CA. quedaràn iguales EB. GD. LC. OA. (4. P.) y tambien EN. GM. RL. OF. (4. P.) y tambien EN. HS. XZ. y FO.

HX.

HX. SZ. por ser lados opuestos en los paralelogramos (7.l.1.) con que GL. LO. OE. son rectangulos iguales a EG. formado de las partes BE. y EH. que es EA. y HZ. es quadrado de HS. que es EN. diferencia de las partes: luego el quadrado AD. de toda la recta AB. es igual à los 4. rectangulos EG. GL. LO. OE. y al quadrado HZ. porque se compone de ellos.

2 *Si la recta AB. està diuidida desigualmente en E. digo que los dos quadrados AE. EB. son iguales à dos rectangulos de AE. EB. con el quadrado de su diferencia EN.*

Porque supuesta la mesma construccion, serà AH. quadrado de AE. y EM. quadrado de EB: y los rectāgulos AS. NM. son iguales al rectangulo EG. que es de las partes AE. EB. porque todos sus lados, y angulos se pueden ajustar (1. P.) y HZ. es quadrado de HS. que es EN. diferencia de las partes como antes: luego los dos quadrados AH. EM. son iguales à los dos rectangulos AS. NM. con el quadrado HZ. porque se componen de ellos.

3 *Si la recta AB. està diuidida desigualmente en E. digo que los dos quadrados de AE. EB. son la mitad del quadrado de toda la recta AB. con el quadrado de EN. que es diferencia de las partes.*

Esto es, que el quadrado de toda la recta AB. con el quadrado de la diferencia EN. es duplo de los quadrados AE. EB.

Supesta la mesma construccion, continuense FG. y OM. que GP. y MQ. sean iguales à HS. ò EN. con que serà MP. quadrado de GP. que es la diferencia de las partes EN. y serà igual à HZ. (1. P.) y los quatro rectangulos FN. NM. MR. RF. seràn entre si iguales por ajustarse (1. P.) y porque los dos rectangulos FN. NM. con el quadrado HZ. son iguales à los dos quadrados AH. EM. (2. N.) los otros dos rectangulos MR. RF. con el quadrado MP. seràn otra vez iguales à los

à los dos quadrados AH. EM: luego los 4. rectangulos FN. NM. MR. RF. con los dos quadrados HZ. MP. contienen dos vezes à los quadrados AH. EM: luego porque los 4. rectangulos FN. NM. MR. RF. y los dos quadrados HZ. MP. son iguales al quadrado AD. y MP. (2. P.) el quadrado AD. de toda la recta AB. con el quadrado MP. que es de la diferencia de las partes, contiene dos vezes à los quadrados AH. EM. y assì es su duplo: y por consiguiente los quadrados de AE. y EB. son la mitad de los quadrados de AB. y EN.

4 *Si la recta AB. està diuidida desigualmente en E; digo que el quadrado de la parte mayor EB. es igual al quadrado de la menor AE. con el rectangulo de toda la linea AB. y de la diferencia de las partes EN.*

Supuesta la mesma construcciō, son iguales los quadrados AH. NG. y tambien los rectangulos ZG. ZR. (1. P.) y EM. es quadrado de EB. luego porque el quadrado EM. es igual à los rectangulos EZ. ZG. con el quadrado GN. pues se cōpone de ellos, si en lugar de ZG. substituimos su igual ZR. serà EM. igual à EZ. ZR. que son EL. con el quadrado GN. (4. P.) luego EM. quadrado de la parte mayor EB. es igual al rectangulo EL. de toda la recta ER. que es AB. y de EN. diferencia de los segmentos AE. EB. con el quadrado GN. que es AH. quadrado de la parte menor AE. &c.

PROPOSICION III.

Diuision de la recta en dos partes iguales, y dos desiguales.

1 *El quadrado de la mitad de la linea, es igual al rectangulo de las partes desiguales, con el quadrado del segmento intermedio.*

2. Los

2 *Los quadrados de las partes desiguales; exceden à los de las iguales, en dos quadrados del segmento intermedio.*

3 *El quadrado de toda, es igual à dos rectàgulos de las partes desiguales, mas dos quadrados de las iguales, mas dos quadrados del segmento intermedio.*

4 *El quadrado de toda, es quadruplo del quadrado de la mitad de la linea.*

Construccion. fig. 3.

EN la *fig.* 3. del *lib.* 2. la recta AB. està dividida igualmente en E. y desigualmente en N. las partes iguales son AE. EB. las desiguales AN. NB. y el segmento intermedio EN. formado el quadrado AD. tomense BG. DM. DL. CQ. AF. iguales à BN. y BO. AT. CR. iguales à BE. y si de las iguales EB. BO se quitan las iguales BN. BG quedaràn iguales EN. GO. y por ser iguales EN HS. XI. y tambien GO. SI. HX. en los paralelogramos (7. 1. 1.) serà HI. quadrado del segmento intermedio: y EO. quadrado de la mitad EB. y AS rectangulos de las partes desiguales AN. NS. que es NB; y NG. quadrado de la parte menor NB. y AZ. quadrado de la parte mayor AN. esto supuesto.

Demostracion.

1 D*igo que el quadrado EO. de la mitad de AB. es igual al rectangulo AS. de las partes desiguales AN. NB: mas el quadrado HI. del segmento intermedio HI. ò EN.*

Porque el rectangulo AH. es igual à NO. (1. P.) y añadido el comun HN. serà todo el rectangulo AS. igual al gnomon HNBO: y porque el gnomon HNBO. con el quadrado HI. es igual al quadrado

do EO. que de ellos se compone, si en lugar del gnomon HNBO. substituimos el paralelogramo, su igual AS. serà el quadrado EO. igual al rectangulo AS. de las partes desiguales, y al quadrado HI. del segmento intermedio EN.

2 *Digo que los dos quadrados AZ. NG. de las partes desiguales exceden à los dos quadrados AX. XC. de las partes iguales en dos quadrados XS. XZ. del segmento intermedio EN.*

Porque le rectangulo QR. es igual à EG. (1. P.) y añadido el espacio comun QE. seràn QE. EG. tanto como EC. que se compone de los dos quadrados AX. XC. de las partes iguales: luego porque los quadrados AZ. NG. de las partes desiguales, exceden à QE. EG. en lo dos quadrados SX. XZ. tambien excederàn AZ. NG. à los quadrados AX. XC. de las partes iguales en dos quadrados SX. XZ. del segmento intermedio EN (3. P.)

3 *Digo que el quadrado AD. de toda, es igual à los dos quadrados AX. XC. de las partes iguales, mas à los dos quadrados SX. XZ. del segmento intermedio, y mas à dos rectangulos AS. de las partes desiguales.*

Porque el rectangulo AS. se demostrò igual al gnomon HNO. (1. N.) y el gnomon HNO. es igual à OLP. (1. P.) luego dos rectangulos AS. son tanto como el espacio HNOLP. (3. P.) luego porque todo el quadrado AD. es igual à todas las partes de que se compone AX. XC. XS. XZ. y HNOLP. (2. P.) serà el quadrado AD. igual à los dos quadrados de las partes iguales AX. XC. y à los dos del intersegmento XS. XZ. mas 2. rectangulos AS. (3. P.)

4 *Digo que el quadrado AD. de toda la linea, es quadruplo del quadrado AX. de la mitad AE.*

Porque el quadrado AD. es igual à los 4. quadrados iguales AX. BX. CX. DX. (1. P.) luego es quadruplo de cada vno.

PROPOSICION IV.

De la potencia de los lados en los triangulos.

1 *LA base opuesta al angulo recto, puede tanto como los dos lados.*

2 *La base opuesta al angulo obtuso, puede mas dos rectangulos de vn lado, y su continuacion hasta el perpendiculo.*

3 *La base opuesta al angulo agudo, puede menos dos rectangulos de vn lado, y de su segmento entre el perpendiculo, y dicho angulo agudo.*

4 *Si vna base puede tanto como los dos lados, el angulo opuesto, es recto: si puede mas, es obtuso: si puede menos, es agudo.*

DEMONSTRACION I.

Lamina vltima fig. 1.

EL triangulo ABC. tiene el angulo B. recto: digo que la base, ò lado opuesto AC. puede tanto como los dos lados AB. BC: esto es, que el quadrado de AC. es igual à los dos quadrados de AB. BC.

Continuese BAD. que AD. BC sean iguales, y sean DH. DL. dos quadrados iguales de DB: tomando GE. HF. DM. PQ. BN. iguales à BC. se tiran las rectas, como se vè en la figura.

Por ser iguales DP. DB. BH. &c. Si quitamos iguales DM. DA. BC. &c. quedaràn iguales AB. CH. FG. ED. MP. QL. QO. ON. NL. (4. P.) y por ser los angulos P. L. D. B. G. H. rectos iguales, y comprehendidos de

de iguales lados BA. BC à DE. DA. &c. los 8. triangulos *a. c. e. g. b. d. h. f.* serà en todo iguales (4. l. 1.) y porque el angulo B. es recto, los dos CAB. BAC. que es DAE. hazen otro recto (3. l. 1.) y porque los tres DAE. EAC. CAB. hazen dos rectos (1. l. 1.) serà EAC. recto, y assi mesmo se demostraràn rectos E. F. C: y AF. con angulos rectos, y lados iguales, serà el quadrado de AC. y DO. quadrado de DA. que es BC: y OL. quadrado de ON. que es OB.

Luego si de los quadrados iguales DL. DH. quitamos los triangulos iguales *a. c. e. g.* de DH: y *b. d. f. h.* de DL. quedarà el quadrado AF. igual à los dos quadrados DO. OL. esto es, el quadrado de AC. igual à los quadrados de BC. y BA.

Demonstracion 2. En la *fig. 4* del *lib. 2* Sea el angulo ABC. recto, y formese el quadrado DH. como antes, y BR. sea igual à BC. HF. &c. y AN. BL. CM. EL. paralelas à los lados DB. DG. y se demostraràn los 8. triangulos *a. b. c. d. e. f. g. h.* iguales como antes DL. es quadrado de ED. que es AB. y RC. de BC. y AF. de AC. y porque el quadrado DH. excede à los dos quadrados RC. DL. en los 4 triangulos *a. b. c. d.* y el mesmo quadrado DH. excede al quadrado AF. en los 4. triangulos *a. c. e. g.* iguales à los 4. primeros: luego porque AF. y RC. DL. son igualmente excedidos de DH. son iguales (3. P.) con que AF. es igual à los dos RC. DL.

Demonstracion 3. El quadrado AF. es igual al quadrado ML. y à los 4. triangulos *b. d. f. h.* tambien los quadrados DL. RC. son iguales al quadrado ML. y à otros 4 triangulos *e. f. g. h.* iguales à los 4 primeros, por componerse de ellos (2. P.) luego el quadrado AF. es igual à los dos quadrados DL. RC. (3. P.)

Demonstracion 4. Los triangulos *e. g.* son iguales *b. d.* luego añadido el espacio comun ELO. CAE. resultarà de vna parte el quadrado AF. y de otra los quadrados RC DL. y será AF. igual à los dos RC. DL. (4. P.)

Bastan estas 4. demonstraciones, para convencer à los que juzgaron que esta proposicion no se podia demostrar sin dependencia del libro 6. sino por las paralelas, como la demuestra Euclides.

2 *En la lam. vlt. fig. 2. sea el triangulo ARC. obtusangulo: y el angulo obtuso R. continuese vno de sus lados ARB. y sea CB. su perpendicular. Digo que el quadrado de AC. excede à los dos quadrados AR. RC. en dos rectangulos ARB.*

Sea BL. quadrado de AB y BH. de BC: y tomando EG. igual à BR sean RZ. GE. paralelas à BD. BA. y será FB. quadrado de RB y FL. quadrado de EF. que es AR. En el triangulo RBC. porque el angulo B. es recto, es el quadrado de RC. igual à los dos quadrados BF. BH. (1. N.) y el quadrado de AR. es FL: luego los dos quadrados de AR. y RC. son tanto como FL. FB. BH. y en el triangulo ABC. por ser el angulo B. recto el quadrado de AC. es igual à los quadrados de AB. y BC. (1. N.) que son BL. y BH: luego porque los quadrados BL. y BH. exceden à LF. FB. BH. en dos rectangulos FA. ED: tambien el quadrado de AC. excede à los quadrados de AR. RC. en los dos rectangulos FA. FD. que son 2. rectangulos ARB. por ser RF. RB. iguales: y tambien GD. à RA. y FG. à RB. &c.

3 *En la fig. 3* lam. vlt. *el triangulo ASC. tiene el angulo S. agudo, si de vno de los otros dos angulos se tira al lado opuesto vna perpendicular CB. digo que el quadrado de AC. es menor que los dos quadrados de AS. SC. en dos rectangulos ASB. de todo el lado AS. y de el segmento SB.*

Sea BH. quadrado de BC. y SL. de AS. y SF. MD. iguales à SB. y FE: MN. BN. paralelas à SA. SM: con que serán DN. y SG. quadrados de BS. y GL. de EG. que

que es AB. (7. l. 1.) y AF. FN. rectangulos de AS. SF. que es SB. por ser el angulo B. recto en el triangulo ABC. el quadrado de AC. es igual à los quadrados de AB BC. (1. N.) que son LG. BH: y en el triangulo CSB. por ser el angulo B. recto, el quadrado de CS. es igual à los quadrados de BC. BS. (1. N.) que son BH. DN. luego los dos quadrados de AS. y SC. son iguales à LS. BH. y DN: luego porque LS. BH. y DN. exceden à LG. BH. en los dos rectangulos AF. FN. tambien los dos quadrados de AS SC. excederàn al quadrado AC. en los dos rectangulos AF. FN. que son 2. rect. ASB. con que AC. puede menos, &c.

4 *Si vna base puede tanto como los dos lados, su angulo opuesto, serà recto: si puede mas, obtuso: si menos, agudo.*

Porque si la base puede tanto como los lados, no serà el angulo agudo, ni obtuso (2. 3. N.) si puede mas, no serà recto, ni agudo (1. 3. N.) si puede menos, no serà recto, ni obtuso (1. 2. N.) luego, &c.

Fin del Libro 2.

LE

LIBRO III.

Del Circulo.

EN este libro tercero, trata Euclides del Circulo, y sus propriedades; y aunque las proposiciones 35. 36. y 37. pertenecen al Circulo, las dexamos para el libro 6. donde tienen mejor lugar, y se explicaràn mas facilmente, porque pertenecen à la proporcion.

Las proposiciones del libro 3. son 7.

PRO-

PROPOSICION I.

De las rectas de vn punto à la circunferencia.

1 *SI de vn punto dentro, ò fuera del Circulo, se tiran rectas à la circunferencia concaua, la que passa por el centro, es la mayor: y la mas proxima, es mayor que la mas apartada.*

2 *Y solas dos opuestas son iguales: con que si de vn punto salen tres iguales, serà el centro.*

3 *Si de vn punto fuera del Circulo se tiran rectas à la circunferencia conuexa, la que passa por el centro, es la menor; y la mas proxima, es menor que la mas apartada.*

4 *Y solas dos opuestas son iguales.*

Demonstracion, fig. 1. lib. 3.

1 *SEa el circulo EFH. y vn punto A. dentro, ò fuera del circulo, y el centro O: tirense las rectas AOG. AF. AE. AH. à la circunferencia concaua. Digo 1. que AOG. que passa por el centro, es la mayor de todas.*

Desde el centro O. salgan OF. OE. &c. Porque OF. OG son radios iguales, si se añade el pedaço comun AO: serà AOG. tanto como AOF. (4. P.) y en el triangulo AOF. los dos lados AO OF. son mayores que AF. (5. l. 1.) luego AOF. es tambien mayor que AF. (3. P.) assi mesmo AOG. que es AOE. se demostrarà mayor que AE: luego AOG. es la maxima.

Digo 2. que si AF. està mas proxima à la maxima AOG. que AE. serà AF. mayor que AE.

Por

Porque en los triangulos AOF. AOE. ſon iguales los lados AF. AE. y AO. comun: pero el angulo AOF. mayor que ſu parte AOE. (2. P.) luego la baſe opueſta AF. es mayor que AE. (6. l. 1.) &c.

2 *Si AF. AH. diſtan igualmente de la maxima AOG. eſto es, ſi los arcos GF. GH. ſon iguales. Digo 1. que AF. y AH. ſon iguales.*

Porque ſiendo iguales arcos GF. GH. ſon iguales los angulos FOG. GOH. (10. P.) y tambien ſus complemẽtos al ſemicirculo FOA. HOA. (1. l. 1.) luego porque en los triangulos FOA. HOA. ſon iguales lados OF. OH. y AO. comun, y los angulos comprehendidos AOF. AOH. ſerà todo igual (4. l. 1.) y aſsi AF. y AH. ſon iguales.

Digo 2. que no puede auer otra linea igual à AF. Porque ſi cae entre FG. ò GH. diſtarà menos de AOG. y ſerà mayor que AF. y AH: y ſi cae fuera, diſtarà mas, y ſerà menor: luego ſolas dos pueden ſer iguales entre ſi; pero ſe pueden conſiderar otras dos mayores, ò menores que las primeras, entre ſi iguales: deſuerte, que puede avèr infinitas, que cada dos ſean iguales, ſin que admitan otra tercera igual.

Digo 3. que ſi de vn punto ſalen tres lineas iguales, ſerà el centro: porque ſino fuera el centro, ſolo pudieran ſalir dos iguales (2. N.)

3 *Si el punto A. eſtà fuera del Circulo, y ſe tiran rectas AL. AN. AP. à la circunferencia connexa, y AL. continuada paſſa por el centro O. digo 1. que es la minima de todas.*

Porque conſiderada qualquiera otra AN. y tirado el radio ON. en el triangulo AON. los dos lados ON. NA. ſon mayores que AO. (5. l. 1.) luego ſi de deſiguales ONA. OLA. quitamos los radios iguales ON. OL. queda à NA. mayor que AL (4. P.) luego ſi AL. es menor que qualquiera otra, ſerà la minima.

Digo 2. que ſi AN. diſta menos de la minima AL. que AP. eſto es, ſi el arco LN. es menor que LP. ſerà AN. menor que AP. &c.

Porque conſiderados los radios ON. OP. por eſtàr el punto N. dentro del triangulo AOP. los dos lados ON. NA. ſon menores que OP. PA. (6. l. 1.) luego ſi quitamos los radios iguales ON. OP. quedarà AN. menor que AP. (4. P.) y aſsi la mas proxima, es menor que la mas remota.

4 *Si AM. AN. diſtan igualmente de la minima AL: y los arcos LM. LN. ò los angulos MAL. NAL. ſon iguales: Digo 1. que AM. AN. ſeràn iguales.*

Porque ſiendo los arcos LM. LN. iguales, ſon iguales los angulos MOA. NOA. (10. P.) y los lados, ò radios OM. ON; y el lado OA. comun à los dos triangulos OAM. OAN: luego todo lo demàs es igual AM. AN. &c. (4. l. 1.)

Digo 2. que ſola AN. puede ſer igual à AM. Porque qualquiera otra, ſi cae entre LM. ò LN. ſerà menor: y ſi cae fuera, ſerà mayor (3. N.) luego ſolas dos pueden ſer iguales entre ſi, aunque ſe pueden conſiderar infinitas, que cada vna tenga otra igual, ſin que jamàs puedan ſer tres iguales.

PROPOSICION II.

De las cuerdas, arcos, y ſegmẽtos.

1 *Toda la cuerda cae dentro del Circulo; y las iguales cortan iguales arcos, y al contrario.*

2 *El diametro perpendicular à la cuerda, parte igualmente cuerda, arco, y ſegmento, y al contrario.*

3 *Los diametros ſolos ſe pueden partir igualmente.*

4 *Las cuerdas que igualmente distan del centro, son guales, y al contrario.*

5 *La que menos dista del centro, es mayor, y corta mayor arco, y segmento, y al contrario.*

6 *Lo mesmo es en dos circulos iguales.*

7 *Los arcos, y cuerdas entre dos paralelas, son iguales, y al contrario.*

Demonstracion, fig. 2.

1 En el Circulo CNM. sea qualquiera cuerda NM. digo que cae toda dentro del Circulo.

Porque tomando en ella qualquiera punto Z. y tirados los radios BZE. BN. BM. en el triangulo Isoceles BNM. seràn iguales los angulos N. M. (5. l. 1.) y porque en el triangulo BMZ. el angulo externo BZN. es mayor que el interno opuesto M. (3. l. 1.) serà tambien BZN. mayor que N. (3. P.) luego en el triangulo BNZ. el lado BN. que es BE. serà mayor que BZ. (5 l. 1.) luego porque el punto E. està en la circunferencia, qualquiera punto Z. dista menos del centro, y cae dentro del Circulo: y si todos los puntos de NM. caen dentro, toda ella està dentro.

Cuerdas iguales cortan iguales arcos, y segmentos. Porque si FE. RC. son cuerdas iguales, se ajustarà EF. con RC. (1. P.) y tambien todo el arco ESF. con RHC. por ser todos los radios iguales, y el segmento ESFGE. con RHCDR: luego todo es igual.

Al contrario. Si los arcos ESF. RHC. son iguales, se ajustaràn por ser de vn Circulo (1. P.) luego tambien las cuerdas FE. CR. y los segmentos; y assi todo es igual.

Si los segmentos son iguales, por ser de vn Circulo se ajustaràn (1. P.) luego tambien los arcos, y las cuerdas, y seràn iguales.

2 *El radio BS. o diametro CBS, es perpendicular à la*

la cuerda MN. digo que la cuerda, y el arco MN. y el segmento NSM. se diuiden en partes iguales, y al contrario.

Porque tirados los radios iguales BN. BM. serà el triangulo BNM. Isoceles: luego la perpendicular BOS. parte igualmente la cuerda, o base MN. en O. y tambien al angulo NBM. (5. l. 1.) luego por ser iguales los angulos NBS. SBM. seràn iguales sus medidas, ò los arcos NS. SM. (10. P.) y doblando el sector NBS. se ajustarà con SBM: y quitando los triangulos iguales NBO. OBM. quedarà el segmento NOS. ajustado, y igual con OSM: y assi todo se parte igualmente.

Al contrario. Si el radio BS. parte igualmente la cuerda NM. ò el angulo NBM. que es el arco NSM. o al segmento en el triangulo Isoceles NBM. serà BS. perpendicular à NM: y si BS. es perpendicular à NM. y la parte igualmente, passa por el centro, ò vertice B. (5. l. 1.) y serà SBC. diametro.

Consect. Si el diametro no es perpendicular à la cuerda, no la parte igualmente; y sino la parte igualmente, no es perpendicular.

3 *Los diametros HE. CS. se parten igualmente.* Porque todos los radios BH. BE. BC. BS. son iguales: *pero ningunas otras rectas se pueden partir igualmente fuera del centro.* Porque si MN. està igualmente dividida en O. el radio BOS. haze el angulo BOM. recto (2. N.) y considerada qualquiera otra FOP. serà el angulo BOP. obliquo: luego porque el radio BOS. no es perpendicular à FP. no se parte esta igualmente en O. (*cons.* 2. N.)

Consect. Si dos rectas en el Circulo se parten igualmente, son diametros, y su interseccion es el centro.

4 *Si RC. FE. son iguales, las distancias del centro, perpendiculos BD. BG. seràn iguales.*

Porque tambien los radios BC. BR. BF. BE. son iguales, y se ajustarà todo el triangulo EBF. con RBC.

y tambien el perpendiculo BG. con BD. (4. l. 1.) y el arco ESF. con RHC: luego todo es igual.

Al contrario. Si las distancias, ò perpendiculos BD. BG. son iguales, y se considera el triangulo BFE. sobre BCR. se ajustarà BG. con BD. y por ser los angulos en G. y D. rectos iguales, se ajustarà FE. con RC. (1. P.) y assi son iguales, y tambien los arcos, y segmentos (1. N.)

5 *Si NM. es mayor que FE. cortarà mayor arco.* Porque en los triangulos NBM. FBE. son iguales NB. BM. à FB. BE: y por ser NM. mayor base que FE. es el angulo NBM. mayor que FBE (6. l. 1.) y el arco, ò su medida NSM. mayor que FSE (10. P.)

Al contrario. Si el arco es mayor, serà el angulo NBM. mayor que FBE (10. P.) luego la base NM. mayor que FE. (6. l. 1.)

Si NM. es mayor que FE. distarà menos del centro. Porque consideradas NM. FE. paralelas, serà BOS. perpendiculo comun (13. P.) y el arco FSE. es menor que NSM (5. N.) y assi FE. cae debaxo de NM: luego el perpendiculo, ò distancia BG. es mayor que su parte BO (2. P.)

Al contrario. Si el perpendiculo, ò distancia BG. es mayor que BO. la paralela FE. caerà debaxo de NOM: y el arco NSM. serà mayor que su parte FSE. (2. P.)

Si las cuerdas desiguales son NM. RC. se demuestra lo mesmo, porque RC. se puede ajustar con vna paralela FE. su igual: y la distancia BD. con BG. &c.

6 *Todo lo que se ha dicho de vn Circulo, conviene à dos Circulos iguales.* Porque se pueden ajustar, y formaràn vn Circulo (1. P.)

7 *Los arcos, y cuerdas de vn Circulo NF. EM. entre dos paralelas, son iguales.* Porque el perpendiculo BS. es comun (13. P.) y SN. SM. iguales: y SF. SE. (2. N.) luego quedan FN. EM. iguales (4. P.)

Al contrario. Si NF. EM. son iguales, y BS. perpendicular à NM. seràn iguales NS. SM. (2. N.) y assi quedaràn iguales FS. SE. (4. P.) luego BS. es perpendicular à FE. (2. N.) y porque NM. FE. tienen perpendiculo comun, son paralelas (13. P.)

PROPOSICION III.

De los angulos en el Circulo.

1 *El angulo en la circunferencia, es la mitad del angulo en el centro, y del arco en que insiste.*

2 *El angulo dentro del Circulo es la semisuma, y fuera es la semidiferencia de los arcos que corta.*

3 *Si el angulo es la mitad del arco, estarà en la circunferencia.*

4 *Los angulos de vno, iguales, ò semejantes segmentos, son iguales, y al contrario.*

5 *Si vn quadrilatero està en el Circulo, sus angulos opuestos, son iguales à dos rectos, y al contrario.*

6 *El angulo en el semicirculo, es recto: en el segmento mayor, es agudo: en el menor, es obtuso.*

Demonstracion fig. 3.

1 *El angulo BCF. està en la circunferencia, y BOF. en el centro. Digo que BCF. es la mitad de BOF. y del arco BGF. en que insiste.*

Tirado el diametro COG. en el triangulo Isoceles COF. son iguales los angulos CFO. OCF. (5. l. 1.) y el angulo externo GOF. es igual à los dos (3. l. 1.) luego es duplo de cada vno, y assi OCF. es la mitad de GOF: y porque el arco GF. es medida de GOF. (10. P.) serà OCF. la mitad de GF. Assimesmo se demostrarà, que

BCG. es la mitad de BOG. y del arco BG: luego los dos angulos BCG GCF. que ſon BCF. ſon la mitad de los dos BOG. GOF. que ſon BOF. y del arco BGF.

Si el angulo FCE. no incluye al centro: tirenſe el diametro COG. y los radios OF. OE: y ſe demoſtrarà como antes, que el angulo GCE. es mitad del arco GFE. y el angulo GCF. mitad de GF: y ſi del arco GFE. quitamos GF. quedarà FE: luego ſi de la mitad de GFE. quitamos la mitad de GF. quedarà la mitad de FE: luego ſi de GCE. que es mitad de GFE. quitamos GCF. que es mitad de GF. quedarà FCE. mitad de FE. que es el arco en que inſiste, y tambien mitad del angulo FOE.

2 *Si el angulo BAF. està dentro del Circulo, y ſe continuan ſus lados verticales, digo que el angulo BAF. es la mitad de los dos arcos que corta BF. CE.*

Tirada BC. en el triangulo BAC. el angulo externo BAF. es igual à los dos internos opueſtos BCA. ABC (3.1.1.) y BCA. es la mitad de BF. como ABC. la mitad de CE. (1. N.) luego BAF. que es igual à BCA. ABC. es la mitad de los dos arcos BF. CE.

Pero ſi el angulo BDC. està fuera del Circulo, y corta los arcos BC. GE. digo que es la mitad de la diferencia entre los dos arcos.

Tirese GL. paralela à DEC. y ferà el arco CL. igual à GE. (2 1 3.) y BL. diferencia de CB. y CL. que es EG: y los angulos BGL. BDC. en las paralelas ſeràn iguales (13. P.) y el angulo BGL. en la circunferencia, la mitad de GL (1. N.) luego BDC. que es igual à BGL. es tan bien la mitad de BL: con que es la mitad de la diferencia entre los dos arcos BC GE.

3 *Si el angulo BCE. es la mitad del arco BFE. digo que el punto C. està en la circunferencia.*

Porque ſi el punto C. eſtuviera dentro, ò fuera del Circulo, el angulo BCE. ſeria mas, ò menos que la mitad de el arco BFE. (2. N.) luego ſi ni es mas, ni menos, eſtà C en la circunferencia.

4 *Si*

4 *Si en el ſegmento BCF. ay dos, ò mas angulos BCF. BEF. digo que ſon iguales*: porque cada vno es la mitad del arco opueſto BF. (1. N.)

Lo meſmo es en los ſegmentos iguales de iguales Circulos, porque ſe ajuſtan (1. P.) y en los ſegmentos ſemejantes de Circulos deſiguales: porque los arcos ſemejantes, tienen igual valor (9. P.)

Al contrario. Si los angulos en la circunferencia ſon iguales, los arcos opueſtos que ſon duplos de los angulos, tendràn igual valor (3. P.) y aſsi ſeràn iguales en iguales Circulos, ò ſemejantes en deſiguales.

5 *Si el quadrilatero BCEF. està inſcrito en el Circulo. Digo que ſus angulos opueſtos B. y E: tambien C. y F. ſon tanto como dos rectos.*

Porque el angulo CBF. es la mitad del arco CEF. y el angulo CEF mitad del arco CBF. (1. N.) luego porque los dos arcos CEF. CBF. ſon todo el circulo, los dos angulos CBF. CEF. ſeràn vn ſemicirculo; eſto es, tanto como dos angulos rectos (11. P.) Aſsimeſmo BCE. BFE. ſeràn tanto como dos rectos.

Al contrario. Si los angulos C. F. ſon tanto como dos rectos, los otros dos B. E. ſeràn tambien 2. rectos (3.1.1.) luego ſi ſe deſcrive vn Circulo por C. B. F el angulo B. ſerà la mitad del arco opueſto CGF. (1. N.) y porque E. es ſu complemento à 2. rectos, ſerà E. la mitad del arco CBF. que es complemento al Circulo de CGF: luego porque E. es la mitad del arco opueſto, eſtà en la circunferencia (3. N.) y el Circulo paſſa por F. B. C. E.

6 *Si ECE. es ſemicirculo, digo que qualquiera angulo BCE. ſerà recto*. Porque es la mitad de el ſemicirculo opueſto EGE. (1. N.) luego es recto.

Si el ſegmento BCF. es mayor que el ſemicirculo, qualquiera angulo BCF. ò CEF. ſerà agudo. Porque es la mitad del arco opueſto BF. (1. N.) y eſte, menor que vn ſemicirculo, porque ſe ſupone BCF. mayor: luego

BCF.

BCF. es menos que vn angulo recto, y assi es agudo (11.P.)

Si el segmento CEF. es menor que el semicirculo, qualquiera angulo CEF. serà obtuso. Porque es la mitad del arco opuesto CBF. que es mas que el semicirculo (1.N.) luego su mitad es mas que vn quadrante, ò que vn angulo recto, y assi CEF. es obtuso.

Al contrario. Si el angulo es recto, estarà en el semicirculo: si agudo, en el mayor segmento: si obtuso, en el menor. Porque no fuera recto, sino estuviera en el semicirculo (6.N.) y assi de los otros.

PROPOSICION IV.

De los Circulos concentricos.

1. *Los Circulos concentricos, ò que tienen vn mesmo centro, distan igualmente, y al contrario.*

2 *El angulo del centro, corta arcos semejantes, y el de la circunferencia desemejantes.*

3 *Si la recta que les corta no passa por el centro, cortarà arcos desemejantes.*

4 *Pero los intersegmentos de la recta seràn iguales.*

Demonstracion. fig. 4.

1 *Los Circulos BSG. CRL. tienen vn mesmo centro O. digo que son equidistantes.* Porque los radios OB. ON. OS. OG. son iguales: luego si quitamos los radios tambien iguales OC. OM. OP. OH. daràn iguales distancias CB. NM. PS. HG. (4.P.)

Al contrario. Si fuere O. el centro del Circulo mayor, y las distancias CB. MN. HG. iguales; quitadas de los

los radios iguales OB. ON. OG. quedaràn iguales OC. OM. OH. (4.P.) luego porque de O. salen tres rectas iguales à la circunferencia CMEH: serà O. tambien centro del Circulo menor (1.l.3.)

2 *El angulo SOH. formado en el centro O. corta los arcos PEH. SFG. semejantes:* porque son medida de vn mesmo angulo SOH. (10.P.)

El angulo NGS. en la circunferencia BGF. corta los arcos MR. NS. desemejantes. Porque es la mitad del arco NS. (3.l.3.) y la mitad de MR. menos la mitad de HL. (3.l.3.) luego el valor de MR. excede à NS. en todo el arco HL: y son NS. MR. desemejantes.

3 *Si la recta SG. corta los dos Circulos, y no passa por el centro: REL. SFG. son desemejantes.* Porque tirados los radios OS. OR. OL. OG. serà el angulo SOG. mayor que su parte ROL. (2. P.) luego el arco SFG. que es su medida, es de mayor valor que REL (10.P.) y assi son desemejantes.

4 *Supuesto lo mesmo. Digo que los intersegmentos SR. LG. y tambien SL. RG. son iguales.* Porque si el radio OF. es perpendicular à la cuerda SG. seràn iguales ZS. ZG. y tambien ZR. ZL. (2. l. 3.) luego quitadas estas, quedaràn iguales SR. LG. (4.P.) y si à las iguales SR. LG. se añade la comun RL. seràn iguales SL. RG. (4.P.) *Lo mesmo es en los Circulos excentricos, si la cuerda es perpendicular al diametro comun.*

PROPOSICION V.

De los Circulos que se cortan.

1 *Si se cortan, no tienen centro comun.*

2 *La interseccion es en solos dos puntos.*

3 *La recta que junta los centros, es perpendicular à la cuerda comun, y parte igualmente cuerda, arcos, y segmentos, y al contrario.*

4 *Todas las rectas de la interseccion cortan arcos ſemejantes en vno, y otro Circulo.*

Demonſtracion. fig. 5.

1 L*Os Circulos que ſe cortan no tienen vn meſmo centro.* Porque ſi fueran concentricos, fueran equidiſtantes, y paralelos (4. l. 3.) y aſsi no ſe cortaràn: luego &c.

2 *Los Circulos* mqh. ngh. *ſe cortan, digo que la interſeccion es ſolo en dos puntos* n h. Porque ſiendo C. el centro de *ngh.* no es centro de *nqh.* (1. N.) y aſsi del punto C. ſolas dos rectas iguales pueden ſalir à la circunferencia concava *nqh.* (1. l. 3.) luego porque todas las rectas de C. à la circunferencia *ngh.* ſon radios iguales (8. P.) ſolos dos puntos de ella *n. h.* ſon comunes à la circunferencia *nqh.* y aſsi la interſeccion de *ngh* y *nqh.* es en ſolos los dos puntos *n. h.*

3 *En los dichos Circulos, es la cuerda comun* nh. *el diametro comun OCA. por los centros O. C. digo que OCA. es perpendicular à* nh. *y parte igualmente cuerdas, arcos, y ſegmentos.*

Porque los triangulos OnC. OhC. tienen los lados On. Oh. iguales, y tambien Cn. Ch. y OC. comun: luego todo es igual (4. l. 1.) el angulo *n*OC. à COh. y *n*CO. à OCh: luego en el triangulo Iſoceles *nOh.* la recta *Oy.* que parte igualmente el angulo *nOh.* es perpendicular à la baſe *nh.* (5. l. 1.) luego porque los radios *Oq.* Cg. ſon perpendiculares à la cuerda comun *nh.* parten igualmente à la cuerda en *y*: y à los arcos *ngh. nqh.* en g. y q: y à los ſegmentos (2. l. 3.)

Al contrario. Si por el centro O. paſſa *Oy.* perpendicular à *nh.* la partirà igualmente: y ſi la parte igual, ſerà perpendicular, y continuada paſſarà por el otro centro C: y ſi *yg.* es perpendicular, y parte igual à *nh.* paſſarà por los dos centros O. C. como ſe demoſtrò (2. l. 3.)

4 *Si de la interſeccion* h. *ſe tiran las lineas* hm. hp. hn. &c. *Digo que los arcos* mp. gd. *ſon ſemejantes.* Porque el punto *h.* eſtà en las dos circunferencias; y aſsi el angulo *mhp.* es la mitad del arco *mp.* y tambien de *gd.* (3. l. 3.) luego los arcos *mp.* gd. ſon de igual valor, y ſemejantes (10. P.) Lo meſmo es del angulo *phn.* y de los arcos *pn. dn.* &c.

PROPOSICION VI.

De los Circulos que ſe tocan.

1 S*I ſe tocan, no tienen vn centro.*
2 *Los que en el comun diametro tienen vn punto comun, ſe tocan en ſolo aquel pũto, y al cõtrario.*
3 *El diametro comun paſſa por el contacto, que es ſolo vn punto.*
4 *La recta que paſſa por el contacto, y vn centro paſſa por todos los centros, y al contrario.*
5 *La que por el contacto corta vn Circulo, corta en todos arcos, y ſegmentos ſemejantes.*

Demonſtracion. fig. 6.

1 S*I dos Circulos ſe tocan interior, ò exteriormente no tienen vn meſmo centro.* Porque ſi le tuvieran, fueran equidiſtantes, y no ſe tocaràn (4. l. 3.)

2 *Los Circulos* AFG. Afg. ò AZX. *tienen el punto A. comun en el comun diametro CBE. digo que ſe tocan, y que el contacto es en ſolo vn punto A.* Porque ſi ſe toma en la circunferencia *ASf.* qualquiera otro punto S: y de ſu centro C. ſe tira la recta CPSR. porque C. no es el centro E. ni B: la recta CR. à la circunferencia convexa RAN. ſerà mayor que la minima CA. que paſſa por el centro E. (1. l. 3.) y porque los radios CA. CS. ſon iguales (8. P.) ſerà CR. mayor que

CS. y el punto R. caerà fuera de la circunferencia *Asf*. Assimesmo CBA. por el centro B. serà mayor que CP. à la circunferencia concava APZ. (1. l. 3.) y por ser iguales CA. CS. es CS. mayor que CP. y el punto P. caerà dentro del Circulo *Asf*: luego el punto S. no es comun, y assi no es punto del contacto: y porque esto se demuestra de qualquiera punto de la circunferencia *Asf*. que no està en la recta de los centros CBE. tendràn los Circulos solo el punto A. comun, y se tocaràn, y sucederà el contacto en solo el punto A. de la recta CBAE. &c. y al contrario.

3 *Si la recta CA. passa por el centro C. y por el contacto A. digo que passa tambien por los centros B. E.* Porque los centros CBE. y el contacto A. se han demostrado en vna recta CBAE. (2. N.) luego la recta que passa por C. y A. passa por B. y E. y al contrario, &c.

4 *Si la recta FAZf. passa por el contacto A. y corta vn Circulo, digo que en todos corta arcos, y segmentos semejantes.* Porque tirado el commum diametro CBE. passa por el contacto A. ò punto comun à todas las circunferencias (2. N.) y los angulos verticales CAZ. FAG. son iguales (1. l. 1.) y la mitad de los arcos FG. *fg*. XZ. (3. l. 3.) luego los arcos FG. *fg*. XZ. son de igual valor, y semejantes (10. P.) y si de los semicirculos de igual valor GFA. *gfa*. XZA. se quitan iguales valores FG. *fg*. XZ. quedaràn FNA. *fsA*. ZPA. de igual valor, y semejantes (4. P.) y tambien FGA. *fgA*. &c.

PROPOSICION VII.

De la recta tangente del Circulo.

1 *LA perpendicular al extremo del diametro, toca al Circulo en solo aquel punto.*

2 *Qualquiera otra recta por el contacto corta al Circulo: y la tangente, es perpendicular al radio, y vnica en vn punto.*

3 *El radio por el contacto, es perpendicular à la tangente, y al contrario.*

4 *Si muchos Circulos se tocan en vn punto, tendràn en el tangente comun, y al contrario.*

5 *La recta que por el contacto corta al Circulo, haze con la tangente angulos iguales à los que caben en los segmentos alternos, y al contrario.*

Demonstracion. fig. 7.

1 *SI la recta AL. es perpendicular al extremo del diametro AEG. digo que toca al Circulo en solo el punto A.* Pues si en ella se toma qualquiera otro punto L. y se tira del centro EL. porque AE. es perpendicular, serà menor que EL. (5. l. 1.) y pues EA. EN. son radios iguales, es EN. menor que EL: luego qualquiera punto L. que no es A. cae fuera del Circulo; y assi, la recta AL. solo tiene el punto A. comun con el Circulo, y es tangente en solo aquel punto.

2 *Si LD. es perpendicular à EA. digo que qualquiera otra recta AF. por A. corta al Circulo.* Porque siendo el angulo LAE. recto, es FAE. agudo: luego si se considera EH. perpendicular à EF. serà el angulo recto H. mayor que el agudo HAE: y en el triangulo HAE. el lado EA. mayor que EH. (5. l. 1.) luego tambien el radio EN. igual à EA. es mayor que EH: y pues el punto N. està en la circunferencia, cae H. dentro del Circulo; y assi AH. continuada corta al Circulo.

Si LA. toca al Circulo en A. digo que es perpendicular al radio EA. Porque qualquiera recta por A. que no es perpendicular à EA. corta al Circulo (2. N.) luego si LA. le toca, y no le corta, serà la perpendicular.

La tangente en A. es vnica. Porque es la perpendicu-lar

lar al radio EA. (2. N.) y la perpendicular por A. ès vnica (5. l. 1.)

3 *Si LA. es tangente en A: el radio EA. serà su perpendicular, y la perpendicular à LA. en el punto A. passarà por el centro E.* como consta del *num. 1. y 2.*

4 *Si muchos Circulos se tocan en A. y la recta LD. toca al vno AFG. en A. digo que les toca à todos en A.* Porque la recta GEA. por el centro E. y punto A donde se tocan los Circulos, passa por los otros centros B. &c. y es diametro comun (6. l. 3.) y pues la recta LD. toca al Circulo AFG. en A. es perpendicular al radio EA (2. N.) luego tambien es perpendicular al radio BA. que es la mesma recta EA: y assi LA. toca tambiẽ al otro Circulo en A (1. N.) y lo mesmo es de otros infinitos.

Al contrario. Si LD. toca à muchos Circulos en vn punto A. todos se tocan en A porque serà LD perpendicular al extremo de todos los diametros en A. (2. N.) y serà GAB. diametro comun: luego porque todos los Circulos tienen vn punto A. comun en el diametro comun, se tocaràn en A. (6. l. 3.)

5 *Si la recta LD. toca al Circulo en A. y qualquiera otra AF. por A. le corta: digo que el angulo agudo LAF. es igual al angulo que cabe en el segmento mayor, y opuesto FGA.*

Tirado el diametro AEG. es el angulo LAG recto (2. N.) y tirada FG. tambien el angulo AFG. en el semicirculo es recto (3. l. 3.) luego en el triangulo AFG los dos angulos AGF FAG hazen otro recto (3. l. 1.) y porque tambien LAF FAG. hazen otro recto LAG: seràn LAF AGF iguales (4. P.) luego porque todos los angulos del segmento ARGF. son iguales à FGA. (3. l. 3.) serà LAF igual à qualquiera de ellos.

Dig. 2. que el angulo obtuso DAF. es igual à qualquiera angulo ANF. del segmento menor opuesto. Porque

ANFG. es vn quadrilatero en el Circulo, y los angulos N. y G. son tanto como dos rectos (3. l. 3.) y tambien LAF FAD. en vn punto sobre vna recta, son iguales à dos rectos (1. l. 1.) luego quitados los dos que se demonstraron iguales LAF. FGA. quedaràn iguales ANF. FAD. (4. P.) luego la recta AF. haze con la tangente LAD. los angulos iguales à los que caben, ò se pueden formar en los segmentos opuestos, que llamamos alternos.

Proposicion 35. 36. 37. de Euclides.

Tienen su lugar en el *lib. 6. prop. 6.* porque pertenecen à la proporcion de las rectas.

LIBRO IV.

DE EVCLIDES.

TOdo el libro 4 de Euclides es practico, y todas sus proposiciones son problemas, que tiene su lugar en la Geometria Practica.

Fin del Libro 3. y 4.

LIBRO V.

DE EVCLIDES.

De la razon, y proporcion en comun.

LA razon, y proporcion, y las cosas concernientes à la inteligencia de este libro se explicaron en los Proemiales 18.19.20.21.

Todas las prosiciones de este libro son puros axiomas, que solo necessitan de explicacion, como lo advierte Pedro Ramo en sus Escuelas Mathematicas, y el P. Andrès Tacquet en su Geometria. Reducense todas à cinco.

Proposiciones del libro 5.

PRO-

PROPOSICION I.

De las razones entre si.

1 *LAs razones iguales à otra, son iguales entre si.*
2 *Las duplicadas, ò triplicadas à otra, ò à otras dos iguales, son iguales entre si; y al contrario.*
3 *Si vna razon es duplicada, ò triplicada à otras dos, son estas iguales, y al contrario.*
4 *Las compuestas de iguales, son iguales.*

Explicacion.

1 SEan las tres razones en qualquiera especie.

B. à *C.*	*D.* à *E.*	*F.* à *G.*
2. à 1.	6. à 3.	8. à 4.

Si *BaC.* es como *FaG.* y *DaE.* tambien es como *FaG.* digo que *BaC.* es como *DaE.* Porque si *FaG.* es dupla; serà *BaC.* dupla, y *DaE.* dupla: luego la razon de *BaC.* y *DaE.* son semejantes duplas, &c. Esto es general en toda especie de cantidad, substituyendo en lugar de las letras, ò numeros, ò lineas, ò superficies, ò cuerpos; con tal, que en cada razon sean las cantidades de vna especie.

2 Sean tres continuos proporcionales B. C. D. y otros tres en la mesma razon EFG.

*B.*9.	*C*3.	*D.*1.
*E.*18.	*F.*6.	*G.*2.

La razon de *BaD.* es duplicada de *CaD.* (21. P.) la de *EaG.* se supone tambien duplicada de *CaD.* luego la razon de *BaD.* es la mesma q̃ de *EaG.* como se vè en los numeros. Item, la razon de *BaD.* es duplicada de *CaD.* la de *EaG.* es duplicada de *FaG.* la de *CaD.* es como *FaG.* luego la de *BaD.* es como *EaG.* K Al

Al contrario. Si *BaD*. es como *EaG*. y la razon de *BaD*. es duplicada de *CaD*: luego la de *EaG*. tambien serà duplicada de *CaD*. Item, si *BaD*. es como *EaG*. y *BaD*. es razon duplicada de *CaD*: y *EaG*. es duplicada de *FaG*. luego *CaD*. serà tambien como *FaG*.

3 La razon de *BaD*. es duplicada de *EaF*. la mesma de *BaD*. es tambien duplicada de *FaG*. luego *EaF*. es como *FaG*. &c.

Al contrario. Si *EaF*. es como *FaG*. y la razon de *BaD*. es duplicada de *EaF*: luego la mesma *BaD*. serà tam bien duplicada de *FaG*.

4 La razon de *BaD*. es compuesta de *BaC*. y *CaD*. (21. P.) la de *EaG*. es compuesta de *EaF*. y *FaG*. siendo *BaC*. como *EaF*. y *CaD*. como *FaG*: luego *BaD*. es como *EaG*. llamese *ex æquo*, *vel æqualitate*, por la igualdad de composicion. En fin, vna razon se compara à otra, como vna cantidad à otra.

PROPOSICION II.

De las cantidades iguales.

1 *Las cantidades iguales tienen vna mesma razon contra otra, ò con otras iguales.*

2 *Si dos cantidades tienen vna mesma razon con otra, ò con otras iguales, son ellas iguales.*

3 *Vna cantidad tiene la mesma razon à dos otras iguales.*

4 *Si vna, ò muchas cantidades iguales tienen la mesma razon à otras, son estas iguales.*

5 *Las medias proporcionales entre los mesmos, ò iguales terminos, son iguales.*

Ex-

Explicacion.

1 Sean iguales cantidades *B*. *C*. y tambien *D*. *E*.

B. 3. C. 3. D. 9. E. 9.

Si *B*. y *C*. son iguales, la mesma razon tendrà *BaD*. que *CaD*. y si *D*. y *E*. son iguales, serà *BaD*. como *CaE*.

2 Si *BaD*. es como *CaD*. luego *B*. y *C*. son iguales. Item, si *BaD*. es como *CaE*. siendo *D*. y *E*. iguales: luego *B*. y *C*. son iguales.

3 Si *D*. *E*. son iguales, serà *BaD*. como *BaE*. porque *D*. y *E*. son como vna mesma.

4 Si *BaD*. es como *BaE*. luego *D*. y *E*. son iguales; y si *B*. *C*. son iguales, y *BaD*. es como *CaE*. seràn *D*. y *E*. tambien iguales.

5 Sean continuas B. C. D. y E. F. G.

B. 4. C. 2. D 1.
E. 4. F 2. G 1.

Si C. es media entre B. y D: y tambien F. es media entre B. y D. digo que C. y F. son iguales: porque seràn continuas *B*. *C*. *D*: y tambien *B*. *F*. *D*. (21. P.) y la razon de *BaD*. duplicada de *BaC*: y tambien duplicada de *BaF*. (21. P.) luego porque la razon de *BaD*. es duplicada de las dos, son ellas iguales entre si *BaC*. como *BaF*. (1. l. 5.) y porque la mesma cantidad B. tiene vna mesma razon à C. y à F: son C. y F. iguales (2. N.)

Si C. fuere media entre B. y D: y F. entre E. y G. siendo B E. iguales, y tambien D. G: digo que C. F. seràn iguales. Porque las iguales *B*. y *E*. son como vna mesma: y tambien *D*. y *G*: y assi *F*. serà media entre *B*. y *D*. (1. N.) luego *C*. y *F*. son iguales como antes (5. N.)

PROPOSICION. III.

De las cantidades desiguales.

1 *LA cantidad mayor, tiene mayor razon à otra tercera que la menor, y al contrario.*

2 *Vna cantidad tiene mayor razon à la menor, que à la mayor, y al contrario.*

3 *Si dos tienen vna razon à dos desiguales, son ellas tambien desiguales, y al contrario.*

4 *El mayor antecedente tiene mayor consequente, si la razon es la mesma, y al contrario.*

Explicacion.

1 SEan B. C. D. E. quatro cantidades;
B.8. C.6. D.4. E.3.
Si B. es mayor que C. la razon de BaD. serà mayor que la de CaD. Porque *B.* tendrà mas partes de D. que C. *Si BaD. tiene mayor razon que CaD. es B. mayor que C.* Porque contiene mas partes.

2 *Si B. es mayor que C. y se les compara D. la razon de DaC. es mayor que de DaB. y si la razon es mayor, es C. menor que B.* Porque D. siempre tendrà mas partes de C. que de B.

3 *Si B. y C. tienen vna misma razon con D. y E. y D. E. son desiguales, tambien lo seràn B. y C: y si B. y C. lo son, tambien D. y E.* Porque si B. C. fueran iguales, tambien lo fueran D. y E. y al contrario (2. l. 5.)

4 *Si BaD. es como CaE. y B. es mayor que C. tambien D. serà mayor que E: y si D. es mayor que E. tambien B. es mayor q̃ C.* Porq̃ si D. no fuera mayor que *E.* la razon de *BaD.* fuera mayor que la de *CaE.* (1. N.) y al contrario.

PROPOSICION IV.

De los terminos proporcionales.

1 *SI quatro terminos son proporcionales directos, seràn tambien proporcionales, inuertiendo, componiendo, diuidiendo, conuertiendo, y alternando.*

2 *La suma le los antecedentes, à la suma de los consequentes, es como vn antecedente à su consequente.*

3 *Si los terminos compuestos son proporcionales, tambien lo seràn diuiddios, y al contrario.*

4 *Si muchos terminos son continuos proporcionales, sus diferencias guardan la mesma proporcion, y al cōtrario.*

Explicacion.

1 SEan los quatro terminos B. C D. E.
B.6. C.3. D 4. E.2.
Directamente: como B a C. assi D a E:
Inuertiendo: como C à B assi E à D: luego
Componiendo: como B + C a C. assi D. + E a E.
Diuidiendo: como B — C a C. assi D — E a E.
Conuertiendo: como C a B + C. assi E a D + E. y como C a B — C. assi E a D — E Todo esto se verifica, aunque las razones sean en diferente especie de cantidad: como si B. y C. son lineas, y D. E. superficies, ò cuerpos.
Alternando: como B a D. assi C à E: pero essa comparacion alterna pide, que los quatro terminos sean de vna especie: porque si B. C. son lineas, y D. E. superficies, no tiene lugar la alternacion.

2 Como B + D. suma de los antecedentes à C + E. suma de los consequentes, assi BaC. ò assi DaE.

3 Si B + C a C. es como D + E a E. luego divididos B a C. serà como D a E. y al contrario si B a C. es como D a E. compuestos seràn B + C a C. como D + E a E.

4 *Sean continuos B. C. D. E. y las diferencias F. G H. digo que tienen la mesma razon.*

B. 27. C. 18. D. 12. E. 8.
F. 9. G. 6. H. 4.

Porque son proporcionales B a C. como C a D: luego dividiendo seràn B — C a C. como C — D a D. (1. N.) y pues B — C. es lo mesmo que F. y C — D. que G. seran F. à C. como G a D. luego alternando F a G. como C a D. (1. N.) assimesmo serà G a H. como D a E. &c. luego F. G. H. son diferencias que tienen la mesma razon continua.

Al contrario. Si F. à G. es como C a D: luego alternando F. à C. como G a D. y componiendo F + C a C. como G + D a D. esto es B a C: luego B. C. D. son continuos proporcionales, &c.

PROPOSICION V.

Del todo, y sus partes.

1 *Como vn todo à otro, assi la parte à la parte semejante del otro.*

2 *Como la parte de vn todo, à la parte semejante de otro: assi vn todo à otro.*

3 *Si vna parte à otra semejante fuere, como el todo al todo serà tambien el residuo al residuo, como el todo al todo, ò como la parte à la parte semejante.*

4 *Si el residuo al residuo es como la parte à la parte, el todo al todo tendrà la mesma razon, y al contrario.*

Explicacion.

1 Sea el vn todo, ò compuesto B + C. y el otro D + E.

B + C. D + E.
8. 4. 2. 1.

Como *B + C.* à D + *E*: assi es *B a* D. como todo el Cielo à todo el mundo, assi la mitad, ò tercio del Cielo à la mitad, ò tercio del mundo, &c.

2 Como *B a* D. assi *B + C.* à D + *E.* como la mitad, ò tercio del Cielo, assi à la mitad, ò tercio del mundo, assi todo el Cielo à todo el mundo.

3 Si *B a D.* es como *B + C.* à D + *E.* seràn *B. y* D. partes semejantes: luego quedaràn *C. y E.* partes tambien semejantes, y serà *C.* à *E.* como *B + C.* à D + *E.* ò como *B a* D. Esto es, si parte del Cielo, es a parte del mundo, como el Cielo al mundo: el residuo del Cielo, al residuo del mundo, serà como el Cielo al mũdo.

4 Si *C a E.* es como *B a* D. tambien *B + C.* à D + *E.* serà como *B a* D.

Todo lo dicho se funda, en que las partes semejantes, tienen entre si la mesma razon, que los todos, &c.

LIBRO VI.

DE EVCLIDES.

De la razon, y proporcion en particular.

ESte libro sexto se dize de *Oro*, con mucha razon, por la nobleza, y fecundidad de sus proposiciones; pues apenas se hallarà en toda la Mathematica problema, ò theorema ilustre, que no tẽga dependencia de este libro: y assi, deve el estudioso aplicar su principal industria, y trabajo en la perfecta inteligencia, y entera comprehension de sus theoremas.

Proposiciones del libro 6.

PROPOSICION I.

De los Triangulos, y Paralelogramos dissimiles.

1 *SI tienen igual altura, tienen la razon que las bases: y si igual base, la razon de las alturas, y al contrario.*

2 *Todos tienen la razon compuesta de las bases, y alturas.*

3 *Los que tienen las bases, y alturas reciprocas, son iguales, y al contrario.*

4 *Si tienen igual angulo, tienen la razon compuesta de los lados, y al contrario.*

5 *Si tienen los lados del angulo igual reciprocos, son iguales, y al contrario.*

6 *Si tres, ò quatro rectas son proporcionales, el triãgulo, ò paralelogramo, que con angulo igual se forma de la media, ò medias, es igual al de las estremas.*

Demonstracion, fig. 1.

1 *LOs triangulos* b. d. *tienen vna mesma altura: digo que tienen la razon que las bases: y que* b. à d. *es como BN. à ND.*

Porque si tienen igual altura, pueden estàr entre dos paralelas BD. FH: y si las bases son iguales, son los triangulos iguales: Si BN es dupla de ND. serà *b.* duplo de *d.* si tripla, triplo, &c. (3. l. 1.) luego tantas vezes cõtiene *b.* à *d.* como la base BN. à ND. y assi tiene *b.* à *d.* la razon que la base BN. à ND. (19. P.)

Si b. *y* d. *tienen igual base NE. tienen la razon que las alturas NB. ND.* Porque seràn iguales con altura igual:

y si EN. es dupla de ND. serà *b.* duplo de *d.* &c. (8. l. 1.)

Lo mesmo es de los Paralelogramos: por ser duplos de los triangulos (8. l. 1.)

Al contrario, si b. *y* d. *tienen la razon que las bases BN. à D. tendràn igual altura.* Porque si se considera el triangulo *x.* con igual altura que *b.* y con igual base que *d*: el triangulo *b.* à *x.* tendrà la razon que BN. à ND. (1. N.) luego porque *b.* tiene la mesma razon à *x.* que à *d.* son *x.* y *d.* iguales (2. l. 5.) y porque tienen igual base, tendràn igual altura (8. l. 1.) luego tambien *b.* y *d.* tienen igual altura (3. P.)

Si b. *y* d. *tienen la razon que las alturas, tendràn igual base*: y se demostrarà de la mesma suerte, tomando la base como altura, y al contrario.

2 *Sean dos triangulos* b. *y* g. *sus bases BN. ND: y sus alturas NE. NC: y sea XaZ. como BN. à ND: y ZaY. como NE. à NC. con que XaY. tiene la razon compuesta de XaZ. y de ZaY. (21. P.) que es la de las bases, y alturas: digo, pues, que el triangulo* b. *à* g. *tiene la razon que XaY.*

Sobre la base ND. formese el triangulo *d.* con la altura de *b.* y serà *bad.* como la base BN. à ND. (1. N.) esto es, como XaZ: y porque *d.* y *g.* tienen vna base ND. serà *dag.* como la altura NE. à NC. ò como ZaY. (1. N.) luego *ex æquo* las razones compuestas de iguales, son iguales *bag.* como XaY. (1 l. 5.) que es la razon compuesta de X à Z: y de Z a Y. (21. P.) ò la razon compuesta de las bases BN. à ND. y de las alturas NE. à NC. Lo mesmo se demuestra de los paralelogramos de la misma suerte, y tambien por ser duplos de los triangulos.

3 *Sean dos triangulos* b. *y* g. *sus bases BN. ND: y sus alturas NE. NC. si las bases, y alturas son reciprocas: esto es, si son proporcionales, y las dos estremas estàn en vna figura, y las dos medias en otra BN. à ND. como CN. à NE, digo que son los triangulos, ò Paralelogramos iguales.*

So-

Sobre la base ND. formese el triangulo *d.* con la altura de *b.* y serà *dab.* como la base ND. à NB. (1. N.) y porque *d.* y *g.* tienen vna base BN: serà *dag.* como la altura NE. à NC. (1. N.) luego porque la razon de ND. à NB. se supone la mesma que NE. à NC: tendrà el triangulo *d.* la mesma razon *ab.* que *ag*: luego *b.* y *g.* son iguales (2. l. 5.)

Al contrario. Si *b.* y *g.* son iguales, seràn las bases, y alturas reciprocas: porque formado *d.* como antes, serà *dab.* como *d.* à *g.* (2 l. 5.) y pues *dab.* por tener vna altura, es como la base ND. à NB (1. N.) y *d.* à *g.* por tener vna base ND es como la altura NE. à NC. (1. N.) luego ND. à NB. es como NE à NC: y pues las dos media NB. NE. estàn en el triangulo *b*: y las estremas ND. NC. en *g.* tienen *b.* y *g.* las bases, y alturas reciprocas (22. P.) Lo mesmo es de los Paralelogramos.

4 *Si* b. *y* d. *tienen iguales angulos BNE. DNC. y se toma XaZ. como BN. à ND. y Z. à Y. como EN. à NC. digo que el triangulo* b. *à* g. *tiene la razon que X. à Y. que es compuesta de X. à Z. y de Z a Y: esto es, de las de los lados BN. à ND. y EN. à NC.*

Iuntense los angulos en N. que sean vna recta BN. ND. y seràn los angulos BNE. END. iguales à 2. rectos (1. l. 1.) y por ser iguales BNE. DNC: seràn DNC. END. tambien iguales à 2. rectos, y CN. NE. vna recta (1. l. 1.) y si se tira la recta DE. los triangulos *b. d.* tendràn igual altura en vn punto E: luego *b.* à *d.* es como la base BN. à ND. ò como X a Z. (1. N.) y porque *d.* y *g.* tienen igual altura en vn punto D: serà *d.* à *g.* como la base EN. à NC. ò como Z a Y. (1. N.) luego *b.* à *g.* es como X à Y. (1. l. 5.) que es la razon compuesta de X. à Z. y de Z a Y. ò compuesta de los lados BN. à ND. y EN. à NC. (22. P.)

5 *Si los triangulos* b. *y* g. *tienen vn angulo igual BNE. à DNC: y los lados reciprocos BN. à ND. como NC. à NE. digo que son iguales.*

Iun-

Iuntense los angulos como antes: y serà *d.* à *b.* como DN. à NB. (1. N.) y *d.* à *g.* como EN. à NC. (1. N.) luego si suponemos que DN. à NB. es como EN. à NC: tendrà *d.* à *b.* la mesma razon que à *g*: y porque *d.* tiene vna mesma razon à los dos, seràn *b.* y *g.* iguales (21. 5.)

Al contrario. Si *b.* y *g.* son iguales con vn angulo igual, dispuestos como antes, serà *b.* à *d.* como *g.* à *d.* (21. 5.) y porque *b.* à *d.* con igual altura es como la base BN. à ND: y *g.* à *d.* como la base NC. à NE. (1. N.) luego BN. à ND es como NC. à NE. (1. l. 5.) y assi son los lados reciprocos, por estàr las estremas en *b.* y las medias en *g.* (22. P.) Lo mesmo se demuestra de los paralelogramos.

6 *Si 4. rectas son proporcionales DN. à NB. como EN. à NC. el triangulo* b. *formado de las medias BN. NE. con qualquiera angulo BNE. serà igual al triangulo* g. *formado de las estremas DN. NC. con igual angulo DNC.* Porque seràn los lados reciprocos (22. P.) luego seràn los triangulos *b.* y *g.* iguales (5. N.)

Al contrario. Si los triangulos *b.* y *g.* son iguales, y tienen vn angulo igual BNE. à DNC. seràn los lados reciprocos BN. à ND. como NC. à NE. (5. N.) luego de las 4. proporcionales, estàn las dos medias en *g.* y las estremas en *b.* (22. P.)

Si fueren tres continuas proporcionales DN. NB. BC. tomando à NE igual à la media NB seràn 4. DN. à NB como NE. à NC: luego *b.* y *g.* tendràn los lados reciprocos como antes, y seràn iguales, y al contrario.

Lo mesmo se demuestra de los paralelogramos.

ESCHOLIO.

Si los triangulos *b.* y *g.* son iguales, y tienen los lados reciprocos ND à NB como NE. à NC. y los angulos DNC. BNE. son de vna especie, seràn tambiē iguales; pero dichos angulos, pueden ser de diferente especie: y el vno, complemento del otro, al semicirculo, con que por la igualdad de los triangulos, y lados reciprocos, no se infiere la igualdad de los angulos.

PROPOSICION. II.

De los triangulos semejantes.

1 *Los triangulos equiangulos son semejantes.*
2 *La recta paralela à la base, haze triangulos, y segmentos semejantes, y al contrario.*
3 *Si los tres lados de vn triangulo son proporcionales à los tres de otro, son los triangulos semejantes, y al contrario.*
4 *Si dos lados son proporcionales à los de otro con igual angulo son los triangulos semejantes.*
5 *Los tringulos que tienen vn angulo igual, y los lados de otro proporcionales, y el tercer angulo de vna especie, son semejantes.*
6 *Si los triangulos semejantes tienen las bases en vna recta, ò paralelas, tendràn los lados paralelos, y al contrario.*

Demonstracion. fig. 2.

2 *Los triangulos BNC. DNE. son equiangulos: digo que tienen los lados proporcionales CN. à NB. como NE. à ND. y assi son los triangulos semejantes.*

Ponganse verticales los dos angulos iguales END. BNC. y otros dos iguales NED. NCB. sean alternos, con que seràn ED BC. paralelas (2. l. 1.) y tiradas EB. CD. los triangulos BCD. BCE. sobre vna base BC. y entre dos paralelas BC. ED. seràn iguales (8. l. 1.) y qui-

quitado el comun BNC. quedaràn iguales triangulos BNE. CND. que tienen los angulos verticales iguales BNE. CND (1. l.1.) luego los lados que ciñen dichos angulos son reciprocos BN. à NC. como ND. à NE. (1.l.6.) luego son proporcionales los lados, que comprehenden los angulos iguales BNC.DNE. pues BN. à NC. es como ND. à NE. Si los angulos iguales NED. NCB. se ponen verticales, de la mesma suerte se demostrarà, que NE à ED. es como NC. à CB: luego todos los lados que corresponden à iguales angulos son proporcionales, y assi son los triangulos semejantes (22.P.)

2 *En el triangulo FNG. es la recta ED. ò BC. paralela à la base: digo que haze triangulos, y segmentos semejantes.* Por las paralelas, son iguales los angulos NFG. NBC. NDE: y tambien NGF. NCB. NED. (2.l.1.) y los verticales BNC. END (1.l.1.) luego los triangulos FNG. BNC. END. son equiangulos: luego son semejantes (1. N.) y son proporcionales los lados FN. à NG. como BN. à NC: y como DN. à NE. (1.N.) y por ser toda FN. à toda NG. como la parte BN. à la parte NC: tambien el residuo BF. à CG. serà como FN. à NG. ò BN. à NC. (5.l.5.)

Al contrario. Si vna recta BC. corta los lados proporcionales BN. à NC. como FN. à NG. serà BC. paralela à FG. Porque si se considera por B. vna paralela à FG cortarà los lados proporcionales, y passarà por C. (2.N.) luego serà la mesma BC.

3 *Si dos triangulos FNG. GMO. tienen los tres lados proporcionales, seràn semejantes.* Tomese FB. igual à GM y sea BH. paralela à NG: con que serà FB à FH. como FN. à FG. (2.N.) y pues tambien se supone GM. à GO. como FN. à FG es FB. à FH. como GM. à GO. (1.l. 5.) y alternando como FB. igual à GM assi FH. igual a GO: y tambien como FB. igual à GM assi BH. igual à MO. (4.l.5.) luego porque los triangulos FBH. GMO.

GMO. tienen todos los lados iguales, son en todo iguales, y equiangulos (4.l.1.) y porque FBH. es equiangulo à FNG. (2.N.) tambien lo serà GMO. y assi GMO. es semejante à FNG. (1.N.)

4 *Si dos triangulos MGO. NFG. tienen los angulos G. y F. iguales, y los lados que les ciñen proporcionales NF. à FG. como MG. à GO. seràn semejantes.* Porque si se toma FB. igual à GM. y BH. paralela à NG. se demostraràn los triangulos FBH GMO. en todo iguales: y GMO. semejante à FNG. como en el 2 *num.*

5 *Si dos triangulos FNG. GMO. tienen los angulos F. G. iguales: y los lados de N. y M. proporcionales: y los otros angulos NGF. MOG. de vna especie, seràn semejantes.* Porque si FB. es igual à GM. y BH paralela à NG: serà FB. à BH: como FN. a NG. (2 N.) que se supone como GM. à MO: luego alternando como FB. igual à GM. assi BH. igual à MO. (4.l. 5.) y porque FBH. GMO. tienen iguales dos lados FB. BH. à GM. MO. y vn angulo opuesto igual F. y G. y el otro H. O. de vna especie, son en todo iguales, y equiangulos (4.l. 1.) luego porque FBH. es semejante à FNG. (2.N.) tambien GMO serà semejante à FNG.

6 *Si los triangulos FNG. GMO. son semejantes, y tienen las bases en vna recta FO. los lados semejantes seràn paralelos.* Porque OF. entra en GM. FN. con iguales angulos G. F. y en OM. GN. con iguales FGN. O. (22.P.) luego FN. GM. son paralelas, y tambien GN. OM (13 P.)

Si las bases BC. GO. ò ED. GO. son paralelas, se demostrarà lo mesmo porque continuada la base OGF. hasta que corte los lados continuados DNF. ENG por ser FD BC. FO. paralelas, se demostraràn iguales los angulos D B F G. y tambien E. C. NGF. O (2.l.1.) luego son FD. GM: y GE. OM paralelas (13 P.)

Esto se entiende quando todos los angulos iguales se corresponden: como en BNC. GMO. ò todos estàn inversos, como en END. OMG.

Al

Al contrario. Si las bases, y lados son paralelos, seràn todos los angulos iguales, por el paralelismo (2. 1. 1.) luego seràn los triangulos equiangulos, y semejantes (1. N.)

PROPOSICION III.

De las rectas angulares.

1 *LA recta que parte igualmente al angulo, parte la base con la razon de los lados, y al contrario.*

2 *La recta que con vn lado haze angulo igual al opuesto, forma vn triangulo semejante al todo, y el lado es medio entre la base, y segmento contermino, y al contrario.*

3 *La perpendicular del angulo recto, haze dos triangulos semejantes al todo, y es media entre los segmentos, y cada lado es medio entre la base, y el segmento contermino, y al contrario.*

4 *Los perpendiculos de dos angulos, hazen con el otro angulo dos triangulos semejantes, y los segmentos proporcionales à los lados opuestos.*

5 *Si dos rectas de los angulos parten proporcionalmente los lados, se parten ellas proporcionalmente, y al contrario.*

Demonstracion, fig. 3.

1 EN *el triangulo GNF. la recta NH. parte igualmente al angulo GNF. digo que GH. à HF. es como GN. à NF.* Sea HB. paralela à GN y seràn los alternos iguales GNH NHB. (2. 1. 1.) y pues se suponen iguales GNH. HNB. seràn iguales HNB.

HNB. BHN. (3. P.) y los lados opuestos tambien NB. BH. (5. 1. 1.) luego porque GH. à HF. es como NB. ò HB. à BF. (2. 1. 6.) y tambien GN. à NF. como HB. à BF. (2. 1. 6.) serà GH. à HF. como GN. à NF. (1. 1. 5.)

Al contrario. Si GH. à HF. es como GN. à NF. partirà NH. al angulo GNF. igualmente. Porque la que assi le parte haze que GH à HF. sea como GN. à NF. (1. N.) luego si NH. haze esto, ella parte igualmente al angulo.

De otra suerte. Si es HB. paralela à GN: serà GH. à HF. como NB. à BF (2. 1. 6) luego NB. à BF. es como GN. à NF (1. 1. 5.) y tambien GN. à NF. como HB. à BF. (2. 1. 6.) luego HB. à BF. es como NB. à BF (1. 1. 5.) y assi son iguales HB. BN. (2. 1. 5.) y los angulos opuestos HNB. BHN (5. 1. 1) y tambien los alternos BHN. GNH. (2. 1. 1.) luego tambien GNH. HNB. y assi el angulo GNF. se parte igualmente.

2 *Si en el triangulo* cdb. *la recta* dr. *haze el angulo* cdr. *igual al opuesto* b. *Digo* 1. *que el triangulo* cdr. *es semejante al todo* cdb. 2. *que* dc. *es media entre* bc. *y* cr. Porque el angulo c. es comun, y se suponen iguales *rdc. cbd.* seràn tambien iguales *drc. cdb.* (3. 1. 1.) luego los triangulos *cdr. cdb.* son equiangulos, y semejantes (2. 1. 6.) y son proporcionales *cr.* à *cd:* como *cd.* à *cb:* el lado menor de *cdr.* al mayor, como el menor de *cdb.* al mayor (2. 1. 6.) con que *cd.* es media, &c.

Al contrario. Si los triangulos cdr. cdb. *son semejantes, digo que el angulo* cdr. *serà igual al opuesto* b. Porque si *cdr.* y *cdb.* son equiangulos, siendo el angulo c. comun, serà *cdr.* igual à *b.* ò à *cdb:* y pues *cdr.* no es igual à *cdb.* por ser *dr. db.* diferentes rectas, queda *cdr.* igual à *b.*

Tambien si el lado cd. *es medio entre* cr. cb. Porque siendo el angulo c. comun, y sus lados proporcionales *cr.* à *cd.* como *cd.* à *cb.* son los triãgulos *cdr. cdb.* semejantes (2. 1. 6.) y el angulo *cdr.* igual à *b.* (2. N.)

3 *Si el angulo* d. *es recto, y* dr. *perpendicular. Digo*

1. *que los 3. triangulos* cdr. rdb. bdc. *ſon ſemejantes*. 2. *que* dr. *es media entre* cr. rb. 3. *que* cd. *es media entre* cr. cb. 4. *que* db. *es media entre* br. bc.

Porque en los triangulos *cdr. cdb.* el angulo c. es comun; y *cdb. drc.* rectos iguales, ſeràn *cdr. cbd.* iguales (3. l. 1.) y en los triangulos *drb. cdb.* es b. comun, y *drb. cdb.* iguales: luego ſon *rdb. dcb.* iguales, y los 3. triangulos ſemejantes.

2. Luego *cr.* à *rd.* es como *dr.* à *rb.* y *dr.* media entre *cr. rb.* (2. l. 6.) 3. tambien *rc.* à *cd.* como *dc.* à *cb.* y *dc.* media entre *cr. cb.* (2. N.) 4. tambien *rb.* à *bd.* como *db.* à *bc.* y *bd.* media entre *rb. bc.* (2. N.)

Al contrario. Si cdb. *es recto, y* dr. *haze los triangulos* cdr. rdb. *ſemejantes à* cdb. *ſerà* dr. *perpendicular*. Porque los angulos en *r.* ſeràn rectos.

Si dr. *es perpendicular, y haze los triangulos ſemejantes* crd drb. *ò es* dr. *media entre* cr. rb. *ò es* cd. *media entre* cr. cb. *ſerà el angulo* cdb. *recto*. Porque conſiderando en *c.* vna perpendicular à *db.* paſſarà por *r.* y harà lo meſmo (3. N.)

4 *En el triangulo* END. *ſon dos perpendiculos* DX. EZ. *digo que los triangulos* DNX. ENZ. *ſon ſemejantes; y* ZN. *à* NX. *como* EN. *à* ND. Porque en los triangulos NEZ. NDX. el angulo N. es comun, y los rectos X. Z. iguales: quedan ZEN. XDN. iguales, y los triangulos equiangulos (3. l. 1.) luego ZN. à NE. como XN. à ND. (2. l. 6.) y alternando ZN. à XN. como NE. à ND. (4. l. 5.)

5 *Si en el triangulo* cdb. *las rectas* ca. dr. *cortan los lados proporcionales* db. *à* ba. *como* cb. *à* br. *digo que* dn. *à* nr. *es como* cn. *à* na. Porque los triangulos *brd. bac.* tienen el angulo *b.* comun, y ſus lados reciprocos *bd.* à *bc.* como *ba.* à *br.*: luego ſon iguales (1. l. 6.) y quitado el eſpacio comun *banr.* quedaràn *dna. cnr.* triangulos iguales (4. P.) y por ſer iguales, y tambien los angulos verticales *dna. cnr.* tendràn los lados reciprocos *dn.* à *nr.* como *cn.* à *a.* (1. l. 6.)

Al contrario. Si *dn.* à *nr.* es como *cn.* à *na.* ſerà el triangulo *dna.* igual à *cnr.* (1. l. 6.) y añadido el comun *banr.* ſerà *brd.* igual à *bca*: y por ſer el angulo *b.* comun, tendràn los lados reciprocos (1. l. 6.) luego *bd.* à *ba.* es como *bc.* à *br.* &c.

PROPOSICION IV.

De las figuras ſemejantes.

1 *Las ſemejantes à otra, ſon ſemejantes entre ſi: todas ſe reſueluen en triangulos ſemejantes: y las diagonales tienen la razon que los lados.*

2 *Tienen la razon duplicada de los lados homologos, y ſemejantes.*

3 *Deſcritas ſobre rectas proporcionales, ſon proporcionales, y al contrario.*

4 *La que ſe forma de la baſe de vn triangulo rectangulo, es igual à las dos de los lados, y al contrario.*

5 *Las que eſtàn dentro de otra con vn angulo comun, tienen comunes diagonales, y los lados paralelos, y al contrario.*

6 *La diagonal comun haze ſegmentos, y complementos proporcionales.*

7 *En los paralelogramos, y figuras, que por la diagonal ſe parten igualmente, ſon los complementos iguales, y al contrario.*

Demonſtracion.

1 *Las figuras ſemejantes à otra, ſon entre ſi ſemejantes.* Porque tienen todos los angulos iguales, y los lados proporcionales à los de la otra (22. P.) luego tambien entre ſi (1. l. 5.) y aſsi ſon ſemejantes (22. P.)

Si EBM. CBR. son semejantes, digo que se resueluen en triangulos semejantes. Porque tiradas EF. CD. opuestas à los angulos iguales EBF. CBD. comprehendidos de lados proporcionales EB. à BE. como CB. à BD. (22.P.) seràn los triangulos *b. q.* semejantes (2. l. 6.) y EF à DC como EB à BC: de la mesma suerte se demostrarà el triangulo *z.* semejante à *x.* y FN. à DS. como FM. à DR: y porque los tres lados de *h.* son proporcionales à los de g son tambien semejantes: luego se resuelven las figuras en triangulos semejantes.

Las diagonales semejantes, son proporcionales à los lados. Porque se ha demostrado FE à DC. como BE. à BC. &c.

Al contrario. Si las figuras se resuelven en triangulos semejantes *b. h. z.* y *q. g. x.* con el mismo orden; seràn todos los angulos iguales, y los lados proporcionales: luego las figuras seràn semejantes (22. P.)

2 *Si EBM. CBR. son semejantes digo q̃ EBM. à CBR. tiene la razon duplicada de EB. à BC. ò BF. à BD. que son los lados homologos, y semejantes.* Iuntense las figuras, que dos angulos iguales EBF. CBD. sean verticales, y tirada FC sean 3. continuas EB. BC. CH. con que la razon de EB. à CH. serà duplicada de EB. à BC. y de FB. à BD. que es la mesma. (21. P.) El triangulo *b.* à *d.* con igual altura en F: es como la base EB à BC. (1. l. 6.) y el triangulo *d.* à *q.* con igual altura en C. es como la base FB à BD. (1. l. 6.) esto es, como EB. à BC. ò BC à BH: luego porque *b* à *d.* es como EB à BC. y *d* à *q.* como BC. à CH: quitados los intermedios serà *b.* à *q.* como EB. à CH. que es razon duplicada de los lados homologos EB à BC. por ser continuos EB. BC. CH. (21. P.) Lo mesmo se demostrarà de los triangulos *h.* y *g.* y de *z.* y *x*: luego la suma de *b. h. z.* que es la figura BM à la suma de *q. g. x.* que es la figura RB. tiene la mesma razon de EB. à CH. duplicada de los lados homologos EB. à BC ò FB. à BD. &c.

3 *Si*

3 *Si fueren 4. proporcionales EB. à BC. como NM. à RS: y sobre EB. BC. huviere dos figuras semejantes* b q: *y sobre NM. RS. otras dos semejantes EM. CR. digo que son proporcionales* b. à q. *como EM. à CR.* Porque *b.* à *q.* tiene la razon duplicada de EB. à BC: y el trapecio EM. à CR. tiene la duplicada de NM. à RS. (2. N.) luego pues la razon duplicada de EB. à BC. es la mesma duplicada de NM. à RS. (1. l. 5.) la mesma razon tiene *b.* à *q.* que EM à CR. y alternando, &c. (4. l. 5.)

Al contrario. Si *b.* à *q.* es como EM. à CR: tendrà *b* à su semejante la razon duplicada de EB. à BC: y EM. à CR. su semejante la duplicada de NM à RS. (2 N.) luego si las duplicadas son iguales, tambien las sencillas (1. l. 5.) y son proporcionales EB. à BC. como NM. à RS.

4 *Si el triangulo FBC. es rectangulo, y sobre los dos lados FB. BC. se descriuen dos figuras semejantes BM. BR. y otra semejante sobre la base FC: digo que la figura sobre FC. serà igual à las otras dos de BF. BC.* Porque las figuras semejantes de qualesquiera rectas, son como los quadrados; esto es, tienen la mesma razon duplicada de los lados homologos (2. N.) y pues el quadrado de FC es igual à los quadrados de BF. BC. (4. l. 2.) luego qualquiera otra figura de FC. serà igual à sus semejantes sobre BF. BC. (2. l. 5.)

Al contrario. Si la figura de FC es igual à sus semejantes de BF BC: tambien el quadrado FC. serà igual à los dos BF. BC. (2 N.) luego el angulo FBC. serà recto (4. l. 2.)

5 *Si las figuras semejantes* nl. mo. *tienen el angulo* z. *comun, digo que tienen comunes diagonales* zd zb zl. *y los lados paralelos.* Porque las figuras semejantes desde el angulo igual, ò comun, se dividen en triangulos semejantes (1. N.) son los angulos *mzh. nzd* iguales: luego *zh. zd.* son vna mesma linea (10. P.) y tambien *zib*: luego las diagonales *zhd. zib.* son comunes, y en los trian-

triangulos semejantes, son los angulos *zmb. znd.* iguales: luego *mb. nd.* son paralelas, y tambien *hi. db.* y *oi. io. ro. ql.* (13. P.)

Al contrario. Si las diagonales *zd. zb.* &c. son comunes, y los lados paralelos, todos los triangulos seràn semejantes (2. l. 6.) luego tambien las figuras (1. N.)

6 *Si las figuras semejantes* dq. hr. cf. *tienen la diagonal comun* zb. *digo* 1. *que los segmentos* zndb. zmhi. *son semejantes.* Porque constan de triangulos semejantes *zmh. znd.* y *zhi. zdb.* (5. N.) luego son los segmentos semejantes, y lo mesmo es de *zib. zoi:* y de *bnz. bai.* &c. (1. N.)

Digo 2. que si los angulos z. b. *son comunes, y tambien el punto* i. *el complemento de vna parte* ni. *al complemento* il. *tiene la razon que el segmento* nb. à zl. Porque siendo los segmentos de vna parte semejantes, y tambien los de la otra (5. N.) serà *nb.* à *zl* como *mi.* à *zo.* y como *bu.* à *ie.* (5. l. 1.) luego porque todo el segmento *nb.* es à todo *zl:* como las partes *mi. ?b.* à las partes *zo. ei:* el residuo, ò complemento *ni.* al residuo *il.* tendra la mesma razon que el segmento *nb.* à *zl.* (5. l. 5.) luego los complementos son como los segmentos.

7 *En el paralelogramo* dq. *son iguales los complementos* di. iq. Porque la diagonal *zb.* haze los segmentos iguales *zdb. zbq.* (7. l. 1.) luego los complementos *di. qi* son iguales como los segmentos (6. N.)

Lo mesmo se demuestra de las figuras regulares de lados pares Hexagono, Octagono, &c.

Tambien de qualesquiera otras que por la diagonase parten igualmente.

PRO-

PROPOSICION V.

Del Circulo, y sus partes.

1 *Los angulos, y sectores de Circulos iguales, tienen la razon que los arcos, y al contrario.*

2 *En Circulos desiguales las cuerdas, arcos, y circunferencias semejantes, son como los radios, y al contrario.*

3 *En los mesmos las cuerdas, arcos, y segmentos iguales, son desemejantes, y de mayor valor en el menor Circulo.*

4 *Las figuras semejantes inscritas, ò circunscritas, tienen la razon duplicada de los radios.*

5 *Tambien los sectores, y segmentos semejantes, y los Circulos entre si.*

Demonstracion. fig. 5.

1 *En vn Circulo los angulos, y sectores, son como los arcos.* Porque si el arco CG. es igual à GD. el angulo CEG. serà igual à GBD. (10. P.) y se ajustaràn los arcos, y radios (1. P.) luego tambien los sectores, y assi son iguales (1. P.) *si el arco* CG. es duplo de GP. serà el angulo, y sector CBG. duplo de CBP: como CBM. triplo, y CBD. quadruplo, &c. Luego siempre los angulos, y sectores tienen la razon que los arcos en vn Circulo.

Lo mesmo es en Circulos iguales: porque ajustandose hazen vn Circulo (1. P.)

Al contrario. Los angulos son como los sectores; y los sectores, como los angulos, por la mesma razon.

2 *En Circulos desiguales, si los arcos EF. DC. son semes-*

mejantes: digo que las cuerdas, y los arcos EF. DC. tienen la razon que los radios. Por ser los arcos ſemejantes EF. DC. ſon iguales los angulos EBF. DBC. (10. P.) y los lados proporcionales, como EB. igual à BF. aſsi DB. igual à BC: luego ſon los triangulos ſemejantes, y la baſe, o cuerda EF. à DC. es como el radio BE. à BD. (2. l. 6.)

Lo meſmo es de los arcos: porque ſi ſe parten igualmente con la recta BHG: ſerà EH. igual à HF. como DG. à GC. y aſsi infinitamente ſe correſponden iguales cuerdas, y arcos iguales en cada Circulo: luego los arcos ſemejantes tienen la razon que las cuerdas, que es la de los radios.

Lo meſmo es de vna circunferencia entera à otra: porque como la parte à la parte ſemejante, aſsi el todo al todo (5. l. 5.)

3 *En Circulos deſiguales las cuerdas, arcos, y ſegmentos iguales, ſon deſemejantes.* Porque ſi eſtos fueran ſemejantes, tendrian la razon que los radios (2. N.) y aſsi fueran deſiguales como los radios, que es contra lo ſupueſto: luego ſon deſemejantes.

Si la cuerda es igual, corta arco de mas valor en el Circulo menor. Porque ſi tuvieran igual valor: fueran los arcos ſemejantes (9. P.) y fuera menor la cuerda, como el radio en el Circulo menor (2. N.) y mucho mas ſi el arco tuviera menos valor (2. l. 3.) luego ſi en el menor Circulo el arco no es de igual, ni de menor valor, ſerà de mayor valor.

4 *Las figuras inſcritas, y circunſcritas, tienen la razon duplicada de los radios.* Porque ſi DBC. EBF. ſon partes ſemejantes de dos Hexagonos inſcritos, &c. Los lados DC. EF. que ſon cuerdas de arcos ſemejantes, ſeràn como los radios BD. à BE. (2. N.) luego porque el Hexagono DBC. &c. à EBF. &c. tiene la razon duplicada de DC. à EF. (4. l. 6.) tendrà tambien la razon duplicada de los radios BD. à BE. (1. l. 5.) Lo meſmo ſe demueſtra de las circunſcritas.

5 Los

5 *Los ſectores, y ſegmentos ſemejantes, y los Circulos entre ſi tienen la razon duplicada de los diametros, ò radios.* Porque en los ſectores BEF. BDC. el triangulo BEF. à BDC. tiene la razon duplicada de BE. à BD. (4. N.) y dividiendo igualmente los arcos en H. y G. el triangulo EHF. à DGC. tiene la razon duplicada de las cuerdas EF. à DC. (4. l. 6.) que es duplicada de los radios BE. à BC. (4. N.) y continuando infinitamente la biſeccion, tendrà ſiempre los triangulos la razon duplicada de los radios. Luego la ſuma de todos los triangulos que componen à vn ſector, ſegmento, ò Circulo, à la ſuma de otro ſu ſemejante, tendrà la meſma razon duplicada de los radios (4. l. 5.) luego porque continuada infinitamente la biſeccion, la ſuma de todos los triangulos compone al ſector, ſegmento, ò Circulo, tendrà vn ſector, ſegmento, ò Circulo, à otro ſu ſemejante la meſma razon duplicada de los radios (5. l. 5.)

Conſectario. Todo lo que ſe dixo en la *prop.* 4 de las figuras ſemejantes, conviene à los ſectores, y ſegmentos ſemejantes, y à los Circulos entre ſi.

PROPOSICION VI.

De las rectas en el Circulo.

1 *Si dos cuerdas ſe cortan, los ſegmentos ſon reciprocos, y ſus rectangulos iguales.*

2 *La perpendicular de la circunferencia al diametro, es media entre los ſegmentos del diametro.*

3 *Qualquiera cuerda es media entre el diametro que paſſa por vn eſtremo, y el ſegmento que haze la perpendicular del otro eſtremo.*

4 *La tangente es media entre la ſecante, y ſu exterior*

N rior

rior ſegmento, y al contrario: y las tangentes de vn punto, ſon iguales, y ſolas dos.

5 *Las ſecantes ſon reciprocas con ſus exteriores ſegmentos: y con las cuerdas hazen triangulos ſemejantes.*

6 *Los rectangulos de cada ſecante con ſu exterior ſegmento, ſon iguales al quadrado de la tangente, y entre ſi.*

Demonſtracion, fig. 6.

1 L*As cuerdas CF. DE. ſe cortan en H. digo que los ſegmentos ſon reciprocos HD. à HC. como HF. à HE: y el rectangulo DHE. igual à CHF.* Porque tiradas CD. EF. los angulos DCF. DEF. ſon iguales, y la mitad de GZF. y tambien CDE. CFE. la mitad de CE. (3. l. 3.) y los verticales CHD. EHF. (1. l. 1.) luego los triangulos DHC. EHF. ſon equiangulos, y ſon proporcionales DH. à HC: como FH. à HE. (2. l. 6.) y el rectangulo DHE. de las eſtremas, es igual à CHF. de las medias (1. l. 6.)

2 *Si del punto C. en la circunferencia es CO. perpendicular à qualquiera diametro DE. digo que CO. es media entre los ſegmentos DO. OE.* Porque tiradas CD. CE. ſerà el angulo DCE. recto en el ſemicirculo (3. l. 3.) y el triangulo DCE. rectangulo: luego la perpendicular CO es media entre los ſegmentos de la baſe DO. OE. (3. l. 6.)

3 *Sea qualquiera cuerda CE. y ED. diametro, y CO. ſu perpendicular. Digo que CE. es media entre DE. y EO.* Porque el triangulo DCE. es rectangulo, como en el *num.* 2. y el lado CE. medio entre la baſe DE. y ſegmento EO. (3. l. 6.)

4 *Si de el punto B. la recta BC. toca al Circulo en C. y otra BE. le corta. Digo que BC. es media entre la ſecante EB. y ſu exterior ſegmento BD.* Porque tiradas CE. CD.

CD los angulos CED. BCD. ſon iguales, y la mitad del arco DC. (3. l. 3.) y tambien porque el angulo del ſegmento CED. es igual al de la tangente BC. y ſecante CD. (7. l. 3.) luego porque en el triangulo BCE. la recta CD. haze el angulo BCD. igual al opueſto CEB. es CB. media entre la baſe EB. y el ſegmento BD. (3. l. 6.)

Al contrario. Si BC. es media entre EB. BD. ſerà el angulo BCD. igual al opueſto CEB. (3. l. 6.) luego porque BC. haze con la ſecante CD. el angulo BCD. igual al de el ſegmento opueſto CED. ſerà BC. tangente (7. l. 3.)

Si de el punto B. ſon dos tangentes BC. BZ. digo que ſon iguales. Porque cada vna es media entre EB. BD. (4. N.) y las medias entre iguales terminos, ſon iguales (2. l. 5.)

Deſde B. no puede auer otra tangente: porque ſolas dos iguales ſe pueden tirar à la circunferencia convexa (1. l. 3.) y aſsi las tangentes de vn punto ſon dos ſolas, y à partes opueſtas.

5 *El rectangulo EBD. y tambien FBG. es igual al quadrado de la tangente BC.* Porque BC. es media entre EB. BD. y entre FB. BG. (4. N.) luego el *quad.* BC. es igual rectangulo EBD: y tambien à FBG. (1. l. 6.)

Los rectangulos EBD. FBG. de cada ſecante, y ſu exterior ſegmento, ſon iguales entre ſi. Porque cada vno es igual al quadrado de la tangente BC. (5. N.) luego tambien entre ſi (3. P.)

6 *Las ſecantes BE. BF. ſon reciprocas con ſus exteriores ſegmentos BG. BD.* Porque el rectangulo BED. es igual à FBG. (5. N.) luego los lados ſon reciprocos BE. a BF. como BG. à BD. (1. l. 6.)

Los triangulos BDG. BFE. ſon ſemejantes. Porque ſiendo el angulo DBG. comun, ſon los lados proporcionales BD. à BG. como BF. à BE. (6. N.) luego ſon los triangulos ſemejantes (2. l. 6.) Tambien porque los

los angulos BDG. GDE. en vn punto son tanto como 2. rectos (1. l. 1.) y en el quadrilatero del Circulo DGFE. son GDE. EFG. opuestos tanto como 2. rectos (3. l. 3.) luego EFG. GDB. son iguales (4. P.) y assimesmo BEF. BGD. y DBG. comun: luego los triangulos son equiangulos, y semejantes (2. l. 6.)

PROPOSICION VII.

De los puntos semejantes.

1 *LAs figuras semejantes paralelas, tienen lineas semejantes comunes, y en todas se halla vn punto comun semejante, y al contrario.*

2 *Todas las rectas que passan por dicho punto, son semejantes, y las que passan por dos puntos semejantes à otros.*

3 *Si dos rectas semejantes tienen punto comun semejante, las que juntan sus puntos semejantes, son paralelas, y al contrario.*

4 *Las rectas que en dos puntos semejantes, o en el comun hazen iguales angulos àzia las partes semejantes, con otras semejantes; son ellas semejantes, y al contrario.*

5 *Y los angulos de qualesquiera dos semejantes àzia vna parte, son iguales, y en vna circunferencia.*

6 *Todas las dichas en los puntos semejantes, tienen la razon que los lados homologos, y radios de los Circulos.*

7 *Y los rectangulos à los perimetros dissimiles, son iguales entre si, y en los Circulos à los de los diametros.*

Ex-

Explicacion.

PVntos, y lineas semejantes, respeto de dos figuras semejantes, se llaman quando distan proporcionalmente de todas las partes semejantes de las figuras. Punto, o linea comun semejante serà, si dista proporcinalmente de todas las partes semejantes de dos, ò mas figuras.

Demonstracion. fig. 4. lam. vlt.

1 *SI las figuras ABCE. abce. son semejantes, y paralelas. Digo que todas las lineas que juntan dos puntos semejantes* Aa. Bb. Cc. Ec. *son semejantes comunes, que concurren en vn punto* D. *que serà semejante comun.* Porque siendo paralelos BC. *bc.* y EC. *ec.* &c. es BC. à *bc.* como CD. à *cD.* (2. l. 6.) y BC—*bc.* à *bc:* como *Cc* à *cD.* (4. l. 5.) assimesmo si *Ec.* continuada concurre en *d.* EC—*ec.* à *ec.* que es BC—*bc.* à *bc.* como *Cc.* à *cd:* luego la mesma razon tiene *Cc.* à *cD.* que *Cc.* à *cd.* (1. l. 5.) y assi *cD.* y *cd.* son iguales (2. l. 5.) y los puntos *Dd.* son vno mesmo. De la mesma suerte se demostrarà que *Aa.* continuada passa por D: y si en los lados homologos AE. *ae.* se toma AG. el tercio de AE. y *ag.* el tercio de *ae.* passarà *Gg.* por D: y lo mesmo es de qualesquiera otros puntos semejantes *Ll. Oo.* &c. Luego la linea B*b*D. es semejante comun, y lo mesmo A*a*D. &c. y el punto D. es comun semejante, segun la difinicion.

Al contrario. Si D. es punto comun semejante, y son proporcionales BD. à CD. como *bD.* à *cD.* seràn los lados BC. *bc.* paralelos (2. l. 6.) y assi de los otros, y las figuras paralelas.

Todo lo dicho conviene à las figuras directas del *caso* 1. y à las inversas del *caso* 2. y à los Circulos de en-

tram-

trambos casos, pues en ellos se pueden inscrivir infinitas figuras semejantes paralelas.

Adviertase, que las figuras *EB. eb.* pueden tocarse, cortarse, y estar vna dentro de otra: y siempre se demostrarà lo mesmo, y se hallarà el punto D. como antes.

2 *Si por el punto D: comun passa qualquiera recta DE. por dentro, ò fuera de las figuras: digo que serà comun semejante.* Porque tomando qualesquiera dos puntos semejantes C. c. la recta *Cc.* passarà por D. (1. N.) y consideradas las perpendiculares CX. *cx.* en el *caso* 1. seràn paralelas (13. P.) luego CX. à *cx.* es como CD. à *cD.* (2. l. 6.) y lo mesmo se demostrarà si las perpẽdiculares se arrojan de los puntos semejantes *Aa. Bb. Oo.* &c. luego porque DE dista proporcionalmente de todas las partes semejantes de las dos figuras, es comun semejante, segun la difinicion.

Si las figuras EE. be. son semejantes, aunque no sean paralelas: y los puntos A. L. son semejantes à a. l. digo que las lineas AI. al. son semejantes. Porque si en la vna figura tomamos dos puntos E. C: y sus semejantes en la otra *e. c.* tiradas EA. CA. CL: y *ea. ca. cl.* por ser los 4. puntos A. E. C. L. semejantes à los 4. *a. e. c. l.* seràn las figuras AECL. *aecl.* semejantes (*defin.*) luego los lados homologos AI. *al.* son lineas semejantes, respecto de las figuras EB *eb.*

Las lineas AL. *al.* pueden coincidir en vna, como en el *caso* 1. y 2. y formar angulo, como en el *caso* 3. y 4: y tambien pueden ser paralelas. Las figuras pueden tambien tocarse, y cortarse, como en el *num.* 1.

3 *Si las rectas AD. aD. son semejantes, respeto de las figuras EB. eb. y el punto comun D. es semejante: y los puntos A. L. semejantes à a. l. digo que las rectas Aa. Ll. son paralelas.* Porque en el *caso* 3. las rectas AD. *aD.* forman angulo, y se suponen los lados proporcionales AD. à *aD.* como LD à *ld.* (*defin.*) luego son las bases, ò rectas *Aa. Ll.* paralelas (2. l. 6.)

Al

Al contrario. Si D. es punto comun semejante, y son semejantes *A. a.* y es su paralela *Ll.* seràn *L. l.* semejantes: y si fueren *A. a.* semejantes, y tambien L. *l.* y *Aa.* paralela à *Ll.* serà D. punto comun semejante, todo por la mesma razon.

4 *En el caso 3. y 4. las rectas ED. ed. en los puntos semejantes D. d. hazen los angulos iguales EDA. eda: con las rectas semejantes AD. ad. àzia las partes semejantes E. e. digo que ED. ed. son tambien semejantes.* Porque si en las semejantes DA. *da.* se toman dos puntos semejantes A. *a.* y se consideran las dos semejantes AE. *ae.* que determinen los puntos *E. e:* seràn los angulos DAE. *dae.* iguales: y pues ADE. *ade.* se suponen iguales, son los triangulos ADE. *ade.* equiangulos, y iguales, son los triangulos ADE. *ade.* equiangulos, y semejantes (2. l. 6.) y los lados proporcionales DA. à DE. como *da.* à *de.*: luego porque esto se demuestra de qualesquiera puntos semejantes A. *a.* son las lineas DE. *de.* semejantes (*defin.*)

Al contrario. Si son *DA. da.* semejantes, y tambien DE. *de.* seràn *AE. ae.* semejantes (2. N.) y los triangulos ADE. *ade.* semejantes per tener todos los lados proporcionales (2. l. 6.) luego seràn iguales los angulos ADE. *ade.*

5 *En el caso 3. y 4. si son AD. ad. semejantes, y tambien FD. fd. digo que Ad. ad. comprehenden igual angulo que FD. fd. si estàn àzia vna mesma parte.* Porque si los puntos D. *d.* son vno mesmo (*caso* 3.) se han demostrado iguales los angulos *ADF. adf.* (4. N.) luego añadido el comun *FDa.* serà *ADa.* igual à *FDf.* (4. P.) Si los puntos semejantes *D. d.* son diferentes, continuense *AD. ad:* y tambien *FD. fd.* hasta los concursos en *z. q.* y por ser iguales *ADF. adf* tambien lo seràn sus verticales *zDq. qdp.* (1. l. 1.) y porque tambien son iguales los verticales *Dpz. dpq.* (1. l. 1.) seràn iguales *z. y q.* (3. l. 1.) en el *caso* 4.

Dichos angulos estàn en vna circunferencia. Porque so-

sobre la base, ò cuerda *Dd.* son los angulos *z. q.* iguales: luego estàn en vn segmento *Dzqd.* (3. l. 3.)

6 *Todas las rectas semejantes* AD. ad. *en los puntos semejantes: tienen la razon que los lados homologos, y radios de los Circulos.* Porque si en todos los 4. casos à otros dos puntos semejantes *E. e.* se tiran *DE. de.* son los triangulos *DAE. dae.* semejantes; y los lados proporcionales *DA.* à *a.* como el lado *AE.* à *ae.* que son dos lados homologos de las figuras (2 l. 6.)

En los Circulos, se toman los radios por lados homologos: como en el *caso* 1. y 2. y en los triangulos semejantes *DAO. dao.* es DA. à *da.* como el radio *OA.* à *oa.* (2. l. 5.)

Asimesmo se demostrarà, que si *A. a.* son semejantes, y *L. l.* tambien, tendràn *AL. al.* la razon que *AE. ae.* ò *AB. ab.* y lo mesmo es de *AH. ah.* en los Circulos, &c.

7 *Si* AD. ad. *son semejantes, y cortan las figuras: digo que el rectangulo* Ad dl. *es igual à* LD. da. *tomando la vna linea en el perimetro concavo, y la otra en el convexo.* Porque son proporcionales DA. à DL. como *dl.* à *dl.* (6. N.) luego el rectangulo de las medias es igual al de las estremas (1. l. 6.) y esto en todos los 4. casos.

En los Circulos, el rectangulo ADdh. no solo es igual à *HDda.* sino tambien al de los diametros *FDdc.* o *CDdf.* Porque son proporcionales AD. à DF: como DC. à DH. y como *ad.* à *df.* assi *dc.* à *dh.* (6. l. 6.) luego porque como DA. à DF. es *la.* à *lf.* (1. N.) serà tambien como DA. à DF. assi *dc.* à *dh.* (1. l. 5.) y el rectangulo de las medias *DFdc.* igual al de las estremas *ADdh*: y assimesmo à *EDdl.* y à *IDde.* &c. con que en los Circulos, todos los rectangulos à las circunferencias desemejantes, son iguales entre si.

Aunque las figuras semejantes se han tomado inscritas en dos Circulos por hazer la demonstracion comun, no es necessario que puedan inscrivirse, pues la demostracion no tiene dependencia de ellos.

Esta

Esta proposicion tiene admirables vsos en los Lugares planos de Apolonio, como en su tratado veremos, y por esta razon me pareciò añadirla à los elementos en esta nueva impression.

Consectarios.

1 *Qualesquiera dos Circulos, porque tienen comun diametro, tienen en èl dos puntos comunes semejantes: el vno, considerando las figuras inscritas directas, como en el caso* 1. *y el otro inversas, como en el caso* 2.

2 *El contacto de dos Circulos es punto comun semejante, de donde se concluye todo lo que se demostrò* (6. l. 3.)

3 *Lo mesmo se dize de las figuras semejantes con vn angulo comun, como en los num.* 5. 6. 7. *de la prop.* 4. l. 6.

4 *Los Circulos, y figuras iguales, no tienen punto comun en el comun diametro, sino se consideran inversos, y entonces dista igualmente de los centros.*

5 *Si dos figuras inversas, ò circulos se cortan, la recta de la comun seccion al punto comun semejante, es media entre los segmentos de su continuacion: porque se termina à los perimetros disimiles* (7. N.)

6 *El punto comun semejante està siempre, ò dentro de las dos figuras, ò fuera de entrambas, y nunca dentro de la vna, y fuera de la otra.*

Fin del Libro 6.

O LI-

LIBRO XI. y XII.

DE EVCLIDES,

De los solidos.

EN este libro se resume, lo que trata Euclides en el 11. y 12. de los *solidos*, y es todo lo que en la pratica, y especulativa puede ser de provecho: porque lo concerniente à los cuerpos regulares, de que trata Euclides en el libro 13. y Hypsicles Alexandrino, en el 14. y 15. que añadiò à los Elementos, es mas curioso que necessario, y se podrà ver en mi *Geometria magna in minimi* part. 3. cap 3. donde se hallaràn muchas proposiciones curiosas, añadidas à las de Euclides, y Hypsicles.

La mayor dificultad de este libro, està en que las figuras de los solidos, como se forman en vna superficie plana, no pueden representar perfectamente la solidez de los cuerpos. El estudioso, pues, que entra de nuevo en esta materia, ha de considerar, que los cuerpos se descriven en perspectiva, como si fueran tranparentes, para que se puedan ver los lados, y angulos opuestos.

Sirva de exemplo la figura 1. del libro 11. en que FC. representa vn cubo, que se termina con seis superficies quadradas. La de enfrente, y su opuesta son FD. AE. las de los lados FB. EC. la base AC. y la superior FD.

Los angulos, y las lineas, no se pueden representar como son: porque DCB. y DCG. son angulos rectos iguales, y las rectas BC. CG. son tambien iguales en el Cubo, pero en la figura no: y assi en los angulos, y lineas, no se ha de atender à lo que se vè descrito, sino à lo que se supone, ò infiere por consequencia necessaria de lo ya demostrado. Con esta atencion no se hallarà mas dificultad en los solidos, que en los planos.

Proposiciones del libro 11. y 12.

PROPOSICION I.

Del concurso en el solido.

1 *SI dos planos concurren, ò se cortan, la comun seccion es linea recta.*

2 *Vna recta està: oda en vn plano; si corta otro plano, es en solo vn punto.*

3 *Vn triangulo està todo en vn plano: y tambien dos rectas que concurren, y la que las corta.*

4 *La perpendicular de vn punto à vn plano, ò sobre dos rectas que se cortan es vnica, y es la minima distancia.*

5 *Si vna recta es perpendicular à otras muchas en vn punto, todas ellas estaràn en vn plano, aquien serà la recta perpendicular.*

6 *Si vna recta haze iguales angulos con otras tres de vn plano, serà perpendicular al plano.*

Demonstracion. fig. 1.

1 *Si dos planos BE. AC. concurren, ò se cortan: digo que la comun seccion BG. es linea recta.* Porque si en el plano AC. se tira qualquiera linea recta BG. se podrà esta ajustar à qualquiera superficie plana BE. (7. P.) luego entonces la recta BG. serà comun à los dos planos, ò comun seccion de AC. BE: luego al contrario, si el plano AC. concurre con BE. ò le corta en los puntos B. G. la comun seccion serà la mesma recta BG.

2 *Si BX. que es parte de la recta BG. està en el plano AC. digo que toda la recta BG. aunque se continue infinitamente està en el mesmo plano.* Porque toda la recta BG. se ajusta à qualquiera plano (7. P.) luego si la parte BX. està en el plano AC. toda BG. està en AC.

Si vna recta BG. corta à vn plano EC. es en solo vn punto G. Porque si tuviera dos, ò mas puntos en el plano EC tuviera parte en dicho plano, y assi toda estuviera en EC. (2. N.) y no le cortara, que es contra la suposicion.

3 *Qualquiera triangulo ABG. està en vn plano.* Porque si en vn plano se considera el triangulo BCG. y sus tres lados BC. CG. GB. iguales a BA. AG. GB. se ajustarà todo el triangulo ABG. con BCG. (4. l. 1.) luego el triangulo ABG. estarà en vna superficie plana, como BCG.

Si dos rectas BA. AG: se cortan, estàn en vn plano. Tomando en ellas dos puntos B. G. serà BG linea recta (6. P.) y ABG. triangulo: luego sus lados, ò rectas AB. AG. estàn en vn plano (3. N.) *Y tambien BG. que corta las dos.*

4 Si

4 *Si FA. es perpendicular al plano AC: ò à dos rectas que se cortan AC. AB. digo que de vn punto del plano A. ò eleuado F. es vnica.* Porque si de A. se tira qualquiera otra AR. cortarà à FA. y estaràn en vn plano AF. AR. (3. N.) que continuado harà la seccion recta AB. (1. N.) y porque FA es perpendicular al plano AC. es el angulo FAB. recto (22. P.) y mayor que su parte RAB. (2. P.) luego RAB. es agudo; y assi RA. no es perpendicular al plano AC. (22. P.) Lo mesmo es de dos rectas que se cortan por estar en solo vn plano.

Assimesmo. Si de el punto eleuado F. se tira qualquiera otra FB. serà FAB. vn plano triangulo (3. N.) y el angulo FAB. recto (22. P.) y ABF. agudo (3. l. 1.) luego FB. no es perpendicular al plano (22. P.) y assi FA. es vnica.

La perpendicular FA. es la minima distancia del punto eleuado F. al plano. Porque qualquiera FB. se opone al angulo recto A. mayor que ABF. (5. l. 1.)

5 *Si la recta BL. es perpendicular à BA. BC. en B. digo que es perpendicular al plano AC.* Porque si BN. se considera perpendicular al plano AC: lo serà tambien à BC. BA. (22. P.) y serà la mesma BL. (4. N.)

Si BL. es perpendicular à BA. BG. BC. las tres estàn en vn plano, à quien es perpendicular BL. Porque el plano LBG. haze en AC la recta BG. (1. N.) y el angulo LBG recto (5. N.) como LBG: y pues del punto G. en vn plano LBG. es la perpendicular vnica (5. l. 1.) son Gb. GB. vna recta, y estàn BA BG. BC. en vn plano à quien LB. es perpendicular.

6 *Si la recta LB. haze 3. angulos iguales LBA. LBG. LBC. en vn plano AC. digo que todos son rectos, y LB. es perpendicular al plano AC.* Porque si de B. se descrive el arco AXC: y de vn punto L. se tiran

tiran

ran LA. LX. LC. en los triangulos LBA. LBX. ABC. con los lados BA. BX. BC. iguales radios, y LB. comũ, y los angulos cõprehendidos iguales: luego todo es igual LA. LX. LC. (4. l. 1.) Considerese, pues, de L. vna perpendicular *Lb.* al plano AC. y tiradas *bA. bX. bC.* seràn los angulos en *b.* rectos, y el quadrado de LA. igual à los de *Lb. bA:* y el de LX. à los de *Lb. bX:* y el de LC. à los de *Lb. bC.* (4. l. 2.) y quitado el comun *Lb.* seràn iguales los quadrados, y rectas *bA. bX. bC.* (4 P.) y porque de *b.* a la circunferencia vàn tres rectas iguales, serà *b.* centro del Circulo, y el mesmo punto B. (1. l. 3.) Luego *Lb. LB.* son vna recta perpendicular al plano AC: y los 3. angulos en B. rectos.

PROPOSICION. II.

De las paralelas en el solido.

1 *Dos paralelas estàn en vn plano, con las que las cortan.*

2 *Dos perpendiculares à vn plano estàn en otro, y son paralelas.*

3 *Si vna de las paralelas es perpendicular à vn plano, todas lo son.*

4 *Las paralelas à otra lo son entre si, aunque en diferentes planos.*

5 *La que corta el plano de otra no es paralela, y esta por vn punto es vnica.*

Demonstracion.

1 *En la fig. 5. lam. vlt. Si AB. CD. son paralelas. Digo que estàn en vn plano, y tambien*

bien

bien EF. que las corta. Porque si CA. es perpendicular à AB: y BD. à CD. junta AD. y dividida igualmente en G. sean GE. GF. paralelas à BD. AC. y serà como AG. mitad de AD. assi GE. mitad de BD. y GF. mitad de AC. (2. l. 6.) y pues AC. BD. EF. se suponen iguales distancias, seràn GE. GF. iguales à BD. ò EF. (2. P.) luego EG. GF. son vna recta, pues si fueran dos rectas que formaran angulo EGF. los lados EG. GF. fueran mayores que EF. (5. l. 1.) luego porque EGF. es vna recta que està en los planos ABD. ADC. y està en vn solo plano, son ABD. ADC. vn solo plano (1. l. 11.) con que las paralelas AB. CD: y EF. ò AD. que las corta, estàn en vn plano.

2 *Si BL. GE. son perpendiculares al plano AC. digo que estàn en vn plano, y son paralelas.* Porque si por la recta BG se considera el plano *NBGe.* perpendicular à AC. y en èl son *Ge.* BN. perpendiculares à la comun seccion BG. seràn tambien perpendiculares al plano AC. (23. P.) y seràn las mesmas GE. BL. por ser vnica la perpendicular de cada pũto (1. l. 11.) luego GE. BL. estàn en vn plano *NBGe.* y por ser los angulos internos LBG. BGE. dos rectos, son paralelas (2. l. 1.)

3 *Si BL. GE. son paralelas, y GE. es perpendicular al plano AC. tambien lo serà BL.* Porque GE. BL. estàn en vn plano LGE. (1 N.) y si por B se considera BN. perpendicular al plano AC. estarà en el plano BGE. y serà paralela à GE. (2. N.) luego porque en vn mesmo plano BN. BL. son paralelas à GE. por vn punto B. son vna recta (13. P.) y BL. perpendicular como BN. y GE.

4 *Si GE. CD. son paralelas à BL. digo que lo son entre si aunque no estèn las tres en vn plano.* Porque GE. es perpendicular al plano AC. tambien lo seràn CD. y BL. (3. N.) luego CD. BL. son paralelas (2. N.)

5 Si

5 *Si AL. corta alguno de los planos en que puede estàr GC. no serà su paralela.* Sea qualquiera plano AC. que passe por GC. y AL. le corte en A. por A. en el plano AC. sea AB. paralela à GC. si AL. fuera tambien paralela à GC. fueran AL. AB paralelas (4. N.) y pues AL. AB. no son paralelas, porque se cortan, tampoco lo son AL. GC.

Por el punto A. la paralela à GC. es vnica. Porque ha de estàr en el plano AGC: y por vn punto A. de vn plano, es la paralela AB. vnica (13. P.)

PROPOSICION III.

De los planos en el solido.

1 *Si vna recta es perpendicular à vn plano, los planos por ella tambien lo son.*

2 *Si dos planos son perpendiculares à otro, tambien lo es su comun seccion, y al contrario.*

3 *Los planos paralelos tienen comun perpendiculo, y al contrario.*

4 *Si vn plano corta planos paralelos, las secciones son paralelas.*

5 *Los planos por rectas paralelas, ò son paralelos, ò hazen secciones paralelas.*

6 *Si los angulos son paralelos, son iguales, y en vn plano, ò en planos paralelos.*

7 *Si muchos angulos planos comprehenden vn angulo solido, el mayor de todos es menos que la suma de los otros; y todos menos que 4. rectos.*

8 *Si 6. planos paralelos comprehenden vn paralelepipedo, todos son paralelogramos, y los opuestos son iguales, y semejantes.*

Demonstracion. fig. 1.

1 *Si la recta GE. es perpendicular al plano AC: digo que qualquiera plano BE. por ella es tambien perpendicular.* Porque si en el de qualquiera punto L. se tira LB. perpendicular à la comun seccion BG. seràn los angulos internos LBG. BGE. dos rectos, y LB. EG. paralelas (2. l. 1.) y LB. perpendicular al plano AC. como EG. (2. l. 11.) Luego porque todas las perpendiculares à la comun seccion son perpendiculares al plano; serà el plano BE. perpendicular à AC. (23. P.)

2 *Si los planos BE. CE. son perpendiculares al plano AC. digo que tambien lo es su seccion GE.* Porque si de G. punto inferior comun se considera *Ge.* en el plano CE. perpendicular à la seccion GC. serà *Ge.* perpendicular al plano AC. (23. P.) lo mesmo es de GE. en el plano BE: luego porque la perpendicular es vnica del punto G. son *Ge.* GE. vna recta, que està en los dos planos, y assi es comun seccion, y perpendicular.

Al contrario. Si GE. fuere comun seccion de BE. CE. y perpendicular à AC: seràn los planos perpendiculares, porque passan por la perpendicular EG. (1. N.)

3 *Si los planos FD. AC. son paralelos, digo que tienen comun perpendiculo LB.* Sea LB. perpendicular à AC. y de qualesquiera dos puntos G. C: sus paralelas GE. CD. seràn perpendiculares à CA. (2 l. 11) y las 3. BL. CD. GE. iguales distancias de los planos paralelos: luego BD. es paralelogramo (7. l. 1.) y rectangulo, pues B. y C. son rectos, lo mesmo es de BE: y pues los angulos BLD. BLE. son rectos, serà BL. perpendicular al plano LED. que es FD. (1. l. 11.) con que FD. AC. tienen comun perpendiculo LB.

Al contrario. Si BL. es perpendiculo comun à FD. AC. y son AF. GE. CD. sus paralelas; seràn tambien perpendiculares comunes (2. l. 11.) y BF. BE. BD. rectangulos: luego AF. BL. GE. CD. son lados, y distancias iguales (7. l. 1.) y los planos FD. AC. equidistantes.

Assimesmo. Si FD. AC. son paralelos, el plano BE. serà perpendicular comun, pues passa por el comun perpendiculo LB. (1. N.)

Al contrario. Si BE. es perpendicular comun à FD. AC. passarà por algun perpendiculo comun LB. (1. N.) luego FD. y AC. son paralelos (3 N.)

4 *Si el plano BE. corta dos planos paralelos FB. EC. digo que las secciones BL. GE. son paralelas.* Porque si el plano AC. es perpendicular à la seccion BL. serà perpendicular à BF. BE. (2. N.) y porque BF. CE. son paralelos, serà AC. perpendicular à CE. como à BF. y BE. (3. N.) luego las secciones BL. GE. son perpendiculares à CA. (2. N.) y entre si paralelas (2. l. 11.)

5 *Si BL. GE. son paralelas los planos por ellas BF. CE. pueden ser paralelos.* Porque BL. GE. pueden ser dos secciones que haze el plano BE. en dos paralelos BF. CE. (4. N.)

Pero si los planos BD. DG. no son paralelos, su seccion DC. serà paralela à BL. GE. Porque siendo el plano AC. perpendicular à las dos paralelas BL. BE (2 l 11.) serà perpendicular à los 3. BE. EC. CL. (2. N.) luego AC. es perpendicular à la seccion CD. (2. N.) y es CD. paralela à BL. GE. (2. l. 11.)

6 *Si los angulos DLE. CBG. tienen los lados paralelos DL. CB. y LE. BG. digo que son iguales, y que estàn en vn plano, ò en planos paralelos.* Tomense iguales LD. LE BC. BG: y por ser iguales paralelas LD. BC. seràn iguales, y paralelas BL. CD. (7. l. 1.) y tambien BL. GE: luego GE. CD. son igua-

iguales (3. P.) y paralelas (2. l. 11.) y tambien ED. GC. que las juntan (7. l. 1.) luego por ser los tres lados de ELD. iguales à los 3. de GBC. todo es igual, y el angulo ELD. à GBC. (4. l. 1.) Luego si los planos ELD. GBC. son diferentes, seràn paralelos, porque son los mesmos triangulos paralelos.

7 *Si muchos angulos planos PXQ QXS. SXZ. comprehenden vn angulo solido X. digo que el mayer PXQ. es menor que los dos juntos QXS. SXZ.* Porque si fuera igual à los dos, se ajustara formando vna superficie plana (1. P.) y no comprehendiera espacio solido, y mucho menos, si fuera menor.

Todos juntos son menores que 4. rectos. Pues si fueran tanto como 4 rectos hizieran vna superficie plana (1. l. 1.)

Si el mayor PXQ es menor que los otros, y todos menos que 4. rectos cortado el espacio PXZ. si se juntan XZ. XP. se relevarà el punto X. y formarà el angulo solido X. de otra suerte no se puede formar.

Esta proposicion de Euclides se ha de entender, si la inclinacion de los planos mira siempre à la parte interior. Porque si la inclinacion de algunos fuere à la parte exterior, podràn todos los angulos ser tanto como 4. rectos, y aun mas, como se puede ver en vna piramide que tenga la base en forma de estrella.

8 *Si FC. es paralelepipedo. Digo 1. que los planos son paralelogramos.* Porque el plano EC. corta à los dos planos FD. AC: luego las secciones ED. GC. son paralelas (3. N.) y estàn en vn plano (2. l. 11.) assimesmo el plano CE. corta à los paralelos FG. LC: y las secciones EG. DC. son paralelas: luego EC. es paralelogramo (14. P.) Lo mesmo se demuestra de FD. FB. &c.

Digo 2. que cada dos opuestos son iguales, y semejantes. Porque los lados opuestos FL. ED. GC. AB.

 son

son iguales (7. l. 1.) y tambien FA, LB. DC. EG: y los angulos FLB. EDC. son iguales por ser paralelos (4. N.) como AFL. GED: luego los dos opuestos paralelogramos FB. EC. por tener los lados, y angulos iguales, se puedan ajustar, y son iguales, y semejantes (1. P.) Lo mesmo se demuestra de FD. AC. y FG. LC.

PROPOSICION IV.

De la seccion de los solidos.

1 *Si una Piramide se corta con un plano paralelo à la base, la seccion es semejante à la base: y las rectas del vertice se cortan con proporcion: y al contrario.*

2 *Si una Piramide tiene la base paralelograma, el plano por el vertice, y angulos opuestos la parte igualmente.*

3 *Si el Paralelepipedo, Prisma, ò Cilindro se cortan con un plano paralelo à la base, la seccion es en todo igual à la base.*

4 *Y los segmentos solidos son proporcionales à los de los lados, y al contrario.*

5 *Si un Paralelepipedo se parte con un plano por los angulos opuestos de los planos opuestos, seràn los segmentos dos prismas iguales.*

6 *Qualquiera Prisma poligono se divide en prismas triangulares, que son dos menos que sus lados. Lo mismo es de las Piramides poligonas.*

Demonstracion, fig. 2.

1 *Si à la Piramide VXZD. la corta el plano QRT. paralelo à la base. Digo que la seccion QRT. es semejante à la base VXZ.* Porque los planos paralelos VXZ. QRT. se cortan con los planos de la Piramide VXD. &c. seràn las secciones paralelas VX. QR. (3. l. 11.) y tambien XZ. RT. y ZV. TQ: luego los angulos paralelos VXZ. QRT. son iguales (3. l. 11.) y XZV. RTQ. y ZVX. TQR: luego los triangulos equiangulos son semejantes (2. l. 6.) Lo mesmo se demostrarà de XYZ. RST. y de las poligonas, &c. Tambien de la Piramide conica.

Los segmentos son proporcionales. Pues por las paralelas como VX. à XD. assi QR. à RD. (2. l. 6.) y alternando, &c. (4. l. 5.)

Al contrario. Si VX. à QR. &c. es como XD. à RD. seràn VX. QR. paralelas: y XZ. RT. &c. (2. l. 6.) luego porque son los angulos paralelos en diferentes planos son estos paralelos

2 *La Piramide VXYZD. tiene la base paralelograma. Digo que el plano DXZ. por el vertice, y los dos angulos de la base opuestos, la parte igualmente.* Porque la base VY. con la seccion XZ. se parte igualmente (7. l. 1.) y en qualquiera parte que se considere el plano QS. paralelo à la base, serà la seccion QS. semejante à VY. y serà QRT. igual à RSL. (1. N.) luego porque los segmentos solidos VXZD. XYZD. se componen de planos siempre iguales, son iguales entre si (2. P.)

3 *En la fig. 3. si el prisma CH. se parte con el plano POQ. paralelo à la base, digo que POQ. es en todo igual à CBD.* Porque siendo CP. BO. paralelas (24. P.) y CB. OP. (3. l. 11.) son estas iguales (7. l. 1.) y assimesmo BD. OQ. y DC. QP. y los angulos CBD. POQ. paralelos iguales (3. l. 11.) y assi de los otros: luego porque todos los lados, y los angulos se corresponden iguales, se ajustaràn las figuras, y son iguales CBD. POQ. &c. (1. P.) Lo mesmo se demues-

muestra en el paralelepipedo de CA. PN: y en el prisma poligono (*fig. 2.*) de los planos QPTSR. EDHGF. &c.

4 *Y los segmentos del solido tienen la razon que los de los lados.* Porque si el plano PN. corta igualmente todos los lados del paralelepipedo CE. por ser PN. CA. en todo iguales (3. N.) se ajustaràn (1. P.) y el plano CO. à PF. y assi de los otros: luego todo el solido CN. se ajustarà con PF. y assi son iguales (1. P.)

Si el plano LI. parte igualmente los lados CP. BO. &c. serà como antes CI. igual à LN: y como CL. vn quarto de CG. assi CI. vn quarto de CE. y LE. triplo de LN. como LG. de LP. &c. y assi infinitamente: luego los segmentos del solido tienen la razon que los de los lados.

Lo mesmo se demuestra en el prisma triangular, y poligono, y en el cilindro, que es como prisma de infinitos lados.

5 *Si el Paralelepipedo CE. se corta con el plano BH. por los angulos opuestos. Digo que los segmentos son dos prismas iguales.* Porque si vn plano PN. sube paralelo à la base CA. en qualquiera parte que se considere, serà PN. igual à CA (3. N.) y el plano BN. harà la seccion OQ. (1. l. 11.) y serà igual POQ à ONQ. (7. l. 1.) luego los segmentos solidos BDG. BDE. que siempre se componen de planos iguales, son iguales (2. P.)

6 *El Prisma poligono se diuide en prismas triangulares.* En la *fig. 2.* qualquiera lado QE. està en vn plano con qualquiera otro su paralelo (2 l. 11.) luego los planos QG. QH. diuiden en prismas triangulares al poligono: y son dos menos que los lados. Lo mesmo es de todos los poligonos.

PRO.

PROPOSICION V.

De los solidos disimiles.

1 E*L Prisma triangular es medio paralelepipedo.*
2 *La Piramide es vn tercio del prisma con la mesma base, y altura: y la Conica del Cilindro.*

3 *Los Paralelepipedos, Prismas, y Cilindros con igual altura tienen la razon que las bases, y al contrario, y tambien las Piramides entre si.*

4 *Los mesmos tienen la razon compuesta de las bases, y alturas.*

5 *Y si tienen las bases, y alturas reciprocas son iguales, y al contrario.*

6 *Si de tres continuas se forma vn paralelepipedo, serà igual al que se forma de la media con igual angulo.*

7 *Los num. 3. 4. 5. conuienen à las Piramides triangulares Conicas, &c. entre si.*

Demonstracion fig. 3.

1 E*L Prisma triangular BDG. es medio paralelepipedo.* Pues si BA. DA. son paralelas à CD. CB. y AE. à BF. DH: y FE. HE. à GH. GF. serà GA. paralelepipedo (24. P.) y el plano BH. le parte en dos prismas iguales (4. l. 11.) luego el prisma BDG. es la mitad de GA.

2 *En la fig. 2. La piramide CBAE. es vn tercio del prisma BDF. con igual base, y altura.* Sean CD. AF. paralelas à BE y el plano EDF. à BCA: y serà BDF. vn prisma (24. P.) y los planos CF DB. BF. paralelogramos, y los tres puntos D, A. E. en vn plano (1. l. 11.) luego por-

porque la piramide CDFAE. tiene la base paralelograma, y el plano DEA. la parte igualmente por el vertice, y angulos opuestos, son iguales segmentos DFAE. CDAE. (4.l.11.)

Tambien la Piramide BCDEA. tiene la base BD. paralelograma, y el plano AEC. la parte igualmente por el vertice A. y angulos C. E. (4.l.11.) y son tambien iguales CBAE. CDAE: luego tambien son iguales entre si CBAE. DFAE. (3. P.) luego las tres dividen al prisma en tres partes iguales, y es cada vna vn tercio, &c.

Lo mesmo es de las piramides poligonas, porque assi ellas, como los prismas se dividen en triangulares (4.l.11.) Y considerado el circulo como poligono de infinitos lados, milita lo mismo en la piramide Conica, y Cilindro, aunque esto se demostrarà otra vez en el *num.3.*

3 *Si los paralelepipedos (fig. 3.) BQ. RZ. tienen igual altura, ò estàn entre dos planos paralelos. Digo que tienen la razon que las bases AC. RT.* Porque si los planos CA. TR. son vno mesmo, y PN. ZX: y qualquiera otro plano LI. VS. sube paralelo, en qualquiera parte que se considere, serà LI igual à CA. y VS. à TR. (4.l.11.) luego LI. à VS. como CA. à TR. (2.l.5.) y assi infinitamente, sin que se puedan considerar mas planos en PA. que en ZR. por tener igual altura: luego PA. y ZR. tienen la mesma razon que los planos de que constan (4.l.5.) y assi son como la base CA. à TR. &c.

Si los Paralelepipedos GA. ZR. tienen iguales bases CA. TR. digo que tienen la razon de las alturas. Si la altura BO. se toma igual à RX serà PA. igual à ZR. como la base CA. à TR. (3.N.) y pues GA. à PA. es como GC. à PC. (4.l.11.) serà tambien GA. à ZR. como la altura GC. à PC. que es XR. (3.l.5.)

Al contrario. Si dichos solidos tienen la razon que
las

las alturas, tendràn igual base: y si la de las bases, tendràn igual altura, todo como en los paralelogramos (1.l.6.)

Estas demonstraciones son vniversales, aunque los solidos sean de diferente especie, pues en lugar de ZR. se puede substituir vn Prisma, ò Cilindro, y al contrario, &c.

Lo mesmo es de las Pyramides angulares, ò redondas entre si, porque son el tercio de los Prismas, y Cilindros de igual base, y altura, aunque sus bases no sean semejantes, &c.

4 *El Paralelepiped. Prisma, ò Cilindro ZY. à otro GA. tiene la razon compuesta de las bases, y alturas. Esto es si x. à z. es como la base TY. à CA. y es z. à y. como la altura TZ. à CG. digo que ZY. à GA. es como x. à. y.* La altura CP. sea igual à TZ: y el plano PN. paralelo à CA. y serà el solido ZY. à PA. como la base TY. à CA. ò x. à z. (3.N.) y el solido PA. à GA. sobre vna base como la altura PC. que es ZT. à GC. ò z. à y. (3.N.) luego las razones compuestas de iguales son iguales *ex aquo*, ZY. à GA. como *x.* à *y.* (1.l.5.) que es la razon compuesta de *x* à *z.* y de *z.* à *y.* esto es de las bases, y alturas.

Lo mesmo es que se compare vn Prisma con vn Cilindro: y dos Cilindros, ò Prismas entre si: ò vna Piramide angular à vna conica, ò al contrario, &c.

5 *Los mesmos ZY. GA. si tienen las bases, y alturas reciprocas TY. à CA. como GC. à ZT. seràn iguales.* Porque si PC. es igual à ZT. y PN. paralelo à CA. serà GA. à PA. como GC. à PC. (4.l.11.) y ZY. à PA. por tener igual altura, como TY. à CA. (3. N.) esto es, como GC. à PC: luego GA. y ZY. tienen vna mesma razon à PA. y assi son iguales (2.l.5.)

Al contrario. Si ZY. y GA. son iguales, tendràn la mesma razon à PA. (2.l.5.) y seràn GC. à PC. ò ZT. como TY. à CA. (3. N.) luego las alturas, y bases son reciprocas.

Q *Lo*

Lo meſmo es ſi ſe compara vn Priſma à vn Cilindro, ò Paralelepipedo,&c. Y vna Piramide angular à otra Conica,&c.

6 *Si AB.BC.BF.ſon tres continuas,y dellas ſe forma el paralelepipedo GA: y Yq.qT.TZ. ſon iguales à la media BC. y forman al Cubo ZY. digo que GA.y ZY. ſon iguales.* Porque el quadrado qr. de la media, es igual al rectangulo FA. de las extremas AB. BF. (1.l.6.) y tomando FA. y qr. como baſes las alturas BC. *qT.* ſe ſuponen iguales: luego GA y ZY. ſon iguales (3.N.) *Tambien* porque tienen las baſes, y alturas reciprocas.

PROPOSICION VI.

De los ſolidos ſemejantes.

1 *Los ſemejantes à otro ſon entre ſi ſemejantes, y y todos ſe reſueluen en Piramides ſemejantes.*

2 *Tienen la razon triplicada de los lados homologos, y las Eſpheras de los radios, ò diametros.*

3 *Sobre rectas proporcionales, ſon proporcionales, y al contrario.*

4 *Los inſcritos dentro de otro con vn angulo comũ, tienen los planos, y lados paralelos, y al contrario.*

5 *El plano por el angulo comun haze los ſegmentos ſemejantes,&c.*

6 *Los puntos, lineas, y planos ſemejantes, ſon como en los planos, lib.6.prop.7.*

Demonſtracion fig. 4.

1 Los *ſolidos ſemejantes à otro, lo ſon entre ſi.* Porque todos coſtan de angulos ſolidos iguales, de planos, y lados proporcionales (23.P.)

Reſueluenſe en piramides ſemejantes por la meſma razon, como los poligonos en triangulos ſemejantes (4.l.6.)

2 *Si AH.RC.ſon dos paralelepipedos ſemejantes, y los lados homologos AB. à BC. como BD. à BE: y FB. à BG. digo que AH. à BC. tienen la razon triplicada de AB. à BC.* Sea P. à Q como AB à BC. y P.Q.X.Z. quatro continuas, con que la razon de P. à Z. ſerà triplicada de P. à Q. ù de AB. à BC. (21.P.) digo que AH. à RC. tiene la razon que P. à Z.

Porque ſi ſe juntan dos angulos ſolidos iguales en B. q̃ los lados ſemejãtes DB. BE. formẽ vna recta; y tãbiẽ FB. BG. por cortarſe FG. DE eſtã en vn plano HBR. (1 l.11.) cõtinuados todos los planos, ſe añadẽ dos ſolidos HC. BM: y en el ſolido AN. por ſer HB. paralelo à la baſe CN. es AH. à BN. como AB. à BC. ò P. à Q. (4.l.11.) y BN. à BM como BD. à BE. ò Q à X. (4.l.11.) y BM. à BT como FB. à BG. ò X. à Z. (4.l.11.) luego AH. à BT. ò RC. es como P. à X. (1.l.5.) que es razon triplicada de P. à Q. ò AB. à BC. (21.P.)

De otra ſuerte. AH. à RC tienen la razon compueſta de las baſes AD. à RO. y alturas BF. à BG. (5.l.11.) la baſe AD. à EC. es como P. à X. razon duplicada de P à Q. ò AB. à BC. (4.l.6.) BF à BG. es como X à Z: luego AH à RC. es como P à Z. compueſta de P. à X. y X à Z. de las baſes, y alturas: y triplicada de P. à Q ò AB. à BC.

Lo meſmo ſe concluye de los Priſmas, y tambien de los Cilindros en la meſma forma: y tambien por ſer iguales à los Paralelepipedos con igual baſe, y altura.

Tambien de las Piramides angulares, y Conicas, que ſon el tercio de los Priſmas, y Cilindros.

Tambien de los ſolidos regulares, y irregulares, porque ſe reſuelven en Piramides ſemejantes

Tambien de las Eſpheras haziendo induccion de los ſolidos inſcriptos, como de los planos inſcritos en el Circulo.

Conſect. Si P.Q.X.Z. ſon quatro continuas el ſolido ſobre P. al ſemejante ſobre Q. tiene la razon que P. à Z: y al contrario.

3 *Si P.Q.X.Z. ſon 4. proporcionales continuas, ò no continuas: y ſobre P.Q. huuiere dos ſolidos ſemejantes, y otros ſobre X.Z. digo que los 4. ſeràn proporcionales.* Porque tienen la razon triplicada de los lados homologos (2.N.) luego ſi la razon de P. à Q. es como la de X a Z. la triplicada de P a Q. ſerà como la triplicada de X. à Z. (1.l.5.) con que ſon los ſolidos proporcionales: y ſeràn continuos ſi lo ſon las rectas.

Al contrario. Si ellos ſon proporcionales, y dos à dos ſemejantes, ſeràn los lados homologos proporcionales pues ſi las razones triplicadas ſon iguales, tambien lo ſon las ſencillas (1.l.5.)

4. y 5. La demoſtracion de los *num.*4. y 5. es como en los planos *lib.6.prop.4.num.5.* y 6. y la aplicacion es facil, aunque ſi los ſolidos ſe deſcriven, la multitud de lineas ha de confundir la figura:

6 *Todo lo que ſe dixo de los puntos ſemejantes (lib. 6.prop.7.) ſe puede aplicar à los ſolidos ſemejantes, guardando el meſmo orden de los numeros.* Tambien es la aplicacion facil, y ſe dexa por la meſma razon: Solo advierto, que en los ſolidos tiene mas extenſion, porque les conviene todo lo que hallà ſe dixo de las lineas; y lo meſmo conviene à los planos que paſſan por los puntos ſemejantes, como lo reconocerà quien atentamente lo meditare.

Fin de la Geometria eſpeculativa.

GEO-

GEOMETRIA PRACTICA.

GEometria Practica, es ciencia practica de la quantidad continua. Las propoſiciones puramente eſpeculativas, ſe llaman *Theoremas*, las que enſeñan el modo de poner algo en execucion, ſe dizen *Problemas*. Con la inteligencia de las eſpeculaciones antecedentes, ſerà facil la execucion de las ſiguientes practicas; pero quien no huviere eſtudiado los Theoremas antecedentes, podrà exercitarſe en las conſtrucciones, omitiendo la demoſtracion. Para mas claridad ſe reduce todo el tratado à ocho eſpecies de Problemas, que comprehenden todos los que trae Euclides en ſus Elementos, y ſe añaden otros muchos de no menor importancia.

PROBLEMAS.

PRO-

PROBLEMA I.

De las rectas angulares, y paralelas.

1 *Por vn punto dado tirar vna recta que haga vn angulo dado.*

2 *Diuidir qualquier angulo en dos partes iguales con vna recta.*

3 *Hallar el valor de vn angulo, y formale de qualesquiera grados.*

4 *Tirar vna paralela à otra recta, dado el punto, ò la distancia.*

5 *Por vn punto dado fuera de vna recta, tirar otra que haga vn angulo dado.*

6 *De vn punto dado, tirar vna perpendicular, y con ella partir vna recta igualmente.*

7 *Instrumento para los angulos rectos. Vease de los angulos el Prob. 4. prat. 2. y 6.*

PRACTICA 1.

Dada la recta AB. en el punto A. se ha de formar el angulo CAB. igual à otro dado FDE. Puesta la punta del compàs en D. con qualquiera abertura formese el arco EF. y con la mesma abertura formese el arco BC. tomando por centro el punto dado A: luego tomando con el compàs el arco EF. se cortarà BC. su igual; y tirando la recta AC. serà el angulo CAB. igual à FDE.

Demonstr. Porque los arcos CB. EF. son iguales, y medidas de los angulos: luego los angulos CAB. FDE. que tienen igual medida, son iguales (10. P.)

PRAC-

PRACTICA 2.

El angulo BAC. se ha de diuidir igualmente puesto el compàs en A. descrivase qualquier arco BC. y con la mesma abertura desde los puntos B. y C. descrivanse dos arcos que se crucen en D. y la recta DA. partirà igualmente al angulo.

Demonst. Porque los tres lados DB. BA. AD. son iguales à los tres DC. CA. AD. luego el angulo BAD. es igual à CAD. (4. l. 1.)

PRACTICA 3.

El valor de los angulos se hallarà facilmente, con vn semicirculo de alaton, cartõ, ò talco diuidido en 180. grados FOC. sea el angulo dado BAD. puesto el centro en el punto A. y el radio sobre la recta AB. si la recta AD. corta 60. *grados*, serà el angulo BAD. de 60. *grados*; y BAF. de 120. &c. Para formar el angulo BAD. de 60. *grados*, puesto el semicirculo, se tirarà la recta AD. por los 60. *grados*, &c. Este instrumento es muy vtil para la practica.

PRACTICA 4.

Dada AB. y fuera de ella el punto C. por el qual se ha de tirar CE. paralela à AB. Desde el punto C. tirese qualquiera recta CB. que corte à BA: y del punto B. formese vn arco AH. y con la mesma abertura del punto C. formese DE. tomando el arco AH. y cortando DE. su igual, serà CE. paralela à AB.

Demonstracion. Porque los angulos alternos ABC. BCE. son iguales (2. l. 1.) por ser iguales medidas AH. DE. (10. P.)

Dada AB. se ha de tirar su paralela GF. que tengan la distancia dada XZ. Tomando en la recta AB. qualquier punto A. se descrivirà desde A. el arco G. con la distancia XZ. y del punto B. el arco F. con la mesma distancia XZ. y aplicando la regla à los arcos, se tirarà la recta FG. que serà paralela à BA.

Demonstracion. Porque las distancias AG. BF. son

igua-

iguales, y son la mesma distancia XZ. Quanto mas apartados, se tomaràn los puntos A. B. saldra la operacion mas exacta.

PRACTICA 5.

Dada la recta BA. y el punto D. fuera se ha de tirar DA. que el angulo DAB. sea igual al dado G. Tomese en la recta BA. qualquier punto C. y hagase el angulo BCE. igual à G. (p. 1.) y por el punto D. tirese DAF. paralela à EC. (p. 4.) y serà el angulo DAB. igual à G.

Demonstr. Porque DAB. es igual à BCE. (13. p.) que es el mesmo G.

PRACTICA 6.

Dado el punto C. en la recta AB. tirar vna perpendicular EC. tomense CA. CB. iguales, y de los puntos A. y B. con qualquiera distancia formense dos arcos, que se cruzen en E. junta EC. serà perpendicular, y los angulos ACD. ECB. rectos.

Demonstr. Porque los lados EC. CA. AE. son iguales à EC. CB. BE: luego los angulos ECA. ECB. son iguales (4 l. 1.) y rectos (11. P.)

Dado el punto D. fuera de la recta AB. tirar la perpendicular DG. Puesto el compàs en D. con qualquiera distancia, se descrive el arco BA. q̃ corte à la recta AB. puesto el compàs en A. y B. con la misma distancia, ò con qualquiera otra se descriven dos arcos que se cruzan en G. y serà D. G. perpendicular.

Demonstr. Porque parte el angulo ADB. igualmente (2. p.) luego por ser ADB. isosceles serà DC perpẽdicular (5. l. 1.)

Si la recta AB. se ha de partir igualmente puesto el compàs en A. y B. se descriven cõ qualquiera distancia dos arcos arriba, y dos abaxo, que se cruzen en E: y G. y luego EG serà perpendicular como antes: y los segmentos AC. CB. iguales (5 l. 1.)

Si el punto B. està en el estremo de la linea, y se pide la perpendicular FB. puesto el compàs en B. se tomarà qual-

qualquiera distancia BD. con que D. estè fuera de la linea, y descrito el arco ABF. se tirarà ADF. y serà FB. perpendicular.

Demonst. Porque el angulo FBA. en el semicirculo ABF. es recto (3. l. 3.)

Si el punto F. està fuera de AB. y se pide la perpendicular FB. Tirese qualquiera recta FA. y dividida igualmente en D. se descrivirà de alli el semicirculo ABF. y la recta BF. serà perpendicular.

Demonst. Porque el angulo FBA. del semicirculo es recto (3. l. 3.)

PRACTICA 7.

El instrumẽto mas comodo para los angulos rectos, y lineas perpendiculares, es la esquadra ABC. de bronze, madera, ò carton; porque formado vna vez el angulo recto ABC. aplicando el lado AB. à la linea, el lado CB. sirve de regla para tirar la perpendicular CB. y conviene que el angulo interior tambien sea recto para muchas operaciones.

PROBLEMA II.

Diuision, y proporcion de las rectas.

1 *Diuidir vna recta en qualesquiera partes.*
2 *Regla para la diuision igual.*
3 *Diuidir vna recta en partes semejantes à otra.*
4 *Dada vna recta, añadirle otra, que la dada sea media entre la añadida, y la compuesta, y diuidir vna dada en media, y estrema razon.*

Consectario, *dada la media, y la diferencia de las estremas, hallar las tres proporcionales continuas.*

5 *Dadas dos lineas, hallar la media proporcional.*

6 *Dadas dos lineas, hallar la tercera proporcional.*
7 *Dadas tres lineas, hallar la quarta proporcional.*

PRACTICA 1.

Diuidir la linea AB. en cinco, ò mas partes. Tirese AC. perpendicular (1.p.6.) y tambien BD. tomense en AC infinita, qualesquiera cinco partes iguales, y las mesmas en BD. y tirando las paralelas CD. OH. &c. serà OZ. la quinta parte AB.

Demonst. Porque como CO. es la quinta parte de CA. assi OZ. es la quinta parte de AB. (2 l.6.) luego quedarà AB. dividida en cinco partes. Assimismo qualquiera recta que se tire CB quedarà dividida en otras cinco partes, y serà CZ. la quinta parte de CB. &c.

PRACTICA 2.

Regla general para qualquiera diuision. Tomese vna regla AB. de bronze, ò box, ò marfil, y dividada en 100. partes, ò en 1000. con el artificio precedente, servirà para la division de qualquiera otra linea, como si de la linea MN. se huvieren de tomar de 100. partes las 60. tirese CD. igual à AB. y del punto C descrivase el arco DE. tomese MN. y hagase su igual DE. tirese luego CE. y tomando de la regla AB. las 60 partes, se cortarà CF. su igual, y descrivirà el arco FG y la recta FG. tendrà 60 partes de DE. ò MN.

Demonst. Porque como CF. es las 60. partes de CD. assi FG. serà las 60. partes de DE ò MN. (2 l.6.) Esta regla sirve en lugar de Pantometra.

PRACTICA 3.

3 *La linea CD. està dividida en F. G. y se ha de dividir AB. en la mesma razon.* Del punto C tirese CE. que forme qualquier angulo, y sea igual à BA. juntando DE. se tiraran GO. FH paralelas à DE. (1 p.4.)

Demost. Por ser paralelas DE. GO FH quedarà CE. que es AB. dividida como CD. (2 l.6.)

PRAC-

PRACTICA 4.

4 *Dada la recta AB. hallar otra GB. que AB. sea media entre GB. y ABG.* Tirese AC. perpendicular à AB. y su igual: dividida AC. igualmente en E. (1.p 6.) descrivase el circulo AGCD. y tirese BED. y del punto B el arco GF. y estarà todo hecho.

Demonst. Porque siendo EAB. angulo recto, es BA. tangente (7.l 3.) y media proporcional entre BG BD. (6.l.6.) luego porque DG. es igual a CA. que es AB. serà DG. media entre BG. y BD. luego DG. que es la dada AB. es media entre la añadida GB. y la compuesta BD. que es ABG.

Diuidir la recta AB. en media, y estrema razon. Tirese BED. como antes, y de B se descriva el arco GF. y quedarà AB. dividida en media, y extrema razon.

Demonst. Porque AF. es diferencia entre BF. ò BG. y BA. y tambien BF. ò BG. es diferencia entre BD. y DG. ò AB. siendo BG. ò BF. BA. BD. tres continuas tendràn las diferencias AF. FB. la mesma razon (4.l 5.) luego AF. à FB. es como BF. à BA. luego BA. està dividida en F. en media, y estrema razon (21. P.)

Dada la media AB. y la diferencia de las estremas AC. hallar las estremas BG. BD. Forme AC. vn angulo recto con AB. y dividida igualmente en E. descrivase el circulo AGC. tirada la recta BED. seràn las estremas BG. BD.

Demonst. Porque son tres continuas GB. BA BD. (6.l.6.) y DG. que es AC. es la diferencia de las estremas GB. y BD.

PRACTICA 5.

5 *Hallar la media entre dos AB. EF.* continuese AB. que BC. y EF. sean iguales: dividida AC. igualmente en O. (1.p.6.) del centro O. se descrive el semicirculo ADC. y tirada la perpendicular BD. serà media proporcional entre AB. y BC. que es EF.

Demonst. Porque BD. es perpendicular al diametro

AC. es media entre AB. y BC. (6. 1. 6.)

Otro modo, sean las dadas AC. EF. y tomese CB. igual à EF. tirado el circulo ADC. y la perpendicular BD. se juntarà DC. y serà media entre AC. CB.

Demonst. Porque el angulo del semicirculo ADC, es recto (3. l. 3.) luego DC. es media entre BC. CA. (3. l. 6.)

PRACTICA 6.

De tres proporcionales dada la menor BC. y la media BA. hallar la mayor BD del punto B. se descrive el arco CF. tirese AO perpendicular, y con qualquiera distancia AO. se descrive el circulo EAF. que corte al arco CF. y serà BFE. la tercera proporcional.

Demonst. Porque BC. que es BF. BA. BE. son continuas (6. l. 6.)

Si se dà la mayor DB. se descrive el arco DE. y tirando BE. serà la menor BF. (6. l. 6.)

Otro modo. Sean dadas la menor GH. y la media HM. formen qualquier angulo MHG. tirando MG. se harà el angulo HMN. igual à MGH. y serà HN. la tercera, y mayor.

Demonst. Porque son continuas GH. HM. HN. (3. l. 6.) *Si se dà la mayor NH. y la media HM.* tirada MN. se harà el angulo HMG. igual à MNH. y serà HG. la tercera menor (3. l. 6.)

PRACTICA 7.

Dadas AB. CB. BE. hallar la quarta proporcional BD. Formese qualquiera angulo ABD. juntese CE. y tirese AD. paralela à CE. (1. p. 4.)

Demonst. Porque son proporcionales como BC. à BA assi BE à BD. que es la quarta (2. l. 6.) *Si fuere dada BD* se junta AD. y tirada CE. paralela, serà BE. la quarta proporcional.

PRO-

PROBLEMA III.

De los triangulos, y paralelogramos.

1 *Hazer vn triangulo equilatero de vna recta.*
2 *Hazer vn triangulo isoceles de dos rectas.*
3 *Hazer vn triangulo isoceles, que cada angulo sobre la base, sea duplo del vertical, ò vn tercio.*
4 *Hazer vn triangulo rectangulo de dos rectas.*
5 *Hazer vn triangulo escaleno de tres rectas.*
6 *Hazer vn paralelogramo dados los lados, y el angulo.*
7 *Hazer vn triangulo, ò paralelogramo, ò qualquiera figura semejante à otra.*

PRACTICA 1.

1 *Sobre la recta AB. se pide el triangulo equilatero ABC.* con esta distancia AB. desde A. y B. se forman dos arcos, que se cruzan en C. el triangulo ABC. serà equilatero.

Demonst. Porque AB. BC. CA. tienen vna mesma medida, y son iguales radios de iguales circulos.

PRACTICA 2.

De las rectas AB. DE. formar vn triangulo isoceles. del punto A. descriuase el arco FC. y tomando con el compàs DE. se passarà desde B. hasta C. y el triangulo BAC serà isoceles.

Demonst. Porque los lados AB. AC. son radios iguales: y BC. es igual à DE. &c.

PRACTICA 3.

Formar vn triangulo isoceles que cada angulo sobre la base, sea duplo del vertical, ò vn tercio. Dada la recta BD. ò tomada al arbitrio, añadasele DC. que sean continuas

nuas CD.DB.BC.(2.p.4.) sobre BG.formese el triangulo isoceles, que BF. FC. sean iguales a BD. y tirada FD.serà FBD.el triangulo primero,y BFC.el segundo.

Demonst. Porque BD.ò BF.es media entre DC.CB. es el angulo DFC.igual à B (3.l.6.) y pues B. y C. son iguales por ser BFC. isoceles(5.l.1.)serà DFC. igual a C. luego porque el externo FDB. es igual a DFC. y C.(3.l.1.) serà duplo de C. esto es, de B. luego FDB. BFD.que son iguales(5.l.1.) son duplos de B:luego si à BFD.le añadimos DFC.igual à B.serà todo BFC. triplo de B.y tambien de C.que es igual à B.

PRACTICA 4.

Formar vn triangulo rectangulo dados los lados AC. DE Hagase CB.perpendicular à CA.y sea igual à DE. junta BA.serà ABC.el triangulo.

Si se dà la base AB. y el vn lado DE. dividida AB. igualmente en O. descrivase el semicirculo ACB. y tomando BC.igual à DE.juntense BC.CA.el triangulo ABC.serà rectangulo.

Demonst. Porque el angulo ABC. en el semicirculo es recto(3.l.3.)

PRACTICA 5.

Dadas 3.rectas aptas AB. C. D. formar vn triangulo escaleno desde el punto A.con la distancia C.descrivase el arco FG. luego del punto B.con la distancia D.se descriva el arco FG. que se cruzen en G.y serà ABG. el triangulo.

Demonst. Porque AG. BG. seràn iguales à C. y D.y BA.la mesma dada.

PRACTICA 6.

Dada la recta CH. formar vn quadrado. Porque deve tener el angulo recto, tirese HM. perpendicular (1.p.6.) igual à GH y con la mesma distancia de M. y G.se descriven dos arco, que se cruzen en O. tiradas OM. OG.serà OH.quadrado.

Demonst. Porque todos los lados son iguales à GH. y los angulos rectos.

El

El rhombo se descrive de la mesma suerte, con que el angulo H.sea obliquo igual al angulo dado.

El rectangulo oblongo dadas AB.BC.hagase BC. perpendicular (1.p.6.) y del punto A.con la distancia BC.se descrive vn arco,y del punto C. con la distancia AB.otro,que se cruzan en F.tiradas FC.AF.serà BF. el rectangulo.

El rhomboide se forma de la mesma suerte, con que el angulo ABE.sea obliquo,igual al dado,y EA.serà el rhomboide de AB.BE.&c.

PRACTICA 7.

Dado el triangulo ABE. se ha de formar otro semejante sobre vna recta igual à XZ. Tomese AC. igual à XZ continuando si fuere menester à AB. y tirese CD. paralela à BE. (1.p.4.) serà el triangulo ACD. semejante à ABE.

Demonst. Porque la paralela haze triangulos semejantes(2.l.6.)

Si es el trapecio dado BF. tirese el diametro AED. y CD. paralela como antes: y DH. paralela à EF y continuando si fuere menester el lado AFH. serà CH. *trapezio* semejante a EF.

Demonst. Nace de las paralelas (4.l.6.) lo mesmo es del paralelogramo.

Si la figura es ABEFO. tirense las diagonales AED. AFH. y tomando AC. igual à la dada XZ. se harà CD. paralela a BE. y DH. a EF. y HG. a FO.

Demonst. Porque la figura ACDHG. es semejante a ABEFO. (4.l.6.) y tiene el lado AC. igual al lado XZ.

PRO

PROBLEMA IV.

Del circulo.

1 DEscriuir vn circulo por dos, ò tres puntos, hallar el centro, y valor de vn arco, y diuidirle en dos partes iguales.

2 Sobre vna recta, ò dado el circulo hallar vn arco capaz de vn angulo dado.

Consectario. Descriuir vn angulo dado sobre vna recta, que toque à otra linea dada.

3 Cortar de vn circulo vn arco semejante à otro dado.

4 De vn punto dado tirar vna tangente à vn circulo dado, ò descriuir vn circulo que toque à vna recta dada.

5 De vn punto dado interior, ò exterior descriuir vn circulo que toque à otro.

6 Sobre vna recta finita descriuir vn arco, que toque à otra infinita dada.

Consectario. Sobre vna recta formar el angulo mayor que puede tocar otra recta infinita.

7 Por vn punto dado tirar vna recta dentro del circulo igual à otra dada.

PRACTICA 1.

DEscriuir vn circulo por dos puntos dados M.S. abriendo el compàs a la distancia que ha de servir de radio, desde M. y S. se formaràn dos arcos, que se crucen en O. y serà el centro de donde se descrivirà el circulo AMS.

Descriuir vn circulo por tres puntos dados A. B. C. Con

Con qualquiera distancia desde A. y B. se descriven dos arcos que se cruzen en E. y otros dos en G. ò Q. luego desde B. y C. se hazen otros dos en D. y F. con la mesma, ò qualquiera otra distancia: tirando las rectas DFO. MOG. que se cruzen en O serà O. centro del circulo, y alargado el compàs hasta C. se descriva CBARC.

Demonstr. Porque DO. EO. son perpendiculares à las cuerdas CB. BA. y las parten por medio (1. p. 6.) luego passan por el centro (2. l. 3.) y assi el punto comun O. serà el centro del circulo.

El arco dado es ABC. tomense tres qualesquiera puntos A. B. C. y se hallarà el centro O. como antes, y se cabarà el circulo.

Si el arco dado es AB. y se ha de partir por medio, tirese la recta EG. como antes.

Demonstr. Porque EG. es perpendicular à BA la parte igualmente (1. p. 6.) y parte tambien igualmente el arco (2. l. 3.)

Para el valor del arco MS. se hallarà primero el centro O. y pues el arco MS. es medida del angulo MOS. (10. P.) se hallarà el valor del angulo MOS. (1. p. 3.) que es el arco MS.

PRACTICA 2.

Dada la recta AB. descriuir el arco BNA. capaz del angulo CDE. Del centro D. descrivase qualquier arco CEF. y tomando EF. igual à CE. se juntaran CF. FD. Haganse los angulos ABG. GAB. iguales à CFD. (1. p. 1.) y del concurso G. se descrive el arco ANB. digo que tomando en la circunferencia qualquier punto N. serà el angulo ANB. igual al dado CDE.

Demonstr. Porque el angulo ANB. es la mitad del angulo AGB. (3. l. 3.) luego es la mitad de CDF. ò igual à CDE.

Dado el circulo BNA. de qualquier punto N. tirese qualquiera recta NB. y hagase el angulo BNA. igual à

CDE. el arco ANB. es capaz del angulo dado.

Demonst. Porque todos seràn iguales à BNA. (3.l.3.) que es CDE.

Sobre AB. descrivir el angulo BNA. igual à CDE. que toque otra recta dada MN. Descrito el arco ANB. capaz del angulo CDE. si corta à NM. en N. el angulo ANB. es el que se pide.

Demonst. Porque ANB. toca à la recta MN. (17.P.) y es igual à CDE lo mesmo serà del angulo AMB. si se tiran las rectas AM. MB. si el circulo no corta à la recta MN. serà impossible el caso. Lo mesmo es de la curva PN.

PRACTICA 3.

Dado el circulo FGH. y el arco AB. se pide el arco GF. semejante à AB. Busquense los centros C. O. sino estàn dados (4.p.1.) tirda CF. se cortarà CE. igual à OB. y descrito el arco ED. se tomarà igual à BA. tirada CDG. seràn semejantes los arcos GF. DE. AB.

Demonstr. Porque son medida de vn mesmo angulo GCE. (10.P.)

PRACTICA 4.

Dado el circulo BFG. y el punto B. en la circunferencia, se pide la tangente BA. Tirese el radio CB. y su perpendicular BA. (1.p.6.) y serà tangente (7.l.3.)

Si el punto dado A. està fuera, passe AC. por el centro C. y dividida CA igualmente en D. se descriva el semicirculo CBA. que corte à GFB. en B. y serà AB. la tangente.

Demonst. Porque en el semicirculo es el angulo CBA. recto (3.l.3.) luego AB. tangente (7.l.3.)

Si la recta es dada AB. y en ella el punto B. ha de ser el contacto de vn circulo. Tirese BG. perpendicular (1.p.6.) y tomando BC igual al radio, que se desea, se descrivirà el circulo GFB. que tocarà à la recta BA. en B. (7.l.3.)

Si el centro C. està dado, tirese CB. perpèdicular (1.p.6.) y con

y con el radio CB. se descrivirà el circulo BFG. que tocarà à la recta BA. en B. (7.l.3.)

PRACTICA 5.

Dado el circulo MOH. y el punto A. fuera, se pide el circulo DGO. que toque à MOH. Passe AC. por el centro C. y con el radio AO. se descriva el circulo OGD. y tocarà à MOH. en O. *Si el punto dado es B.* passe BC. por el centro, y descrivase el circulo OLS. *Si es dado el punto del contacto O.* passe OC. por el centro, y los circulos DGO. y OLS. tocaràn à MOH. en O.

Demonst. Nace en los 3. casos de (6.l.3.)

PRACTICA 6.

Dada la recta AB. y la infinita CD. pidese el arco BCEA. que toque à DC. Continuada AB. hasta cortar a CD. en D. hagase DC. media entre BD. DA. (2.p.5.) y por los tres puntos A. B. C. descrivase vn circulo (4.p.1.) que tocarà à CD en C.

Demonst. Porque siendo DC. media entre la secante AD. y su exterior segmento DC. serà DC. tangente (6.l.6.)

Si la finita dada es EF. paralela à CD. partase igualmente con el perpendiculo AGC. y por los tres puntos ECF. descrivase el circulo (4.p.1.) y tocarà à la recta CD.

Demonst. Porque el radio OC es perpèdicular à CD, es DC. tangente (7.l.3.)

Dada la recta AB. ò EF. finita, formar el angulo BCA. ò FCE. que sea el mayor de los que pueden tocar à CD descrivase el circulo como antes, el angulo ACB. serà el mayor que puede tocar à CD.

Demonst. Porque si el circulo fuera menor, no tocara à la recta CD. Si fuera mayor, la cortara, y el arco AFB. fuera de menos valor sobre la mesma cuerda AB. (5.l.6.)

PRACTICA 7.

Dado el circulo BDC. y el punto A. dentro, ò fuera, se ha *ha de tirar ABC. que BC. sea igual à XZ.* Tomando qualquier punto D. hagase DE. igual à XZ. y del centro O; descrivase el circulo GHR. que toque à DE. (4. p. 4.) y del punto A. tirese ABC. que toque al circulo GHR. y serà BC. igual à XZ ò ED.

Demonst. Porque las distancias del centro OG. OH. son iguales radios, son tambien iguales cuerdas BC. DE. ò XZ. (2. l. 3.)

PROBLEMA V.

De las figuras inscritas, y circunscritas.

1 *Circunscriuir vn circulo à vn triangulo, è inscriuir vn triangulo en vn circulo.*

2 *Inscriuir vn circulo en vn triangulo, y circunscriuir vn triangulo à vn circulo.*

3 *Inscriuir vn hexagono, y triangulo regular en vn circulo, y las figuras de doblados lados.*

4 *Inscriuir vn quadrado, y octagono, &c.*

5 *Inscriuir vn pentagono, quindezagono; y las de doblados lados.*

6 *Circunscriuir al circulo las sobre dichas figuras regulares; y al contrario, ò inscriuir el circulo en ellas.*

7 *Diuidir el circulo en 360. grados.*

PRACTICA 1.

1 *Dado el triangulo ABC. circunscriuir vn circulo.* Descrivase por los tres puntos A. B. C. el circulo (4. p. 1.) y quedarà circunscrito al triangulo.

Dado el circulo GDE. inscriuir el triangulo ABC. en el; Circunscrivase el circulo ABC. como antes, y tomando qualquier punto G. cortense los arcos GD. DE. semejantes à AB. BC. (4. p. 3.) y serà DEG. el triangulo inscrito equiangulo à BCA.

Demonst. Porque siendo los arcos GD. DE. EG. semejantes à AB. BC. CA. son los angulos opuestos iguales E. C. y D. B. y G. A. (3. l. 3.)

PRACTICA 2.

En el triangulo ABC. se ha de inscriuir el circulo EGF. partan CO. BO. igualmente los angulos C. y B. (1. p. 2.) sea OF. perpendicular, y cortese BG. igual à BF. y CE. à CF. y con el radio OF. descrivase el circulo FEG.

Demonst. Porque EC. CO. son iguales à FC. CO. y comprehende iguales angulos ECO. OCF. serà OE. igual à OF. y el angulo E. recto, como F (4. l. 1.) y assimesmo OG. perpendicular igual à OF. luego el circulo passa por E. y G. y por ser los angulos E. G. F. rectos toca à los lados (7. l. 3.) y està inscrito en el triangulo (17. P)

El triangulo ABC. se ha de circunscriuir al circulo PMN. incrivase el circulo EGF. como antes, y tomando qualquier punto P. en el circulo PMN. haganse los arcos PM. PN. semejantes à GE. GF. tirados los radios HP. HM. HN. tirense perpendiculares SMZ. ZNR. RPS. y tocarà el triangulo SRZ. al circulo PMN. (7. l. 3.) y serà semejante à ABC.

Demonst. Porque los quatro angulos M. H. N. Z. son iguales à E. O. F. C. (3. l. 1.) luego porque M. H. N. se han hecho iguales à E. O. F. serà Z. igual à C. (3. l. 1.) assimesmo S. igual à A. y R. à B. luego son equiangulos, y semejante ZSR. CAB. &c.

PRACTICA 3.

En el circulo ADF. se ha de inscriuir vn Hexagono, ò triangulo regular, con el mesmo radio CA. tomense las distancias AB. BD. DE. EF. FG. y fenecerà en GA.

De-

Demonst. Porque el triangulo ABC. es equilatero: son sus tres angulos iguales (5. l. 1.) luego el angulo C. es de 60 grados, que es vn tercio de dos rectos, o semicirculo 180. y vn sexto de todo el circulo, y assi el arco AB. su medida es la sexta parte de todo el circulo (10. P.) y los angulos A. B. D. todos son iguales, que constan de 120. grados, ò dos sextas partes del circulo.

El triangulo BGE. es equilatero, porque los arcos BG. GE. EB. son iguales de dos sextas partes, luego tambien las cuerdass (3. l. 3.)

Si todos los arcos, como AB. se dividen igualmente (4. p. 1.) se descrivira el *dodezagono*, y assi infinitamente las figuras de doblados lados.

PRACTICA 4.

Descriuir en el circulo vn quadrado, sea qualquier diametro CD. y EAB su perpendicular, juntas AD. DB. BC. CA. formaran el quadrado.

Demonst. Porque siendo los quatro angulos E. rectos, son los quatro arcos iguales (11. P.) luego las quatro cuerdas AD. DB. BC. CA. son iguales (2. l. 3.) y los quatro angulos A. D. B. C. que insisten en los semicirculos, son rectos (3. l. 3.) y es quadrado CADB. (14. P.)

Para el octagono, se partiràn igualmente los arcos en F. G. &c. (4. p. 1.) y quedarà el circulo dividido en 8. partes: luego juntando las cuerdas AF. FD. &c. se formarà el *octagono*.

PRACTICA 5.

Inscriuir el pentagono. Tirando qualquier diametro BDE formese el triangulo isoceles BDF. que los angulos D. y F. sean duplos de FBD. (3. p. 3.) continuada DFG. es el arco FG. la quinta parte del circulo: y tomando sus iguales GH. HO. LO. se descrive el pentagono.

Demonst. Porque los tres angulos D. F. B. son dos rec-

tos (3. l. 1.) luego porque D. F. son iguales, y cada vno duplo de B. serà B. vn quinto de dos rectos: luego D. es dos quintos de dos rectos, y del semicirculo: luego D. o su medida GB. es vn quinto de todo el circulo, que es 72. grados.

Inscriuir el dezagono, partase HO. en E. igualmente, y serà HE. la decima parte del circulo.

Inscriuir el veintagono, se harà partiendo igualmente el arco HE. (4. p. 1.) o tomando el quadrante BN de 90. grados; y pues BL. es de 72. quedarà LN. de 18. que es la vigesima parte del circulo.

Inscriuir el treintagono, tomese BX. la sexta parte del circulo, ò 60 grados (5. p. 3.) quitado de BL. 72. queda XL. de 12. que es la trigesima parte de 360 y de todo el circulo; y tomando LP. igual a LX. de 12. gr. queda PN. de 6. gr. la sexagesima parte del circulo.

Inscriuir el quinzagono, el arco XP. de 24. gr. es la dezima quinta parte del circulo.

PRACTICA 6.

Dado el circulo ABCD. circunscriuir las sobre dichas figuras, inscrivase la figura, que se ha de circunscrivir (5. p. 3. 4. 5.) y tirando à los angulos los radios EA. EB. &c hagan se perpendiculares LAF. FBG. &c. y quedarà circunscrita la figura regular.

Dada la figura ABCD. si se ha de circunscriuir el circulo, partanse igualmente los lados AD. DC. con las perpendiculares OE. ZE. y con la distancia ED. se circunscrivirà el circulo DABC. &c.

Si el circulo se ha de inscriuir en la figura FGHL. partiendo igualmente los lados LF. LH. con los perpendiculos AE. DE (1. p. 6.) con el radio EA. se inscrivirà el circulo ABCD. la mesma pratica trae à los ojos la demonstracion.

PRACTICA 7.

Diuidir el circulo en 360. gr. sobre la recta AB. descrivase el semicirculo AoB, y cō la mesma abertura de com-

compàs se tomarà Ad. y B6. de 60. gr. y desde d. y 6. con la mesma distancia se descrivan dos arcos que se cruzen en D. y serà DC. perpendicular, y Ao. quadrante, y con el mesmo radio de A. o. se descrivirán dos arcos, q̃ se cruzẽ en n. y Cn. partirà el quadrãte Ao. igualmẽte, y serà Ab. y bc. de 45. grados; y tomando con el mesmo radio las distãcias or. o3. quedara todo el semicirculo dividido en seis partes iguales, q̃ cada vna vale 30. grados: dividiendo cada vna en tres, tẽtando, quedarà el quadrante Bo. dividido en nueve partes, que cada vna vale diez gr. y pues bo. es 45. y do. es 30. serà db. 15. gr. luego tomando esta distancia, y passandola de B. entre 1. y 2. tendremos los cinco grados, con que todo el quadrante Bo. puede quedar dividido de 5. en 5. grados: luego se halla el lado del pentagono (5. p. 5.) y sea Ab, 72. gr. quedarà bo. de 18. y pues do. es de 30. quedarà db. de 12. y partiendo bo. igualmente en c. serà co. de 9. gr. y pues db. y rb. son 15. si quitamos dx. y rz. iguales à db. 12. quedarà bx. y bz. de 3. gr. y zx. de 6. y quitando co. 9. gr. de c8. quedarà 1. gr. que quitado de los 5. quedaràn 4. gr. y quitando bo. 18. de o7. que es 20. quedaràn 2. gr. con que teniendo ya 1. 2. 3. 4. y 5. gr. se acabarà de dividir todo el quadrante Bo. en 90. y todo el semicirculo en 180. &c.

Vn semicirculo de bronze, ò talco, &c. bien dividido, es de suma importancia para formar los angulos, y hallar su valor.

PROBLEMA VI.

Dè la proporcion, suma, diferenciã, y transformacion de las figuras.

1 *Avmentar, ò disminuir las figuras semejantes en qualquiera proporcion, y hallar la proporcion de las semejantes.*

2 *Hallar la suma, ò diferencia de qualesquiera figuras semejantes.*

3 *Formar vn anillo, ò marco regular, igual à qualquiera, ò qualesquiera figuras de la mesma especie, y al contrario.*

4 *Transformar vn triangulo en otro, ò vn paralelogramo en otro, dado vn angulo, y la base.*

5 *Transformar vn triangulo en vn paralelogramo, dado vn angulo, y la base, y al contrario.*

6 *Transformar qualquiera figura en vn paralelogramo, dado vn angulo, y la base.*

7 *Transformar qualquiera figura en otra especie dada, ò en vn quadrado, y hallar su proporcion.*

PRACTICA 1.

Sobre la recta AB. està qualquier figura ABF. pidese otra menor, que la mayor à la menor tenga la razon que G. à H. Entre G. H. hallese la media proporcional M. (2. p. 5.) conocidas las tres G. M. y AB. hallese la quarta proporcional BC. (2. p. 7.) luego sobre BC. descrivase la figura CBE. semejante à la dada ABF. (3. p. 7.) y serà CBE. la que se pide.

Demonst. La figura ABF. à CBE. tiene duplicada la razon de AB. a CB. (4.l.6.) esto es de G. a M. la razon de G. a H. es tambien duplicada de G. a M. (21.P.) luego la razon de ABF. a CBE. es como la de G. a H. (1.l.5.)

Si la figura CBE. se ha de aumentar en razon de H. à G. Hallada la media M. se harà como H. a M. assi BC. a BA. (2.p.7.) y la figura BAF. serà la que se pide.

Demonst. Es la mesma que antes.

La razon de dos figuras semejantes ABF. à CBE. se hallarà, si conocidas AB. CB se halla la tercera proporcional DB. (2.p.6.)

Demonst. Porque AB. a DB. tiene la razon duplicada de AB. a CB. (21.P.) y ABF. a CBE. tambien es duplicada de AB. a CB. (4.l.6.) luego ABF. a CBE. es como AB. a BD. (1.l.5.)

PRACTICA 2.

Consideranse descritas sobre las rectas a.c.m.n. qualesquiera figuras semejantes, circulos, ò triangulos, ò poligonos regulares, ò irregulares: pidese la suma de los quatro. Formese el triangulo rectangulo, que CA. AB. sean iguales a *a.* y *c.* (1. p. 4.) la figura de BC. serà la suma de CA. y AB. que son *a.* y *c.* (4.l.6.) y tirando CD. perpendicular a CB. (1. p. 6.) igual a *m.* serà BD. suma de DC. y CB. esto es de *a. c. m.* y si DE se tira perpendicular a BD. y igual a *n.* serà BE. suma de BD. y DE. esto es de *a.c.m.n.* (4.l.6.)

Hallar la diferencia de las figuras que se pueden descrivir sobre BC. y a. si sobre la mayor CB. se haze vn semicirculo CAB. tomando CA. igual a *a.* serà AB. la diferencia.

Demonst. Porque siendo recto al angulo A. del semicirculo (3. l. 3.) la figura de BC es igual a la de CA. y AB. (4.l.6.) luego la de CB. excede a la de CA. en toda la de AB. *Hallar lo que la figura de r. excede à las de a. c.* primero se sumaràn *a.* y *c.* y serà BC. y sobre

bre la base BD. igual a *r.* se formarà el triangulo DBC. (3.p.4.) y serà CD. el excesso en que *r.* excede à *c. a.* &c. *Demonst.* Es la mesma.

PRACTICA 3.

Dado el circulo menor GZX. y el mayor AFE. pidese el intermedio arn. *que el anillo, ò espacio comprehendido entre los dos AFE.* arn. *sea igual al circulo GZX.* Tomese la diferencia entre los circulos OA. OG. (6.p.2.) y se hallarà Oa. que se pide.

Demonst. Porque siendo el circulo del radio OA. igual à los de los radios OG. Oa. serà el circulo GZX. la diferencia entre los circulos AFE. *arn.* (6. p. 2.) y pues el anillo entre los dos circulos AFE. *arn.* es tambien la diferencia de los dos, porque es lo que excede AFE. à *arn.* serà el anillo igual al circulo dado GZX. (3.P.)

Si se dà el circulo GZX. y el interior del anillo arn. *y se busca el exterior AFE.* se hallarà la suma de los circulos OG. Oa. (6.p.2.) que serà OA. y el anillo comprehendido de los circulos AFE. *arn.* serà igual al circulo GZX. *Demonst.* como antes.

Dado el anillo entre AFE. arn. hallar circulo igual GZX. si se toma la diferencia entre los circulos OA. Oa. (6.p.2.) se hallarà el circulo OG. que es GZX. igual al anillo dado. *Demonst.* es la mesma.

Lo mesmo que del anillo, se dize del marco entre los exagonos AFE. *arn.* respeto del exagono GZX. y lo mesmo es de qualesquiera figuras regulares que se pueden inscrivir en los circulos.

PRACTICA 4.

El triangulo dado MNS. se ha de transformar en RMP. sobre la base MR. q̃ el angulo sobre la base sea igual à G. Hagase el angulo RMP. igual à G. y SQ. paralela à MN. q̃ cortarà à MP. en O. juntese la oculta RO. y NP. paralela à RO. el triangulo MRP. es igual à MNS. y tiene la base, y angulo dado. *Demonst.* Por ser paralelas RO. NP. son proporcionales RM. à MO. como MN. à MP. luego porque los triangulos PMR. OMN. tienen los lados reciprocos, y el angulo OMN. comun, seràn iguales (1.l.6.) luego porque MON. es igual à MSN. sobre vna base, y entre dos paralelas (8.l.1.) serà MPR. igual à MSN. (3.P.)

Dado el triangulo MRP. se ha de transformar en MSN. sobre la base MN. y el angulo opuesto à la base, ha de ser igual à L. Tirese NP. y hagasse RO. paralela à NP. y OSQ. paralela à MN. luego sobre MN. descrivase vn arco capaz del angulo L. (4.p.2.) que cortarà à OQ. en S serà el triangulo MSN. el que se pide; pero si el circulo no corta à la paralela OQ. serà el caso impossible.

Demonst. El triangulo MON. es igual à MPR como antes (1.l.6.) MON. es igual à MSN. (8.l.1.) luego MNS. es igual à MPR. y tiene el angulo S. igual à L. (3.l.3.) opuesto à la base dada MN. como se deseava.

Transformar el paralelogramo MX. en MQ. La practica es la mesma, por ser duplos de los triangulos (8.l.1.) pero en el segundo caso el angulo S. opuesto à la base, es el que haze el diametro NS. con el lado SM. la *Demonst.* es la mesma.

PRACTICA 5.

Dado el triangulo ABE. la base AC. y el angulo CAD. se pide el paralelogramo AG. igual à BEA. Formese el triangulo ADC igual à BEA. (6.p.4.) y partiendo igualmente AD. en F. sean FG. CG. paralelas à CA. AF. y serà AG. el que se pide.

Demonst. Porque AF. es la mitad de AD. es el paralelogramo AG. igual al triangulo DAC. (8.l.1.) esto es à BEA. como se deseava.

Dado el paralelogramo AG. la base AB. y el angulo BAE. o AEB. se pide el triangulo APE. igual à AG. Continuese FD. igual à FA. y serà DCA. igual à GA. (8.l.1.) harase despues el triangulo AEB. con la base, y an-

y angulo dado, igual à DCA. (6.p.4.) y serà tambien igual à GA. (3.P.

PRACTICA 6.

Transformar el rectilineo ABCDE. en vn paralelogramo GS. que la base sea dada GH. y el angulo dado H. Dividase el rectilineo en los triangulos EAD. ADC. ACB. y sobre GH. hagase el paralelogramo GH. igual al triangulo AED. sobre MN. el paralelogramo MQ igual à DCA. y sobre PQ. el paralelogramo PS. igual à CBA. (6.p.4.) y quedarà hecho.

Demonstr. Porque todo GS. serà igual à los triangulos del rectilineo, que son el mesmo rectilineo (2. P.)

PRACTICA 7.

Dados los rectilineos Z. y X. pidese vno semejante à X. que sea igual à Z. Tomando qualquiera recta FC. y qualquier angulo C. hagase el paralelogramo CB. igual à Z. y sobre BD. el paralelogramo BE. igual à X. (6.p.6.) tomese *nr.* quarta proporcional, como ED. à DC assi *nm.* à *nr.* (2.p.7.) y hallada la media *ns.* que sea tres continuas *nr. ns. nm.* (2.p.5.) se descrivirà sobre *ns.* vn rectilineo semejante à X. (3.p.7.) y serà igual à Z. como se pide.

Demonst. X. à Z. es como EB. à BC sus iguales: EB. à BC. es como ED. à DC. (1.l.6.) luego X à Z. es como ED. à DC. (1.l.5.) y por ser tres continuas *nm. ns. nr.* es X. à *x.* como *nm.* à *nr.* (4.l.6.) y pues *nm.* à *nr.* se hizo como ED. à DC. esto es como X. à Z. luego Z. y *x.* son iguales entre si (2.l.5.) y *x.* semejante à X. &c.

Reducir el rectilineo Z. à vn quadrado, se puede hazer de la mesma suerte; pero mas facil serà tomar qualquiera recta FC. y el angulo C. recto, y hazer el rectangulo FC. igual à Z. (6.p.6.) y hallando entre CD. DB. la media *h.* (2.p.5.) el quadrado de la media *h.* serà igual al rectangulo de las estremas BC. (1.l.6.) y al rectilineo Z. que es igual à BC.

Ha-

Hallar la razon de X a Z. si se forma el rectangulo FD. igual à Z. y sobre BD. el rectangulo BE igual à X. (6.p.6.) serà X a Z, como EB. à DF. esto es como DE. à DC. (1.l.6.)

PROBLEMA VII.

De la superficie, y solidez.

1 *Hallar la superficie de vn parallelogramo, y triangulo.*

2 *Hallar las superficies planas rectilineas de todas las figuras, y cuerpos.*

3 *Hallar la altura de los solidos.*

4 *Hallar la solidez de los paralelepipedos, y prismas.*

5 *Hallar la solidez de las piramides, y cuerpos regulares.*

6 *Descriuir vn solido semejante à otro sobre vn lado dado, y hallar la razon de dos solidos semejantes.*

7 *Transformar vn paralepipedo, prisma, ò piramide en otro dada, su base rectilinea, ò su altura.*

Explicacion de la superficie.

LA superficie se mide por quadrados de aquella recta, que es medida de los lados de la figura, como si vn triangulo equilatero tiene diez pies de lado, la superficie se medirà por pies quadrados, ò por quadrados que tienen vn pie de lado: y lo mesmo es de qualquiera otra medida, en que se consideran divididos los lados de la figura.

Explicacion de la solidez.

La solidez de los cuerpos se mide por cubos de aquella recta que es medida de los lados del solido, como si los lados del solido se miden por pies, la solidez se medirà por pies cubicos, ò por cubos, que tienen vn pie de lado: y lo mesmo es de qualesquiera otras medidas.

PRACTICA 1.

El producto de la base, y altura es la superficie del paralelogramo.

Exemplo 1. Si el paralelogramo es rectangulo, como EB. y la base AB. tiene 3. pies, y el lado AE. tiene 5. se multiplicarà vno por otro y el producto serà 15. pies quadrados, y es toda la superficie de EB. como se vè en el rectangulo Z. que se compone de 15. quadrados.

Exemplo 2. Si el paralelogramo no es rectangulo, como AD. se tira la perpendicular AE. al lado opuesto, y si hallo que AB. tiene 3. pies, y AE. 5. multiplicando el lado por el perpendiculo, que es 3. por 5. salen 15. pies quadrados la superficie de AD. porque considerando BF. tambien perpendicular, serà el rectangulo BE. igual al rhomboide AD. (8.l.1.)

El producto de la base, y mitad de la altura, ò de la altura, y mitad de la base es la superficie del triangulo: porque el triangulo es medio paralelogramo (8.l.1.)

Exemplo 1. Si el triangulo PRO. es rectangulo, serà PR. perpedicular, y la altura del triãgulo: pues si PR. es de 4. pies, y la base RO. de 9. multiplicando 9. pies por 2. que es la mitad de la altura sale la superficie 18. pies quadrados: tambien si multiplico la altura 4. por la mitad de la base, que serà 4. y medio, sale 18.

Exemplo 2. En el triangulo HLP el perpẽdiculo PR. cae dentro, y es 4. pies, su mitad 2. y HL. la base es 5. multiplicando 5. por 2. sale la superficie 10. pies quadrados.

Exemplo 3. En el triangulo LOP. cae el perpendiculo PR. fuera del triangulo en la base OL. continuada: la base es 6. el perpendiculo 4. su mitad 2. multiplicando 6 por 2. sale la superficie 12. pies quadrados.

PRA-

PRACTICA 2.

Hallar la superficie de vn rectilineo. Qualquiera ABCDEF. se resuelve en triangulos: luego hallada la superficie de todos los triangulos (7. *p.* 1.) constarà la superficie de toda la figura. Lo mesmo es en todas las superficies planas rectilineas de los cuerpos.

Hallar la superficie de vn solido. Hallese cada superficie como antes, y la suma de todas, serà la superficie del solido.

Hallar la superficie de las figuras regulares. Multiplicando el perimetro, ò suma de todos los lados, por la mitad del perpendiculo del centro à vno de los lados, sale la superficie. Lo mesmo es si se multiplica el perpendiculo todo por la mitad del perimetro.

Consectario. Considerando al circulo como poligono de infinitos lados, y su perpendiculo es el radio, si se multiplica este por la mitad de la circunferencia, ò perimetro, el producto, ò rectangulo serà la superficie, ò area de todo el circulo. El modo de hallar la circunferencia se dirà (8. *p.* 4.) Otra regla hallarà el curioso en mi Arithmetica *lib. 4. cap. 9.* para hallar las superficies por los lados, y los lados por las superficies, y transformar vnas figuras en otras, &c.

PRACTICA 3.

Hallar la altura de los solidos. En los prismas, piramides, y paralelepipedos, que tienen vn lado BC. perpendicular à la base, el mesmo lado es su altura.

Si los lados estàn inclinados, como en la piramide ADXE. del punto E. se arrojarà el perpendiculo EZ. sobre el plano de la base continuado, y serà la altura del solido.

Si el perpendiculo huviere de caer dentro del solido, como en la piramide *carb.* por el vertice *b.* se acomodarà vna regla, ò linea recta *bg.* y paralela à la base del solido, y de qualquiera punto *g.* se arojarà el perpendiculo *go.* que serà la altura del solido.

PRAC-

PRACTICA 4.

Hallar la solidez de vn paralelepipedo, y prisma. Multiplicando la superficie de la base por la altura del paralelepipedo, ò prisma sale su solidez. En el paralelepipedo rectanguloDC. la base es el paralelogramo AC. sus lados AB. de 4 pies, y BC. de 3. luego multiplicando 4. por 3. sale la superficie AC. 12. pies quadrados (7. *p.* 1.) multiplicando esta superficie por la altura AD. 10. pies, que es el perpendiculo comun à los planos inferior, y superior, salen 120. pies cubicos la solidez del paralelepipedo DC.

En los prismas es lo mesmo, como en el prisma pentagono Z. por la *Pratica 2.* Si hallo que la superficie de la base tiene 20. pies quadrados, y su altura 10. multiplicando 120. por 10. salen 20. pies cubicos, que es toda la solidez del prisma; porque los prismas, y paralelepipedos de igual base, y altura son iguales (5. l. 11.)

PRACTICA 5.

Hallar la solidez de las piramides, y cuerpos regulares. Multiplicando la superficie de la base por vn tercio de la altura de la piramide sale su solidez. Porque la piramide es vn tercio del prisma que tiene igual base, y altura (5. l. 11.) como en la piramide ABCD. la superficie del triangulo ABC. que es su base, se hallarà por la *Pratica* 1. supongamos sea 20. pies quadrados: su altura, que es la perpendicular DO. del vertice al plano de la base, sea 9. pies, su tercio serà tres pies: y multiplicando la superficie 20. por 3. sale la solidez 60. pies cubicos. Lo mesmo es en todas, aunque la base sea quadrada, pentagona, &c.

Si la piramide està rompida, como HLFQIP. y le falta el pedaço superior PQIR. aplicando dos reglas à los lados HP. FQ. se hallarà el vertice R. y seràn dos piramides HFLR. PQIR. y tomadas las alturas del punto R. sobre los planos HFL. PQI. (7. *p.* 3.) y halladas las

V su-

superficies destos (7.p.2.) se hallarà primero la solidez de HFLR. y despues la de PQIR. como antes: y quitando esta de aquella, quedarà la solidez del pedaço HFLPQI &c.

Hallar la solidez de los cuerpos regulares. La solidez de los cuerpos regulares se hallarà explicada con facilidad en mi Arithmetica *lib. 4. cap. 9.* con que escuso el repetirla en este lugar.

PRACTICA 6.

Describir vn solido EF, semejante à otro RH, sobre vn lado dado ED. Formese primero sobre ED. la base DC. semejante à BA. (3.p.7.) y sobre EC. el plano CG. semejante à OA. y sobre ED. el plano DG. semejante à BO. &c. Formados todos los planos semejantes, y dispuestos con el mesmo orden, seràn los solidos RH. EF. semejantes.

Demonst. Porque todos los angulos seràn iguales, y los lados proporcionales (23.P.)

Hallar la razon de los solidos semejantes RH. à EF. Si dados los lados homologos RB. y ED. se halla la tercera proporcional M. (2.p.6.) y conocidas RB. ED. y M. se halla la quarta N. (2.p.7.) el solido RH. à EF. tendrà la razon que RB. à N.

Demonst. Porque son quatro continuas RB. ED. M. N. y RB. à N. tiene la razon triplicada de RB. à ED. (21.P.) y pues RH. à EF. su semejante, tambien tiene la razon triplicada de RB. à ED. (6.l.11.) la razon de RH. à EF. serà la mesma que la de RB. à N. (1.l.5.)

PRACTICA 7.

Transformar vna piramide ABCD. en otra igual sobre la base dada EFGHI. Lo primero se hallarà la razon de la base EFGHI à la base ABC. (6.p.7.) y sea como *b.* à *d.* y tomando la recta *a* igual à la altura de la piramide ABCD. conocidas *b. d. a.* se hallarà la quarta proporcional *c.* (2.p.7.) que si se toma por altura de la pira-

mi-

mide EFGHIO. serà igual à ABCD.

Demonst. Porque son reciprocas como la base EFGHI. à la base ABC. assi la altura *a* à la altura *c*: luego son las piramides iguales (5.l.11.)

Para hazer vna piramide igual à vn prisma, se tomarà el triplo de la altura hallada. *Para hazer vn prisma igual à vna piramide,* se tomarà el tercio de la altura hallada, porque el prisma es triplo de la piramide (5.l.11.)

Transformar vna piramide ABCD. en otra, dada su altura c. Si la altura de la piramide dada ABCD. es *a.* la razon de *c.* à *a.* serà la de las bases: luego formando otra base sejante à ABC. en razon de *c.* à *a.* (6.p.1.) y transformandola despues en qualquiera especie de figura (6.p.7.) saldrà siempre la piramide igual.

Demonst. Porque siempre seràn las bases, y alturas reciprocas (5.l.11.) Lo mesmo es en los prismas, &c. Entre prismas, y piramides se toma el triplo, ò tercio como antes.

PROBLEMA VIII.

De los problemas no resueltos.

1 *De la triseccion del angulo, y arco, &c.*
2 *De la inscripcion del heptagono, &c.*
3 *De las dos medias proporcionales, &c.*
4 *De la quadratura del circulo.*

Aduertencia.

Problemas no resueltos llamo à los que no estàn sin controversia demostrados; y assi pongo entre ellos la quadratura del circulo, sin negar por esso la gloria que merece al P. Gregorio de San Vicencio, de la

 Com-

Compañia de Iesvs, Mathematico insigne, y à mi juyzio en tolo el tiempo inferior à los maximos Apolonio, y Archimedes.

1 DE LA TRISECCION, &c.

El angulo recto facilmente se divide en tres partes iguales, porque el angulo de vn triangulo equilatero es vn tercio de dos rectos (5. l. 1.) luego su mitad serà vn tercio de vn recto Methodo general para todos los angulos, hasta oy no se ha visto.

Caramuel en su Mathematica nueva, que acaba de salir à luz este año de 1670. dize, que carecieron desta demonstracion Ptolomeo, y los antiguos; y en la *pag.* 330. *num.* 270. nos la propone desta suerte.

Sea el angulo FCB. o el arco FB. su medida, juntando FB. tirese CIG. con tal arte que FI. FG. sean iguales, y sera el arco FG. vn tercio de FB.

Demonst. Porque los triangulos FCG. GFI. son isoceles, y siendo el angulo G. comun, seràn iguales angulos FCG. GFI. (3. l. 1.) luego FG. es la mitad de GB. (3. l. 3.) ò el tercio de FB. inmortales gracias dieramos à Caramul si nos demostrara el arte con que se ha de tirar la linea CIG. pues sin esto queda por resolver el problema. No carecieron los antiguos de medios para la resolucion.

Papa Alexandrino propone este *lib.* 4. *p.* 32. sea el angulo dado MLN. y de qualquier punto M. caiga el perpendiculo MN. tirada LP. que CP. sea dupla de LM serà el angulo NP la mitad de PLM. y aunque le trae para el angulo agudo, es tambien general para los obtusos.

Francisco Vieta en el suplemento *p.* 9 propone otro medio. Sea el angulo HIK. ò su medida el arco KH. continuado el diametro KHA. si se tira HA. que EA. sea igual al radio IK. y serà ZE. vn tercio de KH.

Pongo otro medio. Sea el arco TV. y el diametro TR.

TR si se tira VY. que ZY. ZS. sean iguales, serà RY. ò TX vn tercio de TV. porque es isoceles ZYS. luego los angulos ZYS. ZSY. iguales (5. l. 1.) luego YR. ò TX. es la mitad de VX. (3. l. 3.) ò vn tercio de TV. todas estas no son demostraciones, porque el medio que se toma, incluye la misma dificultad, y no se demuestra.

Antonio Sanctinio, Professor Romano, publicò el año 1648. vn libro, que intitulò *Inclinationum appendix*, donde trae varias resoluciones, pero llenas de paralogismos. Su censura merece especial tratado, y en èl tendrà su lugar la que mereciere otra triseccion, que en esta Corte ha ofrecido el M. R. P. Fr. Ignacio Muñoz, Catedratico de Mexico. Los errores de Santinio demonstrò Pedro Pablo Caravagio, noble Geometra: El Marquès Buscaiolo Ginovès publicò el año passado de 1677. vna triseccion, que escuso el ponerla aquí, porque el modo de demostrar es tan ageno de la Geometria, como su pratica de la verdad y para hallar su paralogismo, basta saber, que los arcos dissimiles de los circulos no guardan la razon de las cuerdas, ni diametros. Otra se publicò el mesmo año en Francia, que no mereciò mas aplauso entre sus Geometras.

Concluyo con que hasta oy solo se puede partir el angulo, ò arco igualmente en 2. 4. 8, 16 partes iguales, &c. procediendo por continua biseccion (1. *p.* 2.)

2 DEL HEPTAGONO.

No ay arte para inscrivir en el circulo otras figuras regulares, que las explicadas en el Problema 5. y las que se pueden continuar por biseccion de los arcos. Las de 7. 9. 11. 13. 17. 19. lados, &c. se podian inscrivir geometricamente, si se hallasse arte para formar vn triangulo isoceles, que qualquier angulo sobre la base fuera triplo, quadruplo, &c. del vertical, como el triangulo isoceles del angulo duplo (5. *p.* 5.) sirve para el pen-

pentagono, el triplo sirviera para el *Heptagono*, el quadruplo para el *Nonagono, &c.* Antonio Sanctinio trae vna pratica general, y aunque tengo demostrado su error, con la advertencia que añadirè, se aproxima tanto à la verdad, que es la operacion segura, y facilissima.

Pratica para todas las figuras regulares.

Del centro H. descrivase qualquier circulo ARB. y tomando qualquier punto A. sea AHB. su diametro. Tomense luego tantas partes iguales, como lados ha de tener la figura, y sea en el exemplo de 7. lados; desuerte, que el vltimo punto 7. caiga cerca del punto B. poco antes, ò despues, y tirada la linea AE. se partirà igualmente en O. y con el radio OA. se descrivirà el circulo ADEF. y siendo OC. perpendicular à AE. desde el punto C se tirarà por el segundo punto C 2. que determinarà el punto D. y serà AD. la septima parte del circulo ADEF. y si se tira ED. que corte al primer circulo en *a.* serà Aa. la septima parte del circulo ABC. (5.l.3.) Quanto el punto E. fuere mas proximo à B. es mas segura la operaciõ. Lo mesmo es en las figuras de 9. y 11. lados, &c.

3 DE LAS DOS MEDIAS.

Varios medios han tentado los Antiguos, y Modernos para hallar las dos medias proporcionales, que les podrà ver el curioso en la Geometria del P. Claudio Ricardo, Maestro que fue de Mathematicas en estos Reales Estudios. Propongo solo vno, que me parece de los mas inteligibles, y claros.

Sean dadas E. D. y se buscan las dos medias B. C. que sean quatro continuas E. B. C. D. En vn angulo recto PFG. tomese FG. igual à E. y FP. igual à D. y hecho el rectangulo FK. de su centro A. se descrivirà el circulo FGKP. que passarà por los 4. angulos rectos (3.l.3.) continuados los lados KGH. KPR. si del punto F. se tira la recta FRH. que sean iguales RF. LH. serán las dos medias HG. RP. y las quatro continuas FG. GH. RP. PF.

Para tirar la recta FR. no ay arte cierta, praticamente se puede hazer desta suerte. Del centro E. tirese vn circulo *pq.* desuerte, que P*p.* sea mayor que PF. y G*q.* menor que FG. y aplicando la regla à los puntos *p.q.* sino passa por F. se harà otro circulo RH. mayor, ò menor, que la recta RH. passe por F. y seràn RF. LH. iguales, y tambien RL. HF. (4.l.3.)

Demonst. El rectangulo KHG. es igual à FHL. (6.l.6.) esto es à LRF. o KRP. luego son los lados reciprocos (1.l.6.) como HK. à KR. assi RP. à HG. y pues FP. à PR. es como HK. à KR. (2.l.6.) serà como FP. à PR. assi RP. à HG. (1.l.5.) y son tres continuas FP. PR. HG. y por ser proporcionales FP. à PR. como HG. à GF. (2.l.6.) seràn quatro continuas, como FP. à PR. assi PR. à HG. y assi HG. à GF. luego RP. HG. son dos medias entre FP. FG. que son E. y D. &c.

Tambien es cierto, que si se resolviesse este Problema. *Dado vn angulo RPF. y vn punto H. dentro, ò fuera, tirar la recta HR. que FR. sea igual à vna dada,* se resolverian las dos medias, como lo demostrò Vieta en el Suplemento, *prop.* 5. y tambien la triseccion del angulo; como vimos en la construcion de Papo Alexandrino: desto solo duda quien ignora la Geometria.

[illegible] las dos medias depende la construccion de los Solidos semejantes en qualquiera razon, y proporcion dada. Como si la recta D. fuere lado de vn solido cubo, prisma, ò piramide, &c. y se pide otro semejante duplo, triplo, &c. si se toma E. dupla, ò tripla de D. ò que E. à D. tenga la razon dada, y se hallan dos medias B. y C. los solidos de C. y D. semejantes tendràn entre si la razon que E. à D. porque vn solido à otro semejante tiene la razon triplicada de los lados (6.l.11.) y por ser quatro continuas E. B. C. D. tiene

tiene tambien E. à D. la razon triplicada de E. à B. ò C. à D. (21. P.) luego el ſolido C. al ſolido D. tendra la razon que la recta E. à D. (1. l. 5.)

A mas del aumento, ò diminucion de los ſolidos ſemejantes, penden de las dos medias innumerables Problemas; deſuerte, que con ſolo eſte quedaria la Geometria enriquecida, y ſus terminos notablemente dilatados, y con nombre inmortal quien le reſolvieſſe. De eſta gloria ſe priva en eſta Corte el P. Fr. Ignacio Muñoz, que le tiene ofrecido à ſus Diſcipulos con la triſeccion en ſu *Plus Vltra Geometrico*; y no acaba de ſacarle à luz, temiendo como humilde la gloria que ſe le puede ſeguir entre los Geometras.

4 DE LA QVADRATVRA.

Lo que ſe pide en la Quadratura, es formar vn quadrado, que ſu area, ſuperficie, ò capacidad ſea igual al eſpacio que la linea circular comprehende. Otro Problema es, *hallar la proporcion del diametro con la circunferencia.*

Eſtos dos Problemas tienen tal connexion, que hallado el vno, queda reſuelto el otro; pero ninguno de ſu naturaleza pide que el otro ſe halle primero, porque admitida eſta mutua dependencia, fuera impoſsible la reſolucion de entrambos, como es impoſsible que los dos ſean mutuamente primeros. La quadratura, pues, ſe puede hallar ſin que ſirva de medio la proporcion del diametro, y circunferencia, como en la *Lunula* que quadrò Hipocrates Chio; y al contrario.

El P. Iuan de la Faille, Catedratico de Matematicas en eſtos Reales Eſtudios, y Maeſtro del Sereniſsimo Señor Don IVAN de AVSTRIA, demonſtrò, que hallado el centro de la gravedad de las partes del circulo, eſtava hallada la quadratura, y al contrario.

Yo demonſtrè en el Apendiz del *tom. 1.* de mi

Geom.

Geom. Mag. in Minimis, que hallado vn triangulo, ò rectilineo minimo al circulo, eſtà dada la quadratura, y por conſiguiente, el centro de la gravedad, y al contrario.

Archimedes demonſtrò, que el circulo es igual à vn triangulo que tiene la baſe igual à la circunferencia, y la altura, ò perpendiculo igual al radio; porque qualquiera figura regular inſcrita en el circulo ABCD ſe reſuelve en tantos triangulos iguales, y ſemejantes, como lados; y pues todos tienen igual perpendiculo GO. es toda la figura igual à vn triangulo que tiene la baſe igual à todos los lados AB. BC. CD. &c. y la altura igual al perpendiculo GO. (1. l. 6.) Conſiderando, pues, al circulo como poligono de infinitos lados, que ſu perpendiculo es el meſmo radio, ſerà todo el circulo igual tambien al triangulo, que tiene por baſe vna recta igual à toda la circunferencia, y al radio por altura, ò perpendiculo.

De donde ſe infiere, que conocida la proporcion del diametro à la circunferencia, y dado el diametro, es dado el radio, y ſe pudiera hallar vna recta igual à la circunferencia (2. p. 7.) y con eſta baſe formando qualquier triangulo que tenga por altura el radio, ſerà igual al circulo, y deſpues facilmente ſe pudiera transformar en quadrado (6. p. 7.)

Proporcion de Archimedes.

El diametro à la circunferencia tiene la proporcion proxima que 7. à 22. pero ſale la circunferencia mayor de lo juſto. Dado, pues, el diametro, ſe hallarà la circunferencia por vna regla de tres. Si vn circulo tiene de diametro 35. pies, dirè ſi 7. dàn 22. que daràn 35. ſalen 110. pies. Si ſe diere la circunferencia de 110. para hallar el diametro, dirè ſi 22. dàn 7. que daràn 110. ſalen 35. pies de diametro.

X *Pro-*

Proporcion de Adriano Mecio.

El diametro 113. la circunferencia 355. esta proporcion es la mas justa de quantas se han hallado en numeros pequeños, pues no excede la circunferencia à lo justo en tres partecilas de diez mil, en que se puede considerar el diametro dividido.

Proporcion de Ceulen.

Diametro. 100 000.000 000.000.000.000. *Circunfer*. 314.159.265.358.979. 323. 847. Esta no excede en vna partecilla de cien tricuentos. El vso de estas es el mesmo que antes por regla de tres, como se hizo antes.

Consectarios.

1 *La superficie del circulo* es el producto del radio en la mitad de la circunferencia, como si el diametro es 14. serà el radio 7, la circunferencia 44. su mitad 22. multiplicando 22. por 7. salen 154. pies quadrados la superficie del circulo.

2 *La superficie convexa del cilindro recto* es el producto del lado en la circunferencia del circulo, que es su base: y añadidas las dos superficies del circulo superior, è inferior, serà toda la superficie del cilindro, como si la base tiene de diametro 14. pies, serà su circunferencia 44. multiplicada por la altura 10. pies serà la superficie convexa 440. pies quadrados, y añadidas las dos superficies circulares de 154. serà toda la superficie 748. pies quadrados. En los siguientes Consectarios se obra de la mesma suerte.

3 *La superficie conica convexa* es el producto del lado en la mitad de la circunferencia de la base circular: y añadida la superficie del circulo, serà toda la superficie conica.

4 *La superficie de vna esfera* es el producto de su diametro en la circunferencia del circulo que tiene el mismo diametro; tambien es el quadruplo de la superficie del dicho circulo.

5. La